

# Кооперативни комуникации преку безжични релејни канали

- докторска дисертација -

Кандидат:  
Јован Стошиќ

Ментор:  
проф. д-р Зоран Хаџи-Велков

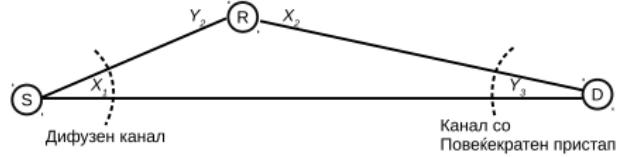
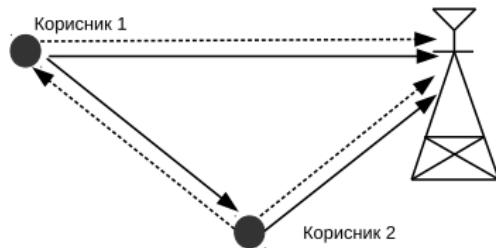
26.12.2014 Скопје

- 1 Кооперативни релејни канали ▶ 1.1
- 2 Капацитет на кооперативните СИСО релејни канали ▶ 2.1
- 3 МИМО релеен канал со две делници и две антени по јазол ▶ 3.1
- 4 МИМО релеен канал со повеќе антени по јазол ▶ 4.1
- 5 Релеен канал со повеќе делници ▶ 5.1
- 6 МИМО релеен канал од информациско-теоретски аспект ▶ 6.1
- 7 Заклучок ▶ 7.1
- 8 Бекап слайдови ▶ 8.1

# 1.1. Кооперативни релејни канали

▶ 0.0

- Во кооперативните комуникации секој безжичен јазол праќа сопствена информација но истовремено помага во комуникацијата на други јазли.
- Патеките од двете станици се под влијание на независен фединг што во дестинацијата ( $D$ ) создава просторен диверзитет.
- Релејниот канал се состои од дифузен канал и канал со повеќекратен пристап
- Стандардни релејни методи: засили-и-проследи, декодирај-и-проследи, и компримирај-и-проследи



## 1.2. Метрики за определување на перформансите во фединг канал

- Ергодичен капацитет:

$$C = W \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{P}{W \cdot N_0} \right) \text{ bits/s}, \quad C = E [\log_2 (1 + \gamma)] \text{ bit/Hz/s}$$

- Веројатност на испад и капацитетен испад (веројатноста на испад на директниот и кооперативниот релеен линк е многу помала од веројатноста на испад само на директниот линк):

$$P_{out} = Pr(\gamma \leq \gamma_{th}) = \int_0^{\gamma_{th}} p_\gamma(\gamma) d\gamma, \quad P_{oc} = Pr(C \leq C_{th}) = \int_0^{C_{th}} p_C(C) dC$$

- Средна веројатност на грешка:

$$P_b(E) \triangleq \int_0^\infty P_b(E|\gamma) \cdot p_\gamma(\gamma) d\gamma$$

- Добивка од диверзитет и мултиплексирање:

$$d = -\lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} \frac{\log P_{out}(C_{th}, \bar{\gamma})}{\log(\bar{\gamma})} \quad r = \lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} \frac{R(\bar{\gamma})}{\log(\bar{\gamma})}.$$

Добивката во диверзитет е градиентот на веројатноста на капацитетен испад. Степенот на мултиплексирање е градиентот на ергодичниот капацитет.

## 1.3. Фединг канали

**Карактеризација:** Во фединг канал, амплитудата и фазата на сигналот во приемникот случајно се менува во текот на времето

- Бавен и брз фединг.
- Рамен и фреквентно-селективен фединг.

**Моделирање:** Моментален и среден однос сигнал-шум:

$$\gamma = \alpha^2 \frac{E_s}{N_0}, \quad \bar{\gamma} = \Omega \cdot \frac{E_s}{N_0}.$$

- Функција на густина на веројатност на односот сигнал шум:

$$p_{\gamma}(\gamma) = \left. \frac{p_{\alpha}(\alpha)}{d\gamma/d\alpha} \right|_{\alpha=\sqrt{\frac{\gamma\Omega}{\bar{\gamma}}}} = p_{\alpha}\left(\sqrt{\frac{\gamma\cdot\Omega}{\bar{\gamma}}}\right) / 2 \cdot \sqrt{\frac{\gamma\cdot\bar{\gamma}}{\Omega}}$$

- Функција на генерирање на моменти (MGF):

$$M_{\gamma}(s) = \int_0^{\infty} p_{\gamma}(\gamma) \cdot e^{s\cdot\gamma} d\gamma,$$

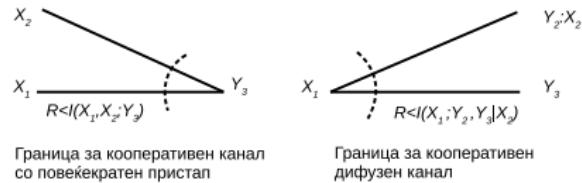
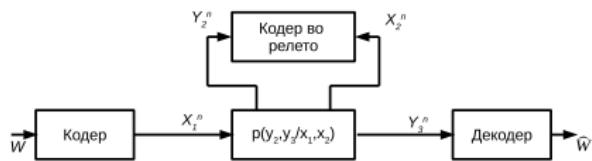
- Повеќепатен фединг: Кога нема директна видливост амплитудата на фединг каналот ја следи Рејлиевата распределба:

$$p_{\alpha}(\alpha) = \frac{2\cdot\alpha}{\Omega} \cdot e^{-\frac{\alpha^2}{\Omega}}, \quad \alpha \geq 0, \quad p(\gamma) = \frac{1}{\bar{\gamma}} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right), \quad \gamma \geq 0, \quad M_{\gamma}(s) = (1 - s \cdot \bar{\gamma})^{-1}$$

## 2.1. Капацитет на релеен канал

▶ 0.0

- Дискретен релеен канал без мемеорија (DMRC):  
 $(X_1 \times X_2, p(y_2, y_3|x_1, x_2), Y_2 \times Y_3)$
- Множество на пораки  $[1 : 2^{nR}]$ ; Кодер: коден збор  $x_1^n(w)$  за секоја порака  $w \in [1 : 2^{nR}]$ ; Декодер: естимација  $\hat{w}$  или грешка  $e$ ,  $\forall y_3^n \in Y_3^n$



- Горна граница за капацитетот (CUB):

$$C \leq \max_{p(x_1 x_2)} \min \{ I(X_1, X_2; Y_3), I(X_1; Y_2, Y_3 | X_2) \}$$

## 2.2. Граници на капацитетот

- Директен пренос:  $C_{DT} \geq \max_{x_2 \in X} \max_{p(x_1)} I(X_1; Y_3 | x_2)$

- Каскаден RC:

$$C \geq \max_{p(x_1)p(x_2)} \min \{I(X_2; Y_3), I(X_1; Y_2 | X_2)\} = \min \{\max_{p(x_2)} \{I(X_2; Y_3)\}, \max_{p(x_1)} \{I(X_1; Y_2)\}\}$$

- Кохерентен RC: Брзината на пренос што се постигнува со каскадниот RC се зголемува ако  $S$  и  $R$  кохерентно соработуваат при испраќањето на кодните зборови.

$$C \geq \max_{p(x_1, x_2)} \min \{I(X_2; Y_3), I(X_1; Y_2 | X_2)\}$$

- Декодирај-и-проследи (DF):

$$C \geq \max_{p(x_1 x_2)} \min \{I(X_1, X_2; Y_3), I(X_1; Y_2 | X_2)\}$$

- Деградиран RC:  $p(y_3, y_2 | x_1, x_2) = p(y_2 | x_1, x_2) \cdot p(y_3 | y_2, x_2)$  т.е  $X_1 \rightarrow (X_2, Y_2) \rightarrow Y_3$ .

$$C = \max_{p(x_1 x_2)} \min \{I(X_1, X_2; Y_3), I(X_1; Y_2 | X_2)\}$$

- Компримирај-и-проследи (макс. по:  $p(x_1)p(x_2)p(\hat{y}_2 | x_2 y_2)$ ):

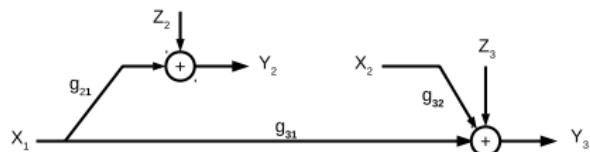
$$C \geq \max \min \left\{ I(X_1, X_2; Y_3) - I(Y_2, \hat{Y}_2 | X_1 X_2 Y_3), I(X_1; \hat{Y}_2, Y_3 | X_2) \right\}$$

- CUB на RC со ортогонални приемни компоненти (ORC):

$$C \leq \max_{p(x_1)p(x_2)} \min \{I(X_1; Y'_3) + I(X_2; Y''_3), I(X_1; Y_2, Y'_3)\}$$

## 2.3. Гаусов RC: декодирај-и-проследи

$$Y_2 = g_{21}X_1 + Z_2, \quad Y_3 = g_{31}X_1 + g_{32}X_2 + Z_3,$$



- Каде  $g_{21}, g_{31}$ , и  $g_{32}$  се каналните коефициент, а  $Z_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$  и  $Z_3 \sim \mathcal{N}(0, 1)$  се независните компоненти на шумот

- $P$  е ограничивањето на средната моќност за  $X_1$  и  $X_2$
- Горна пресечна граница (CUB):

$$C \leq \max_{0 \leq \rho \leq 1} \min \left\{ C(\gamma_{31} + \gamma_{32} + 2\rho\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}}), C((1 - \rho^2)(\gamma_{31} + \gamma_{21})) \right\}, \quad \rho = E(X_1 X_2) / \sqrt{E(X_1^2) \cdot E(X_2^2)}$$

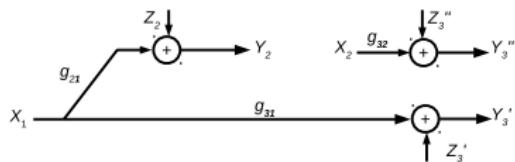
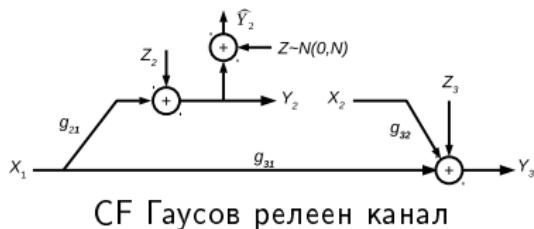
- Долна граница на  $C$  за директен пренос:  $C \geq C(\gamma_{31})$
- Долна граница на  $C$  за каскаден RC:  $C \geq \min \{C(\gamma_{21}), C(\gamma_{32}/(\gamma_{31} + 1))\}$
- Долна граница за декодирај-и-проследи (DF):

$$C \geq \max_{0 \leq \rho \leq 1} \min \left\{ C(\gamma_{31} + \gamma_{32} + 2\rho \cdot \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}}), C((1 - \rho^2) \cdot \gamma_{21}) \right\}$$

- Долна граница за некохерентен декодирај-и-проследи канал:

$$C \geq \min \{C(\gamma_{31} + \gamma_{32}), C(\gamma_{21})\}$$

## 2.4. Гаусов RC: компримирај-и-проследи



- $X_1 \sim \mathcal{N}(0, P)$ ,  $X_2 \sim N(0, P)$ , и  $Z \sim \mathcal{N}(0, N)$  се здружено независни и  $\hat{Y}_2 = Y_2 + Z$ .
- CF методата дава подобри резултати од DF кога  $\gamma_{21} < \gamma_{31}$ .

- Долната граница за CF Гаусов RC е:

$$C \geq C \left( \gamma_{31} + \frac{\gamma_{21} \cdot \gamma_{32}}{\gamma_{31} + \gamma_{21} + \gamma_{32} + 1} \right).$$

- Долна граница за DF за RFD

$$C \geq \begin{cases} C(\gamma_{31}) + C(\gamma_{32}) & \text{доколку } \gamma_{21} \geq \gamma_{32} (\gamma_{31} + 1) \\ C(\gamma_{21}) & \text{во спротивно} \end{cases}$$

- CUB за RFD

$$C \leq \begin{cases} C(\gamma_{31}) + C(\gamma_{32}) & \text{if } \gamma_{21} \geq \gamma_{32} (\gamma_{31} + 1) \\ C(\gamma_{21} + \gamma_{31}) & \text{otherwise} \end{cases}.$$

- Долна граница за CF за RFD

$$C \geq C \left( \gamma_{31} + \frac{\gamma_{21} \gamma_{32} (\gamma_{31} + 1)}{\gamma_{21} + (\gamma_{31} + 1)(\gamma_{32} + 1)} \right).$$

## 2.5. Засили-и-проследи Гаусов RC

- Гаусов RC со линеарна релејна функција:

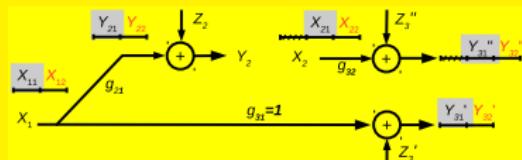
$$x_{2i} = \sum_{j=1}^i a_{ij} y_{2j}, i \in [1 : n], X_2^n = A \cdot Y_2^n$$
$$\begin{bmatrix} X_{21} \\ X_{22} \\ \dots \\ X_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{21} \\ y_{22} \\ \dots \\ y_{2n} \end{bmatrix}$$

- Капацитет на системот:

$$C_L = \lim_{k \rightarrow \infty} C_L^{(k)}, C_L^{(k)} = \max_{F(x_1^k), A} \frac{1}{k} \cdot I(X_1^k; Y_3^k)$$

- Максимумот е по сите кумулативни веројатности  $F(x_1^k)$  и долни триаголни матрици  $A$  кои го задоволуваат ограничувањето на моќност во изворот и релето -  $P$

- AF Гаусов RC се добива ако  $k = 1$ :



- Капацитет :  $C_L^{(1)} = I(X_1; Y_{31}' Y_{31}'')$ ,  
 $C_L^{(1)}$  се достигнува за  $X_1 \sim \mathcal{N}(0, P)$  и  $X_2 = Y_2 \sqrt{P / (\gamma_{21} + 1)}$ .

$$C_L^{(1)} = C \left( \gamma_{31} + \frac{\gamma_{21} \gamma_{32}}{\gamma_{21} + \gamma_{32} + 1} \right)$$

-  $C$  за каскаден AF Гаусов RC:  
 $C_L^{(1)} = C \left( \frac{\gamma_{21} \gamma_{32}}{\gamma_{21} + \gamma_{32} + 1} \right)$

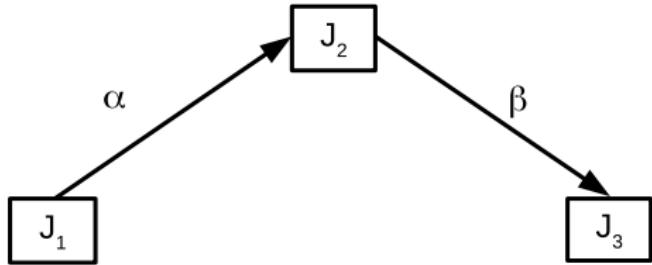
### 3.1. МИМО релен канал со 2 делици и 2 антени по јазол

▶ 0.0

- RC со две делници, кој се состои од  $S$  (со 2 антени),  $R$  (со 1 или 2 антени) и  $D$  (со 1 или 2 антени). Се кориси Аламути кодирање.
- Се користи варијанта на AF постапка, наречана раздвои-и-проследи (DCF) со променливо засилување (VG) во релето (CSI во релето и дестинацијата). DCF е техника за линеарно процесирање со која релето конвертира повеќе просторни поворки од применетот OSTBC сигнал во една просторна поворка без декодирање на симболите.
- Сигналот во  $R$  и  $D$  е:

$$r_2(t) = \alpha \cdot x(t) + n_2(t), \quad r_3 = \alpha \cdot \beta \cdot A \cdot x(t) + \beta \cdot A \cdot n_2(t) + n_3(t)$$

- Крај-крај SNR:

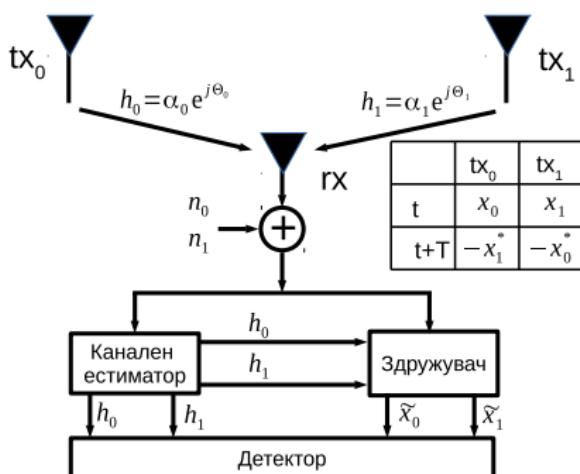


$$\gamma_{eq} = \frac{\alpha^2 \cdot \beta^2 \cdot A^2 \cdot E_1}{\beta^2 \cdot A^2 \cdot N_{02} + N_{03}}$$

- Релиња со променливо засилување, слепи и полу-слепи релиња

### 3.2. Аламути шема

- Системите со повеќе антени во приемникот - приемен диверзитет, а системите со повеќе антени во предавателот - предавателен диверзитет
- Приемниот сигнал во систем со повеќе антени е:  
 $y = \mathbf{h}x + \mathbf{n}$ ,  $y = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ ,  $\mathbf{h} = [h_1, h_2, \dots, h_N]^T$ ,  $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \dots, n_N]^T$



- Доколку во  $D$  се користи приемен диверзитет со користење на MRC и доколку  $E[|h_{ij}|^2] = 1$ :

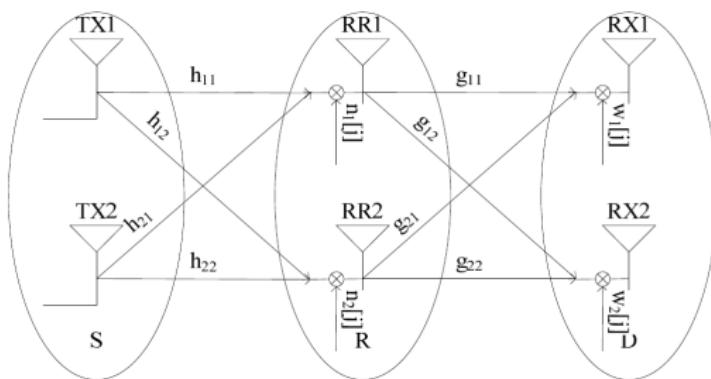
$$\bar{\gamma} = E[\gamma] = N \cdot \frac{E_s}{N_0} = N \cdot \bar{\gamma}_0$$

(средниот SNR во систем со  $N$  приемни антени во  $D$  е  $N$  пати поголем од средниот SNR од системот со 1 предавателна и 1 приемна антена)

- Во трудот на С. М. Аламути иста ваква добивка се добива со користење на систем со предавателен диверзитет.

### 3.3. МИМО RC „раздвои-и-проследи“

- DCF МИМО полуудуплексен RC со OSTBC: процесот е поделен во две фази (фаза 1 и фаза 2).  $S$  испраќа кон  $R$  за време на фазата 1, потоа  $R$  испраќа кон  $D$  во на фаза 2.
- Канални матрици:  $H = [h_{11}, h_{12}; h_{21}, h_{22}]$  и  $G = [g_{11}, g_{12}; g_{21}, g_{22}]$ .  $k = 1, 2$  и  $3$  во  $g_k$ ,  $\Delta_k$  и  $\Lambda_k$  означуваат  $2 \times 1 \times 1$ ,  $2 \times 2 \times 1$  и  $2 \times 2 \times 2$  систем



-  $|h_{ij}|^2$  и  $|g_{ij}|^2$  ја следат експоненцијалната опаѓачка PDF со идентични средни квадратни вредности:

$$E [|h_{ij}|^2] = E [|g_{ij}|^2] = 1$$

- Средна моќност по симбол:

$$E = P \cdot c, \quad c = \frac{L}{K \cdot N}.$$

- Приемните сигнали во интервалите 1 и 2 се:

$$y_1 [1] = \sqrt{E_s} (h_{11} \cdot x_1 + h_{21} \cdot x_2) + n_1 [2], \quad y_1 [2] = \sqrt{E_s} (-h_{11} \cdot x_1^* + h_{21} \cdot x_2^*) + n_1 [2],$$

- За  $2 \times 2 \times 1$  и  $2 \times 2 \times 2$  раздвоените симболи во  $R$  се:

$$\tilde{x}_1 = h_{11}^* y_1 [1] - h_{21} y_1^* [2] = \sqrt{E_s} \Delta_2 x_1 + \eta_1, \quad \tilde{x}_2 = \sqrt{E_s} \Delta_2 x_2 + \eta_2, \quad \Delta_2 = \Delta_3 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 |h_{ij}|^2$$

### 3.4. Веројатност на испад

- Веројатноста на испад е веројатност дека моменталниот SNR е помал од прагот -  $\gamma_{th}$

$$P_{out} = P(\gamma_k < \gamma_{th}) = 1 - P(\gamma_k > \gamma_{th}) = 1 - P\left(\frac{1}{\gamma_k} < \frac{1}{\gamma_{th}}\right)$$

- За 2x2x1 МИМО систем:

$$\hat{x}_1 = A_2 \Lambda_2 \tilde{x}_1 + \zeta_1 = A_2 \Lambda_2 \Delta_2 \sqrt{E_s} x_1 + A_2 \Lambda_2 \eta_1 + \zeta_1, \quad \gamma_2 = \frac{E_s}{N_0} \cdot \frac{A_2^2 \Lambda_2 \Delta_2^2}{A_2^2 \Lambda_2 \Delta_2 + 1}$$

- Фактор на засилување:  $A_2 = A_3 = \sqrt{E_R / (E_I \cdot \Delta_2^2 + \Delta_2 N_0)}$ ;

- Ако се земе  $A_k \cong 1/\Delta_k$ :

$$w_k = \frac{1}{\gamma_k} = \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot \Delta_k} + \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot \Lambda_k} = u_k + v_k, \quad \bar{\gamma} = E_s / N_0$$

- Моменталната моќност на каналот ја следи експоненцијалната PDF,  $\Delta_k$  ја следи Гама PDF, а  $1/(\bar{\gamma} \cdot \Delta_k)$  ја следи:

$$f(x) = \frac{x^{-\alpha-1}}{\bar{\gamma}^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{\frac{-1}{x\bar{\gamma}}}, \quad \text{зах } x > 0, \alpha, \theta > 0, \quad M(-s) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{s}{\bar{\gamma}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} K_\alpha \left(2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}}\right),$$

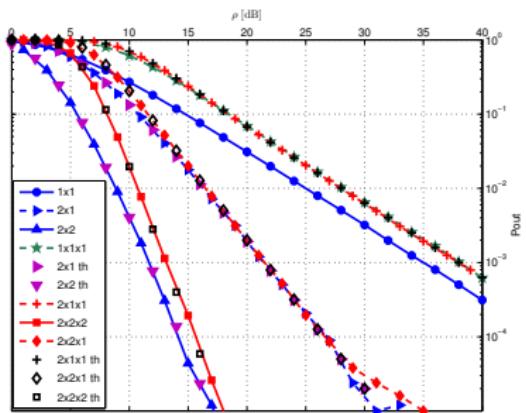
- $U_k$  и  $V_k$  се независни случајни променливи и MGF-от од нивната сума е производ од нивните MGF-и. На пример за 2x2x2:

$$M_{w_3}(-s) = \frac{4}{\gamma^2(4)} \left(\frac{s}{\bar{\gamma}}\right)^4 \left(K_4\left(2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}}\right)\right)^2, \quad P(\gamma_k < \gamma_{th}) = 1 - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{M_{w_k}(-s)}{s}\right)\Big|_{1/\gamma_{th}}$$

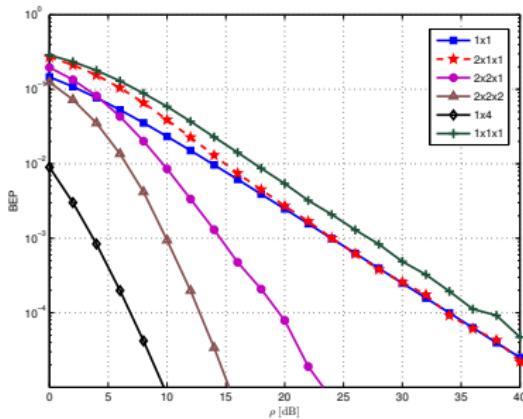
$$P(\gamma_3 < \gamma_{th}) = 1 - \frac{2}{\gamma^2(4)\bar{\gamma}^4} \left\{ \frac{d^3}{dw_3^3} \left[ \frac{e^{\frac{-2}{\bar{\gamma} w_3}}}{w_3} K_4\left(\frac{2}{\bar{\gamma} w_3}\right) \right] \right\} \Big|_{w_3=\frac{1}{\gamma_{th}}}.$$

### 3.5. Нумерички и симулацијски резултати (1)

- Перформансите на  $2 \times 2 \times 1$  и  $2 \times 2 \times 2$  се подобри од  $1 \times 1 \times 1$  за  $16\text{dB}$  и  $25\text{dB}$  на OP од  $10^{-3}$  и е полоши од  $2 \times 1$  и  $2 \times 2$  од  $0\text{dB}$  до  $4\text{dB}$ .
- За  $2 \times 2 \times 1$  МИМО каналот има добивка од диверзитет од  $16\text{dB}$  на BEP од  $10^{-4}$  во споредба со  $1 \times 1 \times 1$  системот, а за  $2 \times 2 \times 2$  МИМО каналот имаме добивка од  $23\text{dB}$  на BEP of  $10^{-4}$ .



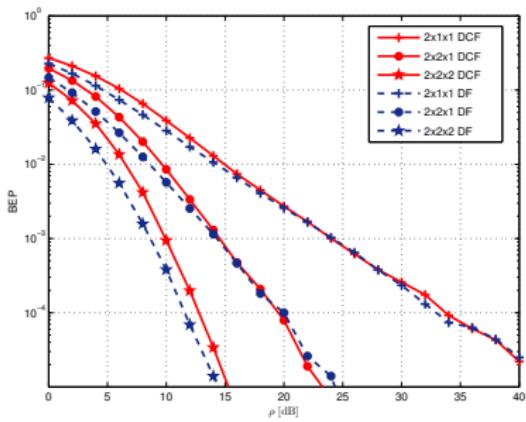
Теориските и симулацијските резултати за OP за  $N \times N \times N$  DCF систем ( $\gamma_{th} = 5\text{dB}$ )



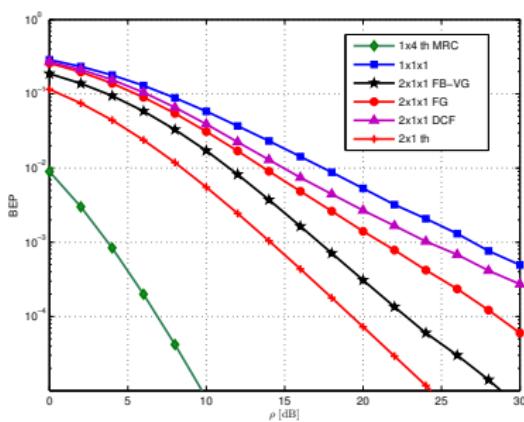
BEP за DCF систем со две антени добиени со симулација

### 3.6. Нумерички и симулацијски резултати (2)

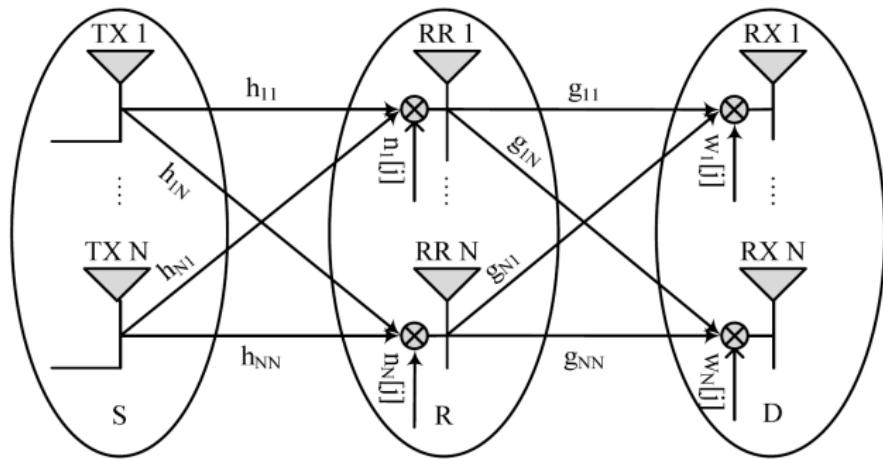
- DF има занемарливо подобри перформанси од DCF. Разликата се зголемува со зголемување на бројот на антени и среднот SNR се намалува.
- FB-VG има подобри перформанси од FG и DCF, а DCF покажува најлоши BEP перформанси.



Споредба на BEP за DCF и DF системите



Споредба на 2x1x1 DCF, FB-VG, и FG системи



- OSTBC кодовите се означуваат со три цифри,  $NKL$ . Се разгледуваат две системски конфигурации  $Nx1xN$  и  $NxNxN$ .

- Приемниот сигнал во една антена во релето е:

$$\mathbf{Y} = \sqrt{E_s} \mathbf{C} \mathbf{H} + \mathbf{N}, \quad \mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_L]^T, \quad \mathbf{H} = [h_1, h_2, \dots, h_N]^T, \quad \mathbf{N} = [n_1, n_2, \dots, n_L]^T$$

- Раздвоените (**DCF**) симболи во една антена во релето се: ▶ 8.23

$$\tilde{x}_k = \sqrt{E_s} \|\mathbf{H}\|_F^2 x_k + \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad \|\mathbf{H}\|_F^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |h_{ij}|^2 \quad A = \sqrt{E_R / (E_t \|\mathbf{H}\|_F^4 + \|\mathbf{H}\|_F^2 N_0)}$$

$$var(\xi_k) = \|\mathbf{H}\|_F^2 N_0, \quad A \approx 1 / (\sqrt{b} \|\mathbf{H}\|_F^2), \quad b = c = L / (K N) \text{ за } Nx1xN \text{ и } b = 1 \text{ за } NxNxN$$



## 4.2. Веројатност на грешка (1)

- Развоениот симбол во дестинацијата  $D$  е:

$$\hat{x}_k = A \|\mathbf{G}\|_F^2 \tilde{x}_k + \mu_k = \sqrt{E_s} A \|\mathbf{H}\|_F^2 \|\mathbf{G}\|_F^2 x_k + A \|\mathbf{G}\|_F^2 \xi_k + \mu_k, \quad k = 1, 2, \dots, K$$
$$var(\mu_k) = \|\mathbf{G}\|_F^2 N_0, \quad \|\mathbf{G}\|_F^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |g_{ij}|^2$$

- Моменталниот SNR за двета системи е: ▶ 8.23

$$\gamma = \frac{P_S}{P_N} = \frac{E_s}{N_0} \cdot \frac{A^2 \|\mathbf{G}\|_F^2 \|\mathbf{H}\|_F^4}{A^2 \|\mathbf{G}\|_F^2 \|\mathbf{H}\|_F^2 + 1},$$

$$W = 1/\Gamma = 1/\left(\bar{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2\right) + b/\left(\bar{\gamma} \cdot \|\mathbf{G}\|_F^2\right) = U + V, \quad \bar{\gamma} = E_s/N_0 = c \cdot \rho$$

- $U$  и  $V$  се независни и MGF-от е производ од поединечните MGF-и:

$$f_U(x) = \frac{x^{-m-1}}{\bar{\gamma}^m \cdot \Gamma(m)} e^{-\frac{1}{x \bar{\gamma}}}, \quad f_V(x) = \frac{b^m x^{-m-1}}{\bar{\gamma}^m \cdot \Gamma(m)} e^{-\frac{b}{x \bar{\gamma}}}, \quad M_W(-s) = \frac{4 \cdot \sqrt{b^m}}{\Gamma^2(m)} \cdot \left(\frac{s}{\bar{\gamma}}\right)^m \cdot K_m\left(2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}}\right) \cdot K_m\left(2\sqrt{\frac{b s}{\bar{\gamma}}}\right).$$

- CDF-от на случајната променлива  $\Gamma$  е:

$$F_\Gamma(\gamma) = 1 - \mathcal{L}^{-1}[M_w(-s)/s]|_{w=1/\gamma} = 1 - d^{m-1} L(w)/d w^{m-1}|_{w=1/\gamma}$$

$$L(w) = \mathcal{L}^{-1}[M_w(-s)/s^m], \quad L(w) = \frac{2}{w} \frac{b^{m/2}}{\Gamma^2(m)} \frac{e^{-\frac{b+1}{\bar{\gamma} w}}}{\bar{\gamma}^m} K_m\left(\frac{2\sqrt{b}}{\bar{\gamma} w}\right)$$

- Го апроксимирааме  $K_m$  за мали вредности на променливата  $z \rightarrow 0$ :

$$K_m(z) \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{z}\right)^m \cdot \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \cdot \frac{(m-k-1)!}{k!} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

## 4.3. Веројатност на грешка (2)

- Апроксимација на CDF:

▶ 4.7

▶ 8.20

$$F_{\Gamma_a} \approx 1 + \frac{1}{\Gamma(m)} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m+k+n} \Gamma(m-k) \cdot (2k+n-m+1)_{m-n-1}}{\Gamma(m-n)} \cdot \frac{(b+1)^n \cdot b^k}{\Gamma(k+1) \Gamma(n+1)} \cdot \left(\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right)^{n+2k} \cdot \exp\left(-\frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}}\right)$$

- Со  $M_{\Gamma_a}(-s) = s \cdot \mathcal{L}[F_{\Gamma_a}(\gamma)]$  се добива апроксимацијата на MFG-от:

$$M_{\Gamma_a}(-s) \approx 1 + \frac{1}{\Gamma(m)} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-1)^{k+m+n} \Gamma(m-k) \Gamma(n+2k+1)}{\Gamma(k+1) \Gamma(n+1) \Gamma(m-n)} \cdot \frac{(2k+n-m+1)_{m-n-1} \cdot (b+1)^n \cdot b^k \cdot s \cdot \bar{\gamma}}{(s \cdot \bar{\gamma} + b+1)^{n+2k+1}}$$

- Со користење на  $P_e = \int_0^\infty F_\Gamma\left(\frac{x^2}{d}\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (2\pi)^{-0.5} dx$  се добива средната веројатност на грешка :

▶ 4.6

$$P_{ea} \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{d \bar{\gamma}}}{2 \sqrt{\pi} \Gamma(m)} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m+k+n} 2^{n+2k} \Gamma(m-k)}{\Gamma(m-n)} \cdot \frac{\Gamma(n+2k+\frac{1}{2}) (2k+n-m+1)_{m-n-1} (b+1)^n b^k}{\Gamma(k+1) \Gamma(n+1) (d \bar{\gamma} + 2b + 2)^{n+2k+\frac{1}{2}}}.$$

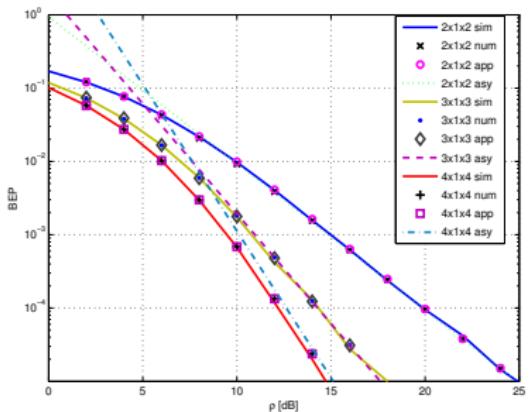
- Асимптотска апроксимација на EP за голем SNR:

$$P_{eas} \approx \frac{1}{2 \cdot d^m \cdot m!} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{d^m F_\Gamma(\gamma)}{d \gamma^m} \cdot \prod_{i=1}^m (2 \cdot i - 1) \approx \frac{\Gamma(2m+1)}{2^{m+1} \Gamma^2(m+1) d^m} \cdot \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{d^{m-1} f_{\Gamma_a}(\gamma)}{d \gamma^{m-1}}$$

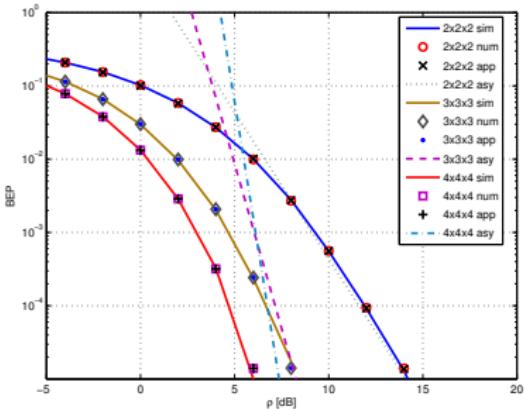
$$P_{eas} = \frac{\Gamma(2m+1)}{2^{m+1} \Gamma^2(m+1) d^m} \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} s^m M_{\Gamma_a}(-s) = \boxed{\frac{\Gamma(2m+1) \cdot (b^m + 1)}{2^{m+1} \cdot \Gamma^2(m+1) \cdot d^m \cdot \bar{\gamma}^m}}$$

- Изразите можат да се користат за  $N \times 1 \times N$  систем со користење на замените:  $m = N$  и  $b = c$  и за  $N \times N \times N$  систем со користење на замените:  $m = N^2$  и  $b = 1$ .

## 4.4. Нумерички и симулацијски резултати (1)



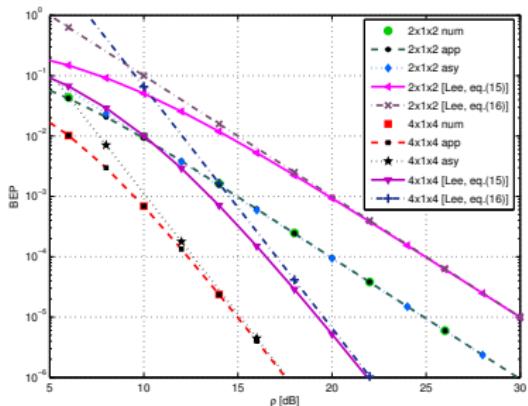
ВЕР за МИМО  $2 \times 1 \times 2 / 3 \times 1 \times 3 / 4 \times 1 \times 4$  AF  
релејни канали со 222/334/434 OSTBC.



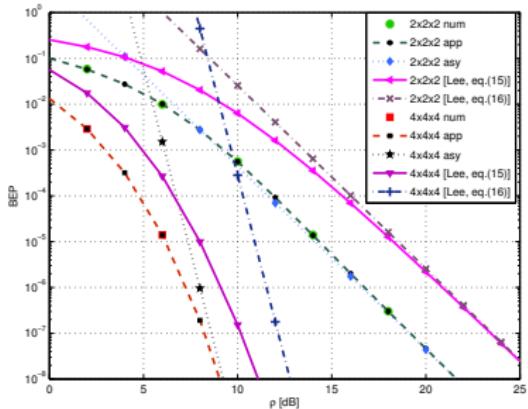
ВЕР за МИМО  $2 \times 2 \times 2 / 3 \times 3 \times 3 / 4 \times 4 \times 4$  AF  
релејни канали со 222/334/434 OSTBC

- ВЕР за  $N \times 1 \times N$  и  $N \times N \times N$  системите за  $N=2,3,4$  со Аламути кодирање, 334 OSTBC и 434 OSTBC
- Резултатите се добиени со помош на симулација, со изразот за апраксимација на ВЕР, со изразот за асимптотска апраксимација на ВЕР и резултатите добиени со нумеричка интеграција на познати MGF-и од литературата.

## 4.5. Нумерички и симулацииски резултати (2)



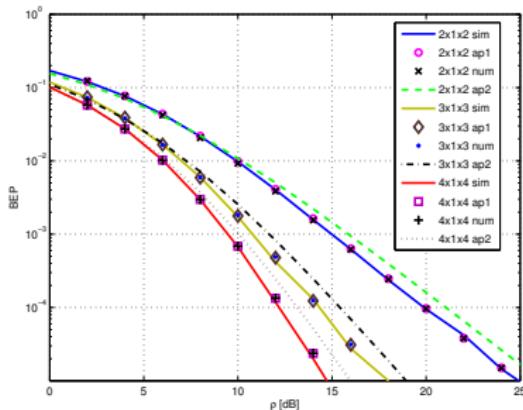
Споредба на ВЕР априксимициите за  
МИМО 2x1x2 и 4x1x4 AF RC со горните  
граници од литературата.



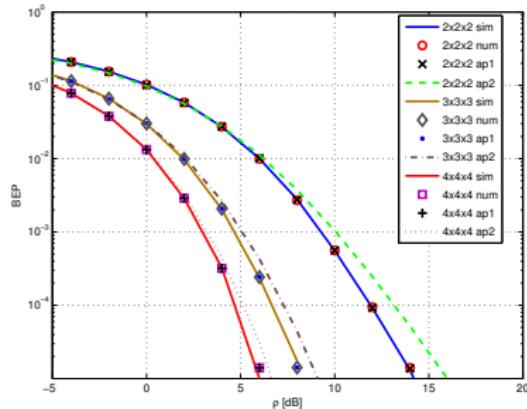
Споредба на ВЕР априксимициите на  
МИМО 2x2x2 и 4x4x4 AF RC со  
горните граници од литературата.

- За 2x1x2 систем (лево) и ВЕР од  $10^{-4}$  резултатите добиени со априксимициите се поточни од горните граници дадени во литературата за приближно 5dB.
- За 2x2x2 систем и ВЕР од  $10^{-4}$  априксимициите се поточни од горните граници во литературата за приближно 4dB.

## 4.6. Груба ЕР апроксимација



БЕР за  $N \times 1 \times N$  МИМО AF RC со BPSK и 222/334/434 OSTBC.



БЕР за  $N \times N \times N$  МИМО AF RC со BPSK и 222/334/434 OSTBC.

- За  $k = 0$  ► 4.3 се добива грубата апроксимација за средната ЕР:

$$P_{el} \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{d \bar{\gamma}}}{2 \sqrt{\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{m-1} \frac{2^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) (b+1)^n}{\Gamma(n+1) (d \bar{\gamma} + 2b + 2)^{n + \frac{1}{2}}}.$$

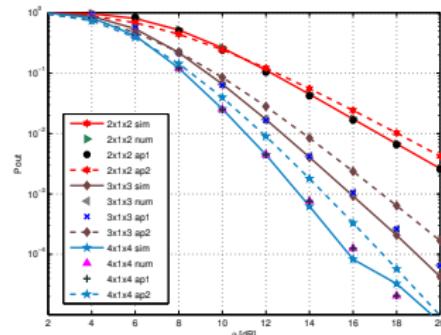
- Споредбата покажува блиска усогласеност на прецизната апроксимација, точните резултати и грубата апроксимација

## 4.7. Веројатност на испад

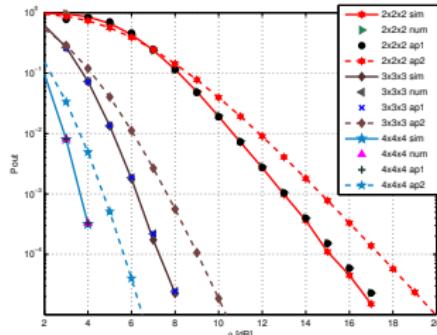
- Веројатност на испад е:  $P_{out} = P(\gamma < \gamma_{th}) \approx F_{\Gamma_a}(\gamma)|_{\gamma=\gamma_{th}}$

- Ако во  $F_{\Gamma_a}(\gamma)$  ▶ 4.3 земеме  $k = 0$  се добива грубата ОР априксимација:

$$P_{out} \approx 1 - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(b+1)^n}{n!} \cdot \left( \frac{\gamma_{th}}{\bar{\gamma}} \right)^n \cdot \exp \left( -\frac{(b+1)\gamma_{th}}{\bar{\gamma}} \right)$$



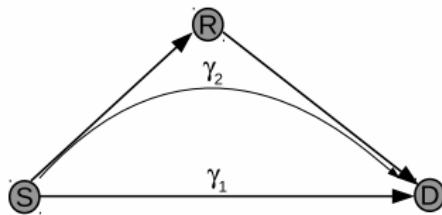
ОР за AF МИМО релеен канал со реле со една антена ( $\gamma_{th} = 5 \text{ dB}$ )



ОР за AF МИМО релеен канал со реле со повеќе антени ( $\gamma_{th} = 5 \text{ dB}$ )

- Двете споредби покажуваат преклопување на резултатите добиени со прецизната априксимација, точните резултати добиени со нумеричка инверзија на Лапласовата трансформација и резултатите добиени со Монте Карло симулации. Грубата априксимација е исто така добра.

## 4.8. Вклучување на директна патека



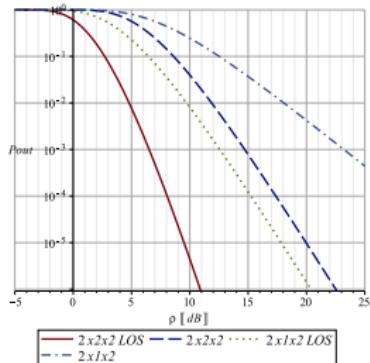
- Едноставен израз за PDF за МИМО RC без директна патека (DP. Ако во  $F_{\Gamma_a}$  се земе  $k = 0$  се добива грубата апроксимација на CDF, а оттаму и грубата апроксимација за PDF: [▶ 6.1](#) [▶ 8.26](#))

$$F_{\Gamma_1}(\gamma) \approx 1 - \frac{\Gamma(m, \frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}})}{\Gamma(m)} = \frac{\gamma \left( m, \frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}} \right)}{\Gamma(m)} \Rightarrow f(\gamma) = \frac{1}{\theta^m \cdot \Gamma(m)} \gamma^{m-1} e^{-\frac{\gamma}{\theta}} \quad \text{каде } \theta = \frac{\bar{\gamma}}{b+1}$$

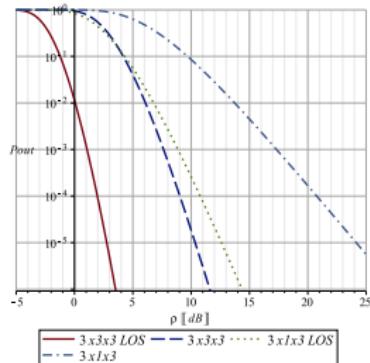
- PDF на односот сигнал-шум на AF МИМО RC со директна патека:  
 $f_{\Gamma_1} := \frac{1}{\bar{\gamma}^m \cdot \Gamma(m)} \gamma^{m-1} e^{-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}}, \quad f_{\Gamma_2} := \frac{(b+1)^m}{\bar{\gamma}^m \cdot \Gamma(m)} \gamma^{m-1} e^{-\frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}}}, \quad \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$
- Во општ случај PDF-от од сумата на 2 Гама RV е: [▶ 4.9](#) [▶ 6.3](#)

$$f_{\Gamma}(\gamma) = \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left( \frac{b}{b+1} \right)^k \cdot \frac{\gamma^{2m+k-1} (b+1)^{2m+k}}{\Gamma(2m+k) \cdot \bar{\gamma}^{2m+k}} \cdot e^{-\frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}}} \quad \text{▶ 6.5}$$

## 4.9. ОР на AF МИМО RC со директна патека



ОР за  $2 \times 2 \times 2 / 2 \times 1 \times 2$  со 222 OSTBC RC со и  
без DP за  $\gamma_{th} = 5 \text{ dB}$

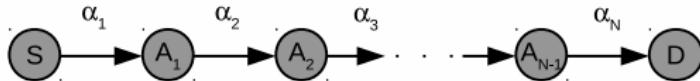


ОР за  $3 \times 3 \times 3 / 3 \times 1 \times 3$  334 OSTBC систем со  
и без DP за  $\gamma_{th} = 5 \text{ dB}$

- Доколку се употреби PDF-от [▶ 4.8](#) за сума од 2 Гама RV: [▶ 6.3](#)

$$P_{out} = 1 - \int_{\gamma_{th}}^{\infty} f(\gamma) d\gamma = 1 - \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \frac{\Gamma(2m+k, \frac{\gamma_{th}(b+1)}{b})}{\Gamma(2m+k)}$$

- За  $2 \times 2 \times 2$  системот за  $\rho = 10 \text{ dB}$  ОР на системот без DP е  $4 \cdot 10^{-2}$ , а ОР на системот со DP е  $4 \cdot 10^{-6}$ . Системите со DP имаат поголема добивка на диверзитет. Разликата во добивка од диверзитет се намалува со зголемување на бројот на антени.

Модел на релеен канал со  $N$ -делници

- Секоја делница е предмет на независен Рейлиев, Накагами, Рајсов и Веибул фединг:

$$p_{ray}(\gamma) = \frac{1}{\bar{\gamma}} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right), \quad p_{nak}(\gamma) = \frac{m^m \cdot \gamma^{m-1}}{\bar{\gamma}^m \cdot \Gamma(m)} \cdot \exp\left(-\frac{m \cdot \gamma}{\bar{\gamma}}\right)$$

$$p_{ric}(\gamma) = \frac{(1+K)}{\bar{\gamma}} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}} - K\right) \cdot I_0\left(2\sqrt{\frac{K \cdot (1+K)\gamma}{\bar{\gamma}}}\right)$$

$$p_{wei}(\gamma) = \frac{c}{2} \cdot \left(\frac{\Gamma(1+\frac{2}{c})}{\bar{\gamma}}\right)^{\frac{c}{2}} \cdot \gamma^{\frac{c}{2}-1} \cdot \exp\left(-\left(\frac{\gamma}{\bar{\gamma}} \Gamma(1+\frac{2}{c})\right)^{\frac{c}{2}}\right)$$

- Сигналот на влезот од  $n$ -то реле е:  $r_n(t) = A_{n-1} \cdot \alpha_n \cdot \sqrt{E_n} \cdot r_{n-1}(t) + w_n(t)$

- Крај-крај моменталниот SNR е:  $P_S = (A_1^2 A_2^2 \cdots A_{N-1}^2) \cdot (E_1 \alpha_1^2 E_2 \alpha_2^2 \cdots E_N \alpha_N^2)$

$$P_N = (A_1^2 A_2^2 \cdots A_{N-1}^2) \cdot (E_2 \alpha_2^2 E_3 \alpha_3^2 \cdots E_N \alpha_N^2) \cdot N_{01} + (A_2^2 \cdots A_{N-1}^2) \cdot (E_3 \alpha_3^2 E_4 \alpha_4^2 \cdots E_N \alpha_N^2) \cdot N_{02} + \cdots + N_{0N}.$$

$$\gamma_{eq}^{-1} = \sum_{n=1}^N \left( \prod_{t=1}^{n-1} A_t^2 N_{0t} \prod_{t=1}^n \gamma_t \right)^{-1}.$$

## 5.2. OP во RC со повеќе делници

- Веројатноста за испад се преметува преку инверзna лапласова трансформација:

$$P_{out} = P(\gamma_{eq} < \gamma_{th}) = 1 - P\left(\frac{1}{\gamma_{eq}} < \frac{1}{\gamma_{th}}\right) = 1 - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{M_{1/\gamma_{eq}}(-s)}{s}\right)|_{1/\gamma_{th}}$$

- За инверзија на Лапласовата трансформација се користи Ојлеровата нумеричка техника:

$$P\left(\frac{1}{\gamma_{eq}} < \frac{1}{\gamma_{th}}\right) = \frac{2^{-k} e^{\frac{A}{2}}}{1/\gamma_{th}} \cdot \sum_{k=0}^K \binom{K}{k} \sum_{n=0}^{N+k} \frac{(-1)^n}{\alpha_N} \cdot \operatorname{Re}\left(\frac{M_{1/\gamma}\left(-\frac{A+2\pi j n}{2/\gamma_{th}}\right)}{\frac{A+2\pi j n}{2/\gamma_{th}}}\right) + E(A, K, N),$$

$$E(A, K, N) = \frac{e^{-A}}{1-e^{-A}} + \frac{2^{-k} e^{\frac{A}{2}}}{1/\gamma_{th}} \sum_{k=0}^K (-1)^{N+k+1} \binom{K}{k} \operatorname{Re}\left(\frac{M_{1/\gamma}\left(-\frac{A+2\pi j(N+k+1)}{2/\gamma_{th}}\right)}{\frac{A+2\pi j(N+k+1)}{2/\gamma_{th}}}\right),$$

- За Накагами и Рејлиев фединг ( $m_n = 1$ ):

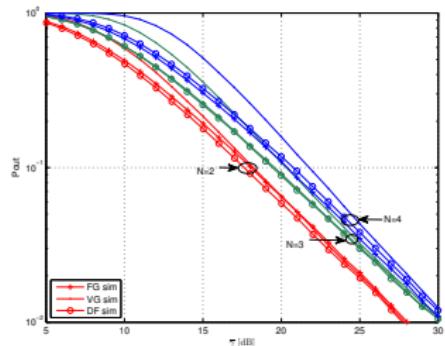
$$M_{1/\gamma_n}(-s) = \frac{2}{\Gamma(m)} \cdot \left(\frac{m_n \cdot s}{\bar{\gamma}_n}\right) \cdot K_{m_n}\left(2 \cdot \sqrt{\frac{m_n s}{\bar{\gamma}_n}}\right).$$

Кога се користи VG, MGF-от на  $1/\gamma_{eq}$  е производ на MGF-те на  $1/\gamma_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$

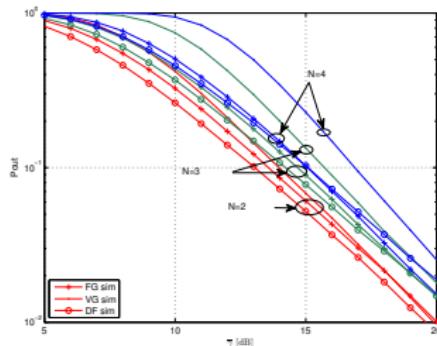
- За систем со две делници ( $N = 2$ ) во кој релето користи фиксно засилување (полу-слепо реле) во случај на Рејлиев фединг наместо изразот со инверзna лапласова се користи:

$$P_{out} = 1 - 2 \cdot \sqrt{\frac{C \cdot \gamma_{th}}{\bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma}_2}} \exp\left(-\frac{\gamma_{th}}{\bar{\gamma}_1}\right) \cdot K_1\left(2 \sqrt{\frac{C \cdot \gamma_{th}}{\bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma}_2}}\right).$$

## 5.3. Нумерички и симулацијски резултати (1)



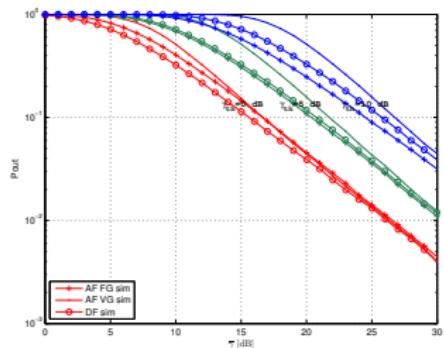
OP за повеќе-делничен RC за  $N = 2, 3$  и 4 во Рејлиев фединг за  $\gamma_{th} = 5 \text{ dB}$



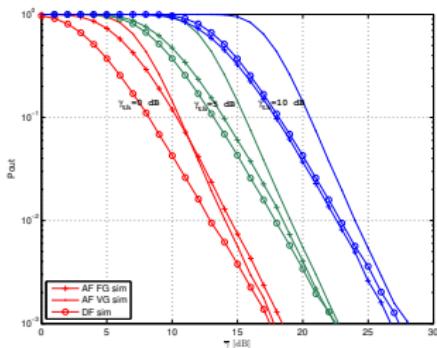
OP за релеен канал за  $N=2, 3$  и 4 во Вејбул фединг кога  $\gamma_{th} = 5 \text{ dB}$

- За мал до среден SNR, AF-FG има помала OP од AF-VG, а за среден до голем SNR AF-VG има помала OP од AF-FG системот.,.
- Со зголемување на бројот на делници, AF-FG имаат помала OP од AF-VG за произволен SNR.

## 5.4. Нумерички и симулацијски резултати (2)



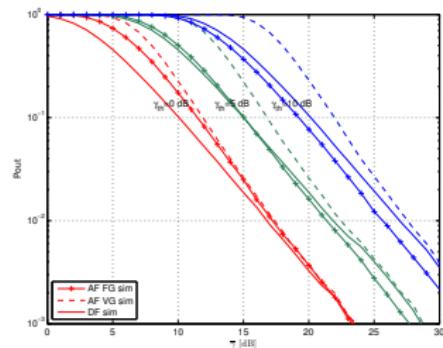
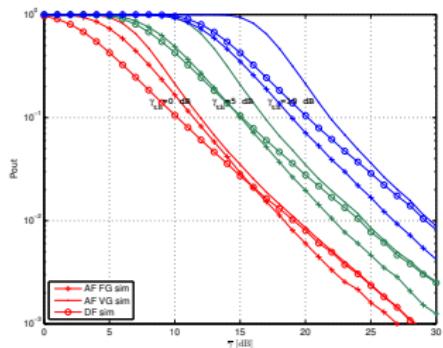
ОР за 4-делничен систем во Рейлиев фединг за  $\gamma_{th} = 0, 5, \text{ и } 10 \text{ dB}$



ОР за 4 делничен систем во Накагами фединг каде  $\gamma_{th} = 0, 5, 10 \text{ dB}$ , и  $m = 2.3$

- За другите типови на фединг околини се добиваат слични резултати.
- На слика десно се претставени резултатите за  $N = 4$  во случај кога сите делници се под влијание на Накагами фединг.

## 5.5. Нумерички и симулацијски резултати (3)



На слика лево се презентирани резултатите за Рајсов фединг. За  $N = 4$  во Рајсов фединг, AF-FG имаат подобри перформанси од AF-VG за произволен SNR без оглед на  $\gamma_{th}$ . Во одредени случаи може да се забележи дека како бројот на делници се зголемува системите со AF-VG покажуваат занемарливо подобри перформанси и од DF системите. Во анализата ефектот на заситување на релите со фиксно засилување не е земен во предвид.

## 6.1. МИМО RC од информациско-теоретски аспект

- Капацитетот на AF RC со една антена по јазол е:

$$C = \frac{1}{2} \log(1 + \gamma) = \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{\gamma_{32} \cdot \gamma_{21}}{\gamma_{32} + \gamma_{21} + 1} \right)$$

- Се покажува дека за  $b = 1$ :  $\gamma \approx \frac{\gamma_{31} \cdot \gamma_{32}}{\gamma_{31} + \gamma_{32}} = \frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T} \cdot \frac{\|H\|_F^2 \cdot \|G\|_F^2}{\|H\|_F^2 + \|G\|_F^2}$

- AF МИМО RC со OSTBC може да го представиме со еквивалентен точка-точка МИМО со ЕС: ▶ 6.3

$$C_{AF} = E_H \left\{ \frac{K}{L} \cdot \log_2 (1 + \gamma) \right\} = E_H \left\{ \frac{K}{L} \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{\gamma_{32} \cdot \gamma_{21}}{\gamma_{32} + \gamma_{21} + 1} \right) \right\} \approx (*)$$

$$\approx E_H \left\{ \frac{K}{L} \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{\gamma_{32} \cdot \gamma_{21}}{\gamma_{32} + \gamma_{21}} \right) \right\} = E_H \left\{ \frac{K}{L} \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T} \cdot \frac{\|H\|_F^2 \cdot \|G\|_F^2}{\|H\|_F^2 + \|G\|_F^2} \right) \right\} (**)$$

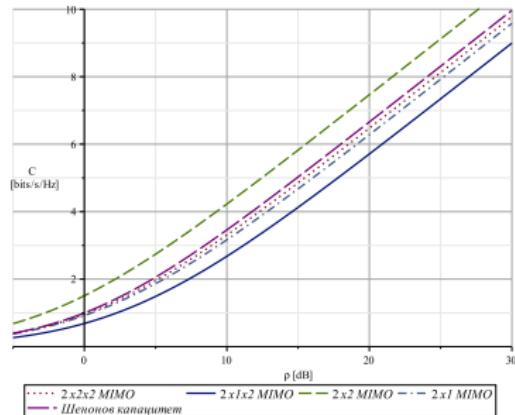
- Доколку во (\*) се замени ▶ 4.8 едноставниот израз за PDF-от на крај-крај SNR-от, ЕС на каскадниот МИМО RC е:

$$C_{AF} \approx \frac{K}{L \cdot \Gamma(m) \cdot \ln(2)} \cdot G_{3,2}^{1,3} \left( \frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T \cdot (b+1)} \Big|_{1,0}^{1-m,1,1} \right) (\square)$$

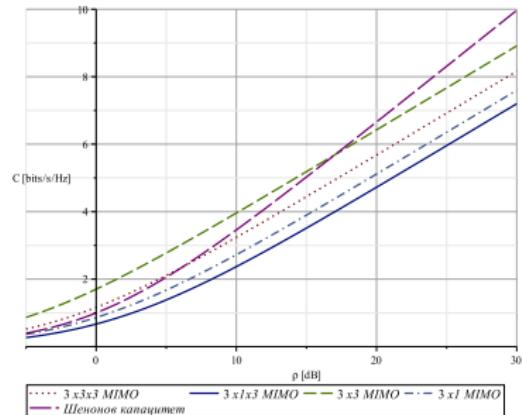
- $C_{AF}$  не може да биде поголем од капацитетот на точка-точка МИМО со OSTBC и затоа горната граница е:

$$C_{AF} \leq \frac{K}{L} \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T} \cdot \|H\|_F^2 \right) (\diamond), \text{ затоа што } \frac{\|H\|_F^2 \cdot \|G\|_F^2}{\|H\|_F^2 + \|G\|_F^2} < \|H\|_F^2$$

## 6.2. EC: Каскаден AF MIMO RC (2)



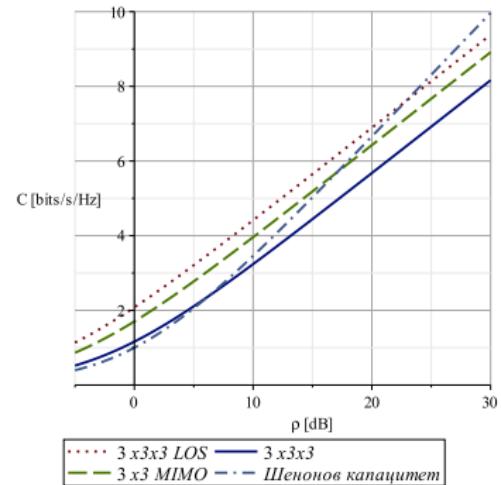
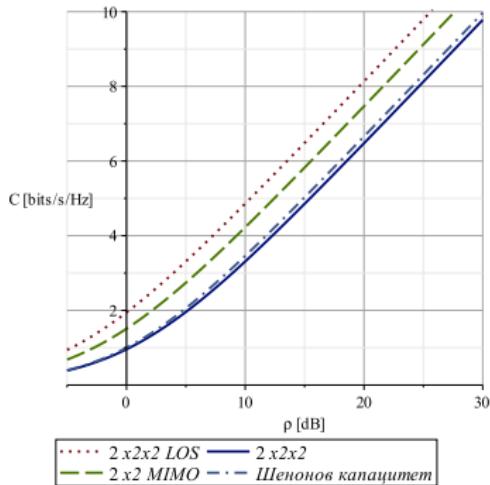
ЕС за  $2 \times 2 \times 2 / 2 \times 1 \times 2$  AF МИМО RC со  
222 OSTBC



ЕС на  $3 \times 3 \times 3 / 3 \times 1 \times 3$  AF МИМО RC со  
334 OSTBC

- На сликите е дадена споредбата на (□) со Шеноновиот капацитет и горната граница (◊).
- (□) не ја надминува горната граница (◊) и се приближува до неа со зголемување на бројот на антени. ЕС за  $N \times 1 \times N$  е занемарливо помал од ЕС на  $N \times 1$  и разликата се зголемува со зголемување на средниот SNR и намалување на бројот на антени.

## 6.3. EC: AF МИМО RC со директна патека



ЕС за  $2 \times 2 \times 2$  MIMO RC со и без DP

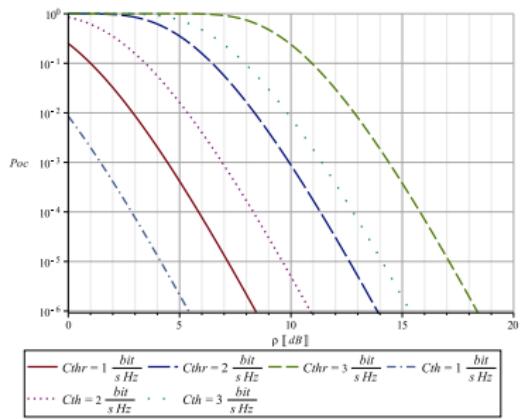
ЕС за  $3 \times 3 \times 3$  МИМО RC со и без DP

- Ако PDF-от на  $\gamma$  за системот со DP ▶ 4.8 се замени во  $(*)$  ▶ 6.1 :

$$C_{AF} = \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left( \frac{b}{b+1} \right)^k \cdot \int_0^{\infty} \frac{\gamma^{2m+k-1} (b+1)^{2m+k}}{\Gamma(2m+k) \cdot \bar{\gamma}^{2m+k}} \cdot e^{-\frac{(b+1) \cdot \gamma}{\bar{\gamma}}} \cdot \frac{K}{L} \cdot \log_2 (1 + \gamma) d\gamma$$

- Системите со DP го надминува ЕС на каскадните и точка-точка системите.  $2 \times 2 \times 2$  го надминува Шеноновиот  $C$ , а другите имаат помал  $C$  само за голем SNR. Со поголем бројот на антени пресечната точка оди во десно.

## 6.4. ОС: Каскаден AF МИМО RC



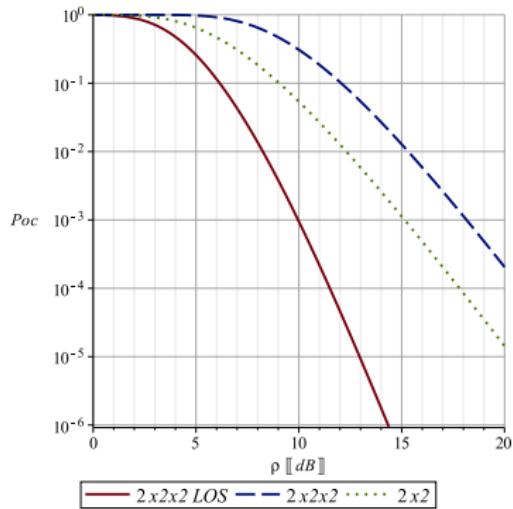
ОС за  $3 \times 3$  и  $3 \times 3 \times 3$  за фиксно  $C_{th}$

- Каскадниот RC има поголема ОС во споредба со точка-точка каналот. Разликата во перформанси се зголемува со намалување на  $C_{th}$  односно со зголемување на  $\rho$ .

-  $3 \times 3 \times 3$  има значително помала ОС од  $2 \times 2 \times 2$  (backup). За  $C_{th} = 1 \text{ b/s/Hz}$  и  $\rho = 5 \text{ dB}$  ОС за  $2 \times 2 \times 2$  системот изнесува 0,039, а за  $3 \times 3 \times 3$  изнесува  $4 \cdot 10^{-4}$ . Добивката од диверзитет на  $3 \times 3 \times 3$  е  $d = 9$ , а за  $2 \times 2 \times 2$   $d = 4$ .  $3 \times 3 \times 3$  има ист диверзитет со  $3 \times 3$ .

$$P_{oc} = 1 - \int_{C_{th}}^{\infty} f(C) \cdot dC = P_{oc} = 1 - \frac{1}{\Gamma(m)} \cdot \Gamma \left( m, \frac{\left( 2^{\frac{L \cdot C_{th}}{K}} - 1 \right)}{\rho \cdot L} \cdot N_T \cdot K \cdot (b + 1) \right)$$

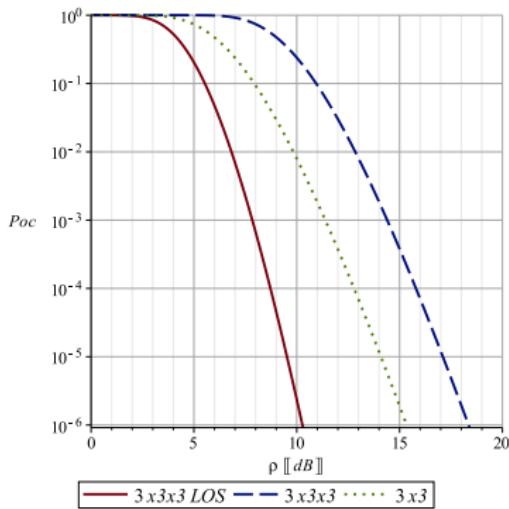
## 6.5. ОС: AF МИМО RC со директна патека



ОС за  $2 \times 2 \times 2$  со и без DP за  
 $C_{th} = 3 \text{bit/s/Hz}$

- За пресметка на ОС на системот со DP земаме дека  $\gamma$  го следи  
PDF-от ► 4.8

$$P_{oc} \approx 1 - \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \frac{1}{\Gamma(2m+k)} \Gamma\left(2m+k, \frac{\frac{L C_{th}}{K} - 1}{\bar{\gamma}} \cdot (b+1)\right)$$



ОС за  $3 \times 3 \times 3$  со и без DP за  
 $C_{th} = 3 \text{bit/s/Hz}$

1. Спроведена е информациско-теоретска анализа на кооперативните системи со 3 јазли. Со примена на сопствен **оригинален период**, изведени се познатите изрази за долната граница на  $C$  за Гаусов RC со DF реле, Гаусов RC со CF реле, Гаусов RC со RFD и Гаусов AF RC.
2. Извршена е анализа на перформансите на AF МИМО RC со две делници со две антени по јазол кој користи OSTBC и CSI во  $R$  и  $D$  во Рейлиев фединг. **Изведени се аналитички изрази за OP**, кои се потврдени преку нумерички анализи и симулации.
3. Изведени се **аналитички апроксимации на EP и OP** за AF МИМО RC со OSTBC и повеќе антени по јазол во услови на Рейлиев фединг.
  - Изведени се генерализирани изрази во затворена форма за **многу прецизна и асимптотска апроксимација на EP**.
  - Изведен е едноставен израз во затворена форма за **груба апроксимација на EP** кој добро ги следи резултатите од симулацијата, нумеричката интеграција и прецизните апроксимации.
  - Изведени се генерализирани изрази во затворена форма за **прецизна и груба апроксимација на OP**.

## 7.2. Заклучок: придонеси и резултати

Моделот на каналот е проширен со воведување на директна патека (DP).

- Изведен е едноставен *израз за PDF-от на крај-крај моменталниот SNR за AF MIMO RC со и без DP.*
- Изведени се *апроксимативни изрази за ОР за системот со DP во затворена форма.*

4. Анализирани се AF RC со повеќе делници за кои беа *одредени ОР за VG и FG за Рејлиев, Накагами, Рајсов и Вејбул фединг.*

5. Изведени се *изрази во затворена форма за ЕС и ОС за AF МИМО RC кој користи OSTBC со и без DP во услови на Рейлиев фединг.*

### Резултати :

I. Капацитетот на RC во општ случај не е познат и затоа анализирани се границите на капацитетот за DF, AF и CF релејните постапки.

II. *AF MIMO RC со 2 антени по јазол (2x1x1, 2x2x1 и 2x2x2):*

Предноста од користење на 2x1x1 системот е занемарлива, перформансите за 2x2x1 и 2x2x2 системите се подобри од 1x1x1 системот за 16dB и 25dB при веројатност на испад од  $10^{-3}$  односно од 16 до 23 dB на BEP од  $10^{-4}$  зависно од бројот на антени во D.

## 7.3. Заклучок: резултати

Добивката за  $2 \times 1 \times 1$  AF RC е  $3\text{dB}$  на BEP од  $10^{-4}$ . BEP на DCF системите е незначително поголема од BEP за DF RC ( $0\text{-}2\text{dB}$ ) и BEP на  $2 \times 1 \times 1$  системот е поголема од BEP на FG системот.

III. Анализирана е EP на AF MIMO RC со повеќе антени по јазол. Точноста на прецизната, асимптотската и грубата апроксимации е покажана со споредба со резултатите од симулација и нумеричка интеграција на MGF. Дополнително апроксимациите се **споредени со слични резултати добиени во литературата**.

- OP на AF MIMO RC со две делници: Покажано е дека прецизната и грубата апроксимација блиску и добро ги следат точните резултати.

IV. Анализа на OP на RC со повеќе делници кој користи VG и FG во Рейлиев, Накагами, Рајсов и Веибул фединг. FG системите со повеќе делници имаат подобри перформанси во споредба со системите со VG. Разликата се зголемува со **зголемување на бројот на делници**.

V. EC на AF MIMO RC се приближува до EC на точка-точка МИМО со **зголемување на бројот на антени**. AF MIMO RC има поголема ОС од точка-точка МИМО. **Зголемувањето на бројот на антени** резултира во зголемување на EC, намалување на ОС и зголемувањето на  $d$ . Системите со DP имаат **поголем EC и помал ОС** од каскадните и точка-точка МИМО системите и го надминуваат Шеноновиот капацитет.

# Бекап слајдови

- Генерирање на кодна книга:  $\forall j \in [1 : b]$ , случајно и независно се генерираат  $2^{nR}$  низи  $x_1^n(w_j)$ ,  $w_j \in [1 : 2^{nR}]$  и  $2^{nR}$  низи  $x_2^n(w_{j-1})$ ,  $w_{j-1} \in [1 : 2^{nR}]$ . Кодната книга е:

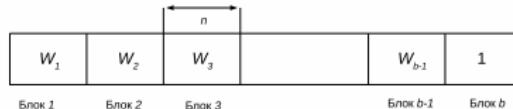
$$C_j = \{(x_1^n(w_j), x_2^n(w_{j-1})) : w_{j-1}, w_j \in [1 : 2^{nR}]\}, \quad j \in [1, ..b].$$

- Кодирање:  $w_j \in [1 : 2^{nR}]$ , кодерот во изворот ја испраќа низата  $x_1^n(w_j)$  од кодната книга  $C_j$ .
- Кодирање во релето: На крај од блокот  $j$ , релето ја наоѓа  $\tilde{w}_j$  така што  $(x_1^n(\tilde{w}_j), x_2^n(\tilde{w}_{j-1}), y_2^n(j)) \in A_\epsilon^{(n)}$ . Во блокот  $j+1$ , тоа ја испраќа низата  $x_2^n(\tilde{w}_j)$  од кодната книга  $C_{j+1}$ .

блок	1	2	3	...	$j$	...	$b$
$X_1$	$x_1(w_1)$	$x_1(w_2)$	$x_1(w_3)$	...	$x_1(w_j)$	...	1
$Y_2$	$\tilde{w}_1$	$\tilde{w}_2$	$\tilde{w}_3$	...	$\tilde{w}_j$	...	0
$X_2$	$x_2^n(1)$	$x_2(\tilde{w}_1)$	$x_2(\tilde{w}_2)$	...	$x_2(\tilde{w}_{j-1})$	...	$x_2(\tilde{w}_{b-1})$
$Y_3$	0	$\hat{w}_1$	$\hat{w}_2$	...	$\hat{w}_{j-1}$	...	$\hat{w}_{b-1}$

## 8.2. Кодирање со случајно складирање во кошнички (1)

- Во кодирањето со случајно складирање во кошнички, изворот и релето кооперативно го испраќаат индексот на кошничката  $S_j$  на пораката  $W_j$  (наместо да ја испраќаат самата порака) во блокот  $j + 1$  за да и помогнат на дестинацијата да ја реконструира пораката  $W_j$ .
- Се користат  $b$  преносни блокови, секој се состои од  $n$  испраќања. Низа од  $(b - 1)$  пораки  $W_j$ ,  $j \in [1 : b - 1]$ , при што секоја се избира независно и рамномерно од  $[1 : 2^{nR}]$ , се испраќа преку  $b$  блокови. Низа од кошнички е:  $B = \{S_1, S_2, \dots, S_{2^{nR_2}}\}$



Блок	1	2	...	$j$	$j + 1$	...	$b$
$X_1$	$x_1^n(w_1 1)$	$x_1^n(w_2 s_1)$	...	$x_1^n(w_j s_{j-1})$	$x_1^n(w_{j+1} s_j)$	...	$x_1^n(1 s_{b-1})$
$Y_2$	$w_i, s_1$	$w_2, s_2$	...	$w_j, s_j$	$w_{j+1}, s_{j+1}$	...	0
$X_2$	$x_2^n(1)$	$x_2^n(\tilde{s}_1)$	...	$x_2^n(\tilde{s}_{j-1})$	$x_2^n(\tilde{s}_j)$	...	$x_2^n(\tilde{s}_{b-1})$
$Y_3$	0	$\tilde{s}_1 w_1$	...	$\tilde{s}_{j-1} w_{j-1}$	$\tilde{s}_j w_j$	...	$\tilde{s}_{b-1} w_{b-1}$

- Кодна книга:

$$C_j = \{(x_1^n(w_j|s_{j-1}), x_2^n(s_{j-1})) : w_j \in [1 : 2^{nR}], s_{j-1} \in [1 : 2^{nR_2}]\}$$

## 8.3. Кодирање со случајно складирање во кошнички (2)

- Кодирање:  $w_j \in [1 : 2^{nR}]$  е пораката што треба да се испрати во блокот  $j$  и  $w_{j-1} \in B(s_{j-1})$ . Кодерот го испраќа  $x_1^n(w_j|s_{j-1})$  од кодната книга  $C_j$ .
- Кодирање во релето: На крајот од блокот  $j$ , знаејќи го  $s_{j-1}$  по приемот на  $y_2(j)$ ,  $R$  ја естимира пораката така што ја наоѓа единствената порака  $\tilde{w}_j$  за која  $(x_1^n(\tilde{w}_j|s_{j-1}), x_2^n(\tilde{s}_{j-1}), y_2^n(j)) \in A_\epsilon^{(n)}$ . Доколку  $\tilde{w}_j \in B(\tilde{s}_j)$ , во блокот  $j+1$ , релето ја испраќа низата  $x_2^n(\tilde{s}_j)$  од кодната книга  $C_{j+1}$ .
- Декодирање во дестинацијата: На крај од блокот  $j+1$  дестинацијата го наоѓа единствениот индекс  $\hat{s}_j$  таков што  $(x_2^n(\hat{s}_j), y_3^n(j+1)) \in A_\epsilon^{(n)}$ . Ако претпоставиме дека во претходниот блок  $j$  индексот на кошничката  $s_{j-1}$  бил успешно декодиран, дестинацијата ќе ја естимира единствената порака  $\hat{w}_j$  за која важи  $(x_1(\hat{w}_j|\hat{s}_{j-1}), x_2^n(\hat{s}_{j-1}), y_3^n(j)) \in A_\epsilon^{(n)}$  и  $\hat{w}_j \in B(\hat{s}_j)$ .

## 8.4. Модел на МИМО каналот со 2 антени

- Раздвоени симболи во  $R$  (Фробениусова норма  $\Delta_1 = \|H\|_F^2$ ):  
 $\tilde{x}_1 = h_{11}^* y_1 [1] - h_{21} y_1^* [2] = \sqrt{E_s} \Delta_1 x_1 + \xi_1$ ,  $\tilde{x}_2 = h_{21}^* y_1 [1] - h_{11} y_1^* [2] = \sqrt{E_s} \Delta_1 x_2 + \xi_2$
- За  $2 \times 1 \times 1$  приемните сигнали во  $D$  во симболните интервали 3 и 4:  
 $r_1 [3] = A_1 g_{11} \tilde{x}_1 + w_1 [3]$ ,  $r_1 [4] = A_1 g_{11} \tilde{x}_2 + w_1 [4]$ ,  $A_1 = \sqrt{E_R/E_I \Delta_1^2 + \Delta_1 N_0}$   
 $\eta_1 = h_{11}^* n_1 [1] + h_{21} n_1^* [2] + h_{12}^* n_2 [1] + h_{22} n_2^* [2]$ ,  $\eta_2 = h_{21}^* n_1 [1] - h_{11} n_1^* [2] + h_{22}^* n_2 [1] - h_{12} n_2^* [2]$ ,
- $k$  ( $k = 1, 2$  и  $3$ ) во  $g_k$ ,  $\Delta_k$  и  $\Lambda_k$  означуават  $2 \times 1 \times 1$ ,  $2 \times 2 \times 1$  и  $2 \times 2 \times 2$  системски конфигурации,
- За  $2 \times 2 \times 1$  и  $2 \times 2 \times 2$  раздвоените симболи во  $R$  во интервалите 3 и 4:  
 $\tilde{x}_1 = \sqrt{E_s} \Delta_2 x_1 + \eta_1$ ,  $\tilde{x}_2 = \sqrt{E_s} \Delta_2 x_2 + \eta_2$ ,  $\Delta_2 = \Delta_3 = |h_{11}|^2 + |h_{12}|^2 + |h_{21}|^2 + |h_{22}|^2$
- За  $2 \times 2 \times 1$  раздвоените симболи во  $D$ :  
 $\hat{x}_1 = A_2 \Lambda_2 \tilde{x}_1 + \zeta_1$ ,  $\hat{x}_2 = A_2 \Lambda_2 \tilde{x}_2 + \zeta_2$ ,  $A_2 = A_3 = \sqrt{E_R/E_I \cdot \Delta_2^2 + \Delta_2 N_0}$
- За  $2 \times 2 \times 2$  раздвоените симболи во  $D$ :  
 $\hat{x}_1 = A_3 \Lambda_3 \tilde{x}_1 + \mu_1$ ,  $\hat{x}_2 = A_3 \Lambda_3 \tilde{x}_2 + \mu_2$ ,  $\Lambda_3 = \|G\|_F^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 |g_{ij}|^2$

## 8.5. Кодирање во кохерентен каскаден RC

- Кодна книга:  
 $C_j = \{(x_1^n(w_j|w_{j-1}), x_2^n(w_{j-1})) : w_{j-1}, w_j \in [1 : 2^{nR}]\}, \quad j \in [1 : b]$
- Кодерот во изворот ја испраќа низата  $x_1(w_j|w_{j-1})$  од кодната книга  $C_j$ ,
- На крај од блокот  $j$ , **релето** наоѓа уникатна порака  $\tilde{w}_j$  така што  $(x_1^n(\tilde{w}_j|\tilde{w}_{j-1}), x_2^n(\tilde{w}_{j-1}), y_2^n(j)) \in A_\epsilon^{(n)}$ . Во блокот  $j+1$ , тоа го испраќа  $x_2^n(w_j)$  од кодната книга  $C_{j+1}$ .
- На крај од блокот  $j+1$ , **дестинацијата** наоѓа уникатна порака  $\hat{w}_j$  така што  $(x_2^n(\hat{w}_j), y_2^n(j+1)) \in A_\epsilon^{(n)}$ .

Блок	1	2	3	4	$b-1$	$b$
$X_1$	$x_1^n(w_1 1)$	$x_1^n(w_2 w_1)$	$x_1^n(w_3 w_2)$	...	$x_1^n(w_{b-1} w_{b-2})$	$x_1^n(w_b w_{b-1})$
$Y_2$	$\tilde{w}_1$	$\tilde{w}_2$	$\tilde{w}_3$	...	$\tilde{w}_{b-1}$	0
$X_2$	$x_2^n(1)$	$x_2^n(\tilde{w}_1)$	$x_2^n(\tilde{w}_2)$	...	$x_1^n(\tilde{w}_{b-2})$	$x_2^n(\tilde{w}_{b-1})$
$Y_3$	0	$\hat{w}_1$	$\hat{w}_2$		$\hat{w}_{b-2}$	$\hat{w}_{b-1}$

## 8.6. Формирање и раздвојување на OSTBC

- Кодни матрици:

$$\mathbf{C}_{222} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2^* & x_1^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{334} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2^* & x_1^* & 0 \\ x_3^* & 0 & -x_1^* \\ 0 & x_3^* & -x_2^* \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{434} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3/\sqrt{2} & x_3/\sqrt{2} \\ -x_2^* & x_1^* & x_3/\sqrt{2} & -x_3/\sqrt{2} \\ x_3/\sqrt{2} & x_3/\sqrt{2} & \frac{(-x_1-x_1^*+x_2-x_2^*)}{2} & \frac{(-x_2-x_2^*+x_1-x_1^*)}{2} \\ x_3^*/\sqrt{2} & -x_3^*/\sqrt{2} & \frac{(x_2+x_2^*+x_1-x_1^*)}{2} & \frac{-(x_1+x_1^*+x_2-x_2^*)}{2} \end{bmatrix}$$

- Раздвојување на OSTBC:

$$\tilde{\mathbf{X}}_{222}^T = [y_1 h_1^* + y_2^* h_2, \quad y_1 h_2^* - y_2^* h_1],$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_{334}^T = [y_1 h_1^* + y_2^* h_2 - y_3^* h_3, \quad y_1 h_2^* - y_2^* h_1 - y_4^* h_3, \quad y_1 h_3^* + y_3^* h_1 + y_4^* h_2]$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_{434} = \begin{bmatrix} y_1 h_1^* + y_2^* h_2 + \frac{(y_4-y_3)(h_3^*-h_4^*)}{2} - \frac{(y_3^*+y_4^*)(h_3+h_4)}{2} \\ y_1 h_2^* - y_2^* h_1 + \frac{(y_4+y_3)(h_3^*-h_4^*)}{2} + \frac{(y_4^*-y_3^*)(h_3+h_4)}{2} \\ \frac{(y_1+y_2) h_3^*}{\sqrt{2}} + \frac{(y_1-y_2) h_4^*}{\sqrt{2}} + \frac{(h_1+h_2) y_3^*}{\sqrt{2}} + \frac{(h_1-h_2) y_4^*}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

## 8.7. Раздвојување на 222 OSTBC за 2x1 систем (1)

- Сигнал и канал:  $\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2]$ ;  $\mathbf{H} = [h_{11} \quad h_{21}]$ ;
- Шумот е:  $\mathbf{N} = [n_1 \quad n_2]$        $\mathbf{N}_a = [n_1 \quad n_2^*]$
- Кодна матрица за 2x1

Аламути:  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2^* & x_1^* \end{bmatrix}$        $\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2^* \\ x_2 & x_1^* \end{bmatrix}$

- Еквивалентната виртуелна канална матрица:

$$\Omega = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21}^* \\ h_{21} & -h_{11}^* \end{bmatrix} \quad \Omega^H = \begin{bmatrix} h_{11}^* & h_{21}^* \\ h_{21} & -h_{11} \end{bmatrix}$$

- Приемниот сигнал во релето е:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} x_1 h_{11} + x_2 h_{21} + n_1 \\ -x_2^* h_{11} + x_1^* h_{21} + n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

каде индексот  $i$  на приемниот сигнал во релето  $y_i$  го означува симболниот интервал.

## 8.8. Раздвојување на 222 OSTBC за 2x1 систем (2)

- Модифицираната верзија е:

$$\mathbf{Y}_a = [ y_1 \ y_2^* ] = [ x_1 h_{11} + x_2 h_{21} + n_1; -x_2 h_{11}^* + x_1 h_{21}^* + n_2^* ]$$

- Раздвоениот сигнал во релето е:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Y}_a \cdot \Omega^H = [ y_1 \ y_2^* ] \cdot \begin{bmatrix} h_{11}^* & h_{21}^* \\ h_{21} & -h_{11} \end{bmatrix} = [ y_1 h_{11}^* + y_2^* h_{21}, y_1 h_{21}^* - y_2^* h_{11} ] =$$

$$= [ (h_{11}^2 + h_{21}^2) x_1 + n_2^* h_{21} + n_1 h_{11}^*, (h_{11}^2 + h_{21}^2) x_2 + n_1 h_{21}^* - n_2^* h_{11} ]$$

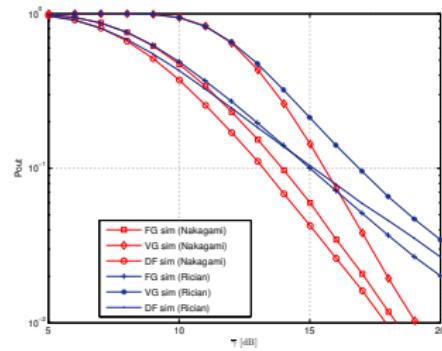
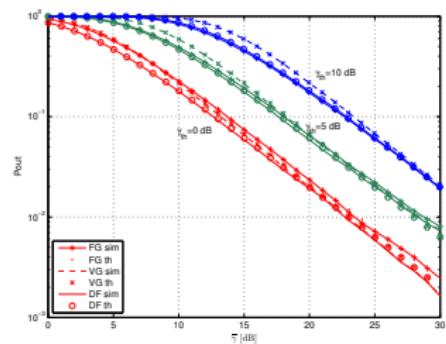
- Компонентата на шумот во раздвоениот сигнал е:

$$\Theta = \mathbf{N}_a \cdot \Omega^H = [ n_1 h_{11}^* + n_2^* h_{21} \ n_1 h_{21}^* - n_2^* h_{11} ]$$

Модифицираната верзија на приемниот сигнал во релето:

$$\mathbf{Y}_a \text{ е : } \mathbf{Y}_a = \mathbf{X} \cdot \Omega + \mathbf{N}_a = [ x_1 h_{11} + x_2 h_{21} + n_1; -x_2 h_{11}^* + x_1 h_{21}^* + n_2^* ]$$

## 8.9. Повеќеделничен RC: Дополнителни резултати

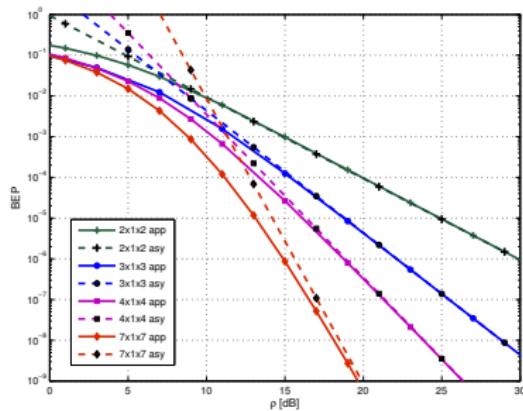


OP за дво-делничен RC во Рейлиев фединг со  $\gamma_{th} = 0, 5, \text{ и } 10 \text{ dB}$

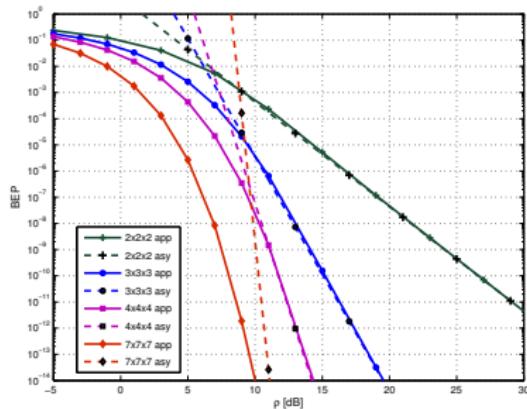
- За дво-делничнот систем се зема  $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2$ .
- На сликата десно се прикажани OP перформансите на 4-делничен систем во Накагами фединг со фединг параметар  $m = 2.2857$  и Рајсов фединг со соодветен Рајсов фактор  $K = 3$ . Очигледно е дека априксимациите се релативно успешни бидејќи OP за двета система се слични, особено за мали до средни вредности на средниот SNR.

OP за 4 делничен систем во Накагами и Рајсов фединг ( $\gamma_{th} = 5 \text{ dB}$ )

## 8.10. ВЕР за $N \times 1 \times N / N \times N \times N$ за $N=2,3,4,7$



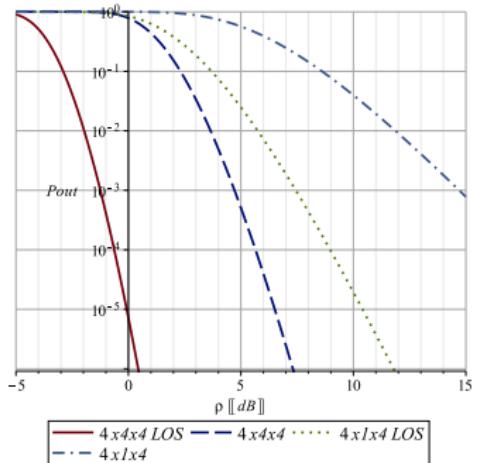
ВЕР за МИМО  
2x1x2/3x1x3/4x1x4/7x1x7 AF RC.



ВЕР за МИМО  
2x2x2/3x3x3/4x4x4/7x7x7 AF RC.

- ВЕР за  $N \times 1 \times N$  и  $N \times N \times N$  канал кој користи до 7 антени за  $E_s = P_T / N$  т.е.  $c = 1/N$ .
- Полните линии се за апроксимацијата на ВЕР, а испрекинатите линии се за асимптомотска апроксимација на ВЕР.

## 8.11. OP на $4 \times 4 \times 4$ систем со директна патека



OP за  $4 \times 4 \times 4 / 4 \times 1 \times 4$  систем со и без  
директна патека  $\gamma_{th} = 5 dB$

## 8.12. МИМО релеен канал од информациско-теоретски аспект

▶ 0.0

- Ако влезот и излезот на DMRC се  $X$  и  $Y$ , каналниот капацитет е:

$$C = \max_{p(x)} \{I(X; Y)\}, \quad Y = H \cdot X + N, \text{ каде } X \in N_T \times 1, Y \in N_R \times 1 \text{ и } H \in N_R \times N_T, N \in N_R \times 1$$

Во средина со многу расејување без директна линија на видливост, каналните коефициенти  $|h_{ij}|$  се распределени согласно Рейлиевата PDF.

- Ергодичниот капацитет на SISO ( $N_T = N_R = 1$ ) е:

$$C_H = E_H \left\{ \max_{p(x): P \leq P_T} I(X; Y) \right\}$$

- Капацитетот на точка-точка SISO во Рейлиев фединг е:

$$C = E_H \left\{ \log_2 \left( 1 + \rho \cdot |h_{11}|^2 \right) \right\} = \int_0^\infty \frac{1}{\gamma} \cdot \exp \left( -\frac{\gamma}{\bar{\gamma}} \right) \cdot \log_2 (1 + \gamma) d\gamma = \frac{1}{\ln(2)} \cdot e^{\frac{1}{\bar{\gamma}}} \cdot E_1 \left( \frac{1}{\bar{\gamma}} \right)$$

- Моменталниот капацитет на МИМО каналот е:

$$C = \log_2 \left[ \det \left( I_{N_R} + \frac{P_T}{N_T \cdot N_0} \cdot H \cdot H^H \right) \right] = \sum_{i=1}^r \log_2 \left( 1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \sigma_i^2 \right) = \sum_{i=1}^r \log_2 \left( 1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \lambda_i \right)$$

каде  $\sigma_i$  се сингуларни вредности, а  $\lambda_i$  се сопствени вредности и  $r = \text{rank}(H) \leq \min(N_T, N_R)$ .

- ЕС на МИМО канал со ограничување на моќност  $P_T$  е:

$$C = E_H \left\{ \max_{p(x): \text{tr}(K_x) \leq P_T} I(X; Y) \right\} = E_H \left\{ \log_2 \left[ \det \left( I_{N_R} + \frac{\rho}{N_T} \cdot H \cdot H^H \right) \right] \right\}$$

- Доколку изразот за МИМО се упрости со користење на теоремата за детерминанти на Силвестер се добива изразот за капацитет на SIMO:

$$\det(I_{AB} + A \cdot B) = \det(I_{BA} + B \cdot A) \Rightarrow C = \log_2 \left( 1 + \frac{E_s}{N_0} \cdot \|H\|_F^2 \right) = \log_2 (1 + \bar{\gamma} \cdot \|H\|_F^2)$$



## 8.13. EC на точка-точка МИМО канал

- Горната граница на ергодичниот капацитет за МИМО е:

$$C \leq E_H \left\{ N_T \cdot \log_2 \left[ 1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2 \right] \right\} = \frac{N_T}{\Gamma(m) \ln(2)} \cdot G_{3,2}^{1,3} \left( \frac{\rho}{N_T} \Big|_{1,0}^{1-m,1,1} \right)$$

каде  $G_{3,2}^{1,3}$  е Мејер Г функција.

- За голем SNR:

$$C \leq \frac{N_T}{\ln(2)} \cdot \left( \ln \left( \frac{\rho}{N_T} \right) + \Psi(m) \right)$$

каде  $\Psi(\dots)$  е дигама функција

- Капацитет на точка-точка МИМО со OSTBC:

$$\begin{aligned} C_{ostbc} &= E_H \left\{ \frac{K}{L} \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2 \right) \right\} = \\ &= E_H \left\{ \frac{K}{L} \cdot \log_2 (1 + \gamma) \right\} = \frac{K}{L \cdot \Gamma(m) \ln(2)} \cdot G_{3,2}^{1,3} \left( \frac{K \cdot \rho}{L \cdot N_T} \Big|_{1,0}^{1-m,1,1} \right) \end{aligned}$$

каде:  $\bar{\gamma} = \rho \cdot c = \rho \cdot \frac{L}{N_T \cdot K}$  е среден однос сигнал шум

- За голем SNR:

$$C_{ostbc} \approx E_H \left\{ \frac{K}{L} \cdot \log_2 \left[ \frac{K \cdot \rho}{L \cdot N_T} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2 \right] \right\} = \frac{K \cdot N_T}{L \cdot \ln(2)} \cdot \left( \ln \left( \frac{K \cdot \rho}{L \cdot N_T} \right) + \Psi(m) \right)$$

## 8.14. ОС за точка-точка МИМО

- Ако  $C$  на каналот падне под границата на капацитетниот испад (ОС), тогаш мала е веројатноста дека преносот ќе е без грешки, без оглед на кодирањето. Веројатноста на капацитетен испад е:

$$P_{oc} = Pr [C \leq C_{th}] = \int_0^{C_{th}} f_c(C) dC$$

- Со функционална трансформација на  $C = \log(1 + \gamma)$  се добива ОС на SISO ( $\gamma \sim Exp(\gamma)$ ):

$$f_c(C) = \frac{1}{\gamma} \cdot \exp\left(\frac{1-2^C}{\gamma}\right) \cdot 2^C \cdot \ln(2), P_{oc} = \int_0^{C_{th}} \frac{1}{\gamma} \cdot \exp\left(\frac{1-2^C}{\gamma}\right) \cdot 2^C \cdot \ln(2) dC = 1 - e^{-\frac{-1+2^{C_{th}}}{\gamma}}.$$

- Со функционална трансформација на  $C = \log_2(1 + \bar{\gamma} \cdot x)$  се добива ОС на SIMO ( $x \sim Gamma(x)$ ):

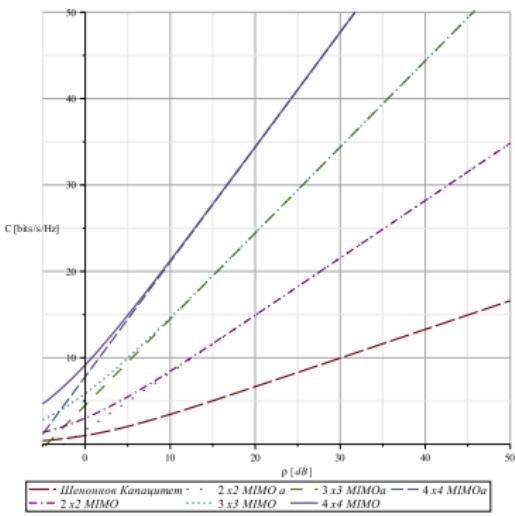
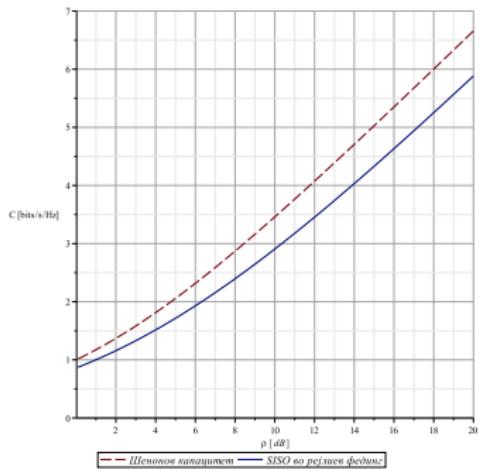
$$f_C = \frac{\left(\frac{2^C - 1}{\bar{\gamma}}\right)^{m-1}}{\Gamma(m)} \cdot e^{-\frac{2^C - 1}{\bar{\gamma}}} \cdot \frac{1}{\bar{\gamma}} \cdot \ln(2) \cdot 2^C, P_{oc} = 1 - \frac{1}{\Gamma(m)} \cdot \int_{x_{th}}^{\infty} x^{m-1} \cdot e^{-x} \cdot dx = 1 - \frac{\Gamma\left(m, \frac{2^{C_{th}} - 1}{\bar{\gamma}}\right)}{\Gamma(m)}$$

- Веројатност на капацитетен испад на МИМО со OSTBC:

$$C = \frac{K}{L} \cdot \log_2(1 + \gamma), f_{\gamma}(\gamma) = \frac{f(x)}{\bar{\gamma}} \Big|_{x=\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}} = \frac{\gamma^{\alpha-1}}{\bar{\gamma}^{\alpha} \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}}, f_C(C) = \frac{\left(\frac{2^{\frac{LC}{K}} - 1}{\bar{\gamma}}\right)^{\alpha-1}}{\theta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{\left(\frac{2^{\frac{LC}{K}} - 1}{\bar{\gamma}}\right)}{\theta}} \cdot \frac{L}{K} \cdot \ln(2) \cdot 2^{\frac{LC}{K}}$$

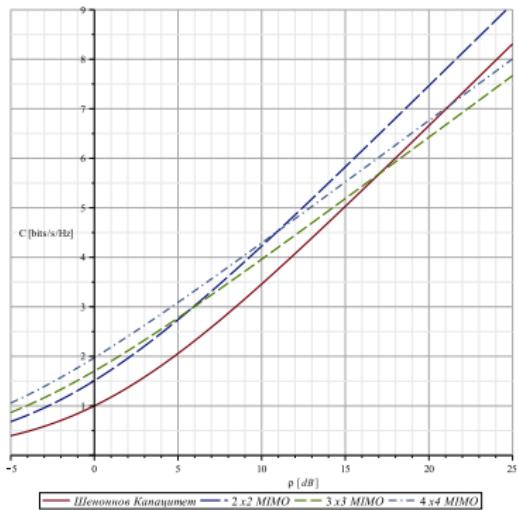
$$P_{oc} = 1 - \frac{1}{\Gamma(n_R \cdot n_T)} \cdot \Gamma\left(n_R \cdot n_T, \frac{2^{\frac{LC_{th}}{K}} - 1}{\rho \cdot L} \cdot N_T \cdot K\right)$$

## 8.15. ЕС на SISO и 2x2, 4x4 и 6x6 МИМО



- На сликите е дадена споредба на Шеноновиот капацитет со горната граница и апроксимацијата на горната граница за големо ρ.

## 8.16. ЕС на точка-точка МИМО со OSTBC



На сликата е даден Шеноновиот капацитет во споредба со ЕС за МИМО со OSTBC со  $N_T = N_R = 2$ ,  $N_T = N_R = 3$  и  $N_T = N_R = 4$ . Може да се забележи дека во случај на 2x2 МИМО со 222 OSTBC зголемувањето на бројот на антени значително го зголемува капацитетот на каналот. Имено, може да се забележи 50% зголемување за мал SNR и 15% за голем SNR.

### ЕС на 2x2, 3x3, 4x4 МИМО со OSTBC

- За 3x3 и 4x4 со 334 и 434 OSTBC каде кодовите се со  $3/4$  брзина на пренесување, има зголемување на  $C$  за мал до среден SNR, а за SNR поголем од  $17\text{dB}$  односно  $21\text{dB}$   $C$  е помал од шеноновиот капацитет што се должи на  $3/4$  брзината на пренесување на кодот.

## 8.17. ОС за точка-точка МИМО

- Капацитетот на МИМО каналот е:

$$C = \sum_{i=1}^r \log_2 \left( 1 + \frac{P_T}{N_T \cdot N_0} \cdot \lambda_i \right)$$

- Доколку претпоставиме дека сопствените вредности се i.i.d. случајни променливи и ( $N_T = N_R$ ), максимално достигнулиот  $C$  е:

$$C = N_T \log_2 \left( 1 + \frac{P_T}{N_T N_0} \cdot \lambda \right).$$

- Доколку оттука ја изразиме сопствената вредност:

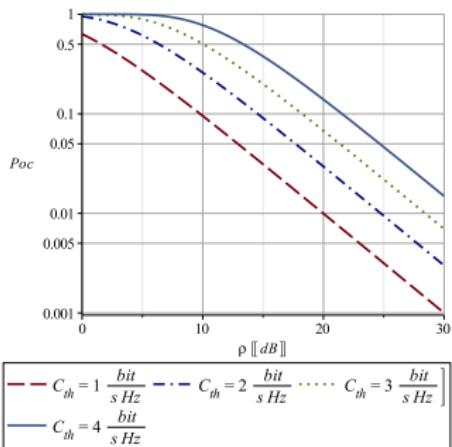
$$\lambda = \frac{\left( 2^{\frac{C}{N_T}} - 1 \right)}{P_T / (N_T N_0)}$$

- Со користење на функционална трансформација на случајните променливи :

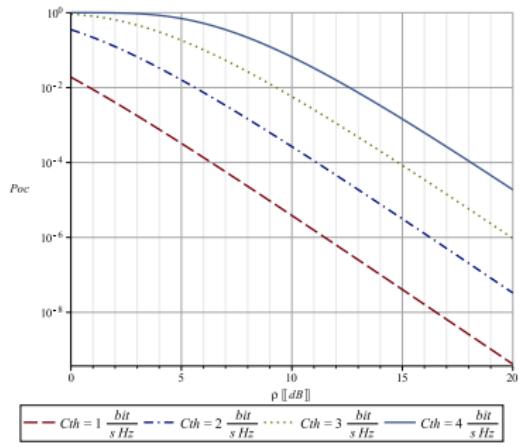
$$f_C(C) = f_\lambda \left( \frac{\left( 2^{\frac{C}{N_T}} - 1 \right)}{P_T / (N_T N_0)} \right) \cdot \ln(2) \cdot \frac{N_0}{P_T} \cdot 2^{C/N_T}$$

Доколку се знае PDF-от на сопствената вредност може да се пресмета и PDF-от на моменталниот капацитет и веројатноста на капацитетен испад.

## 8.18. ОС за SISO и SIMO



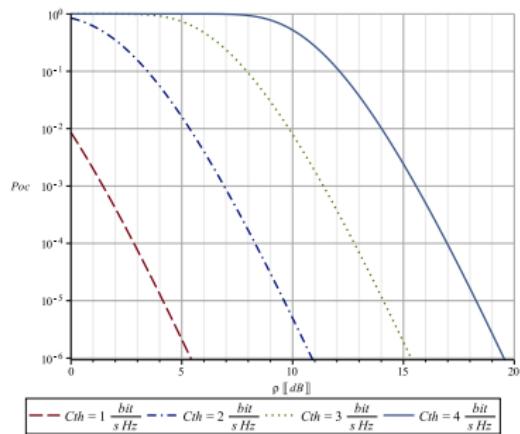
ОС за SISO во Рејлиев фединг



ОС за SIMO со  $N_R = m = 4$

- На слика лево на претходниот слайд е прикажана ОС за SISO добиен со во зависност од  $\bar{\gamma}$  во рејлиев канал за  $C_{th} = 1 \text{ bit/s/Hz}$ ,  $C_{th} = 2 \text{ bit/s/Hz}$ ,  $C_{th} = 3 \text{ bit/s/Hz}$  и  $C_{th} = 4 \text{ bit/s/Hz}$ .
- На сликата десно е прикажана ОС за SIMO во рејлиев фединг во зависност од  $\bar{\gamma}$  за  $C_{th} = 1 \text{ bit/s/Hz}$ ,  $C_{th} = 2 \text{ bit/s/Hz}$ ,  $C_{th} = 3 \text{ bit/s/Hz}$  и  $C_{th} = 4 \text{ bit/s/Hz}$ .

## 8.19. ОС за точка-точка МИМО



ОЦ за 3x3 МИМО со 334 OSTBC за  
фиксно  $C_{th}$

- На сликата е прикажана ОС за 3x3 МИМО со 334 OSTBC за различни  $C_{th}$ .

## 8.20. Израз за груба апроксимација за PDF за каскаден RC

- Ако во изразот за  $F_{\Gamma_a}$  на слайд 4.3 се земе  $k = 0$ :

$$F_{\Gamma_1}(\gamma) = 1 - \exp\left(-\frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}}\right) \cdot \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(b+1)^n}{n!} \cdot \left(\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right)^n \quad (*)$$

- Вториот член е:

$$\exp\left(-\frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}}\right) \cdot \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(b+1)^n}{n!} \cdot \left(\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right)^n = \frac{\Gamma\left(m, \frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}}\right)}{\Gamma(m)}$$

кој ако се замени во (\*):

$$F_{\Gamma_1}(\gamma) \approx 1 - \frac{\Gamma\left(m, \frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}}\right)}{\Gamma(m)} = \frac{\gamma\left(m, \frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}}\right)}{\Gamma(m)}. \quad (**)$$

Предлог: (\*\*) е CDF за следнито PDF:

$$f(\gamma) = \frac{1}{\theta^m \cdot \Gamma(m)} \gamma^{m-1} e^{-\frac{\gamma}{\theta}} \quad \text{каде } \theta = \frac{\bar{\gamma}}{b+1}$$

Доказ:

$$F(\gamma) = Pr(x \leq \gamma) = 1 - \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{\theta^m \Gamma(m)} \cdot x^{m-1} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = 1 - \frac{\Gamma\left(m, \frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}}\right)}{\Gamma(m)}$$

## 8.21. Израз за PDF за MIMO RC со директна патека (1)

- За директната делница се претпоставува дека е под влијание на Рейлиев фединг:

$$f_{\Gamma_1} := \frac{1}{\bar{\gamma}^m \cdot \Gamma(m)} \gamma^{m-1} e^{-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}}$$

- За делницата преку  $R$  ќе земеме дека ја следи грубата апроксимација за SNR

$$f_{\Gamma_2} := \frac{(b+1)^m}{\bar{\gamma}^m \cdot \Gamma(m)} \gamma^{m-1} e^{-\frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}}}.$$

Треба да се најде PDF-от за:  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

Во општ случај сумата на  $n$  случајни Гама променливи е RV:

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad f_i(x_i) = \frac{x_i^{\alpha_i}}{\theta_i^{\alpha_i} \cdot \Gamma(\alpha_i)} e^{-\frac{x_i}{\theta_i}}$$

Од литературата се добива дека PDF-от на  $Y$  е:

$$g(y) = C \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_k \cdot y^{\rho+k-1}}{\Gamma(\rho+k) \cdot \theta_I^{\rho+k}} e^{-\frac{y}{\theta_I}} \text{ каде: } \theta_I = \min_i(\theta_i) \quad \rho =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \quad C = \prod_{i=1}^n \left( \frac{\theta_I}{\theta_i} \right)^{\alpha_i} \quad (\Delta) \delta_{k+1} = \frac{1}{k+1} \cdot \sum_{i=1}^{k+1} i \cdot \gamma_i \cdot \delta_{k+1-i}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\delta_0 = 1; \quad \gamma_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \alpha_i \left( 1 - \frac{\theta_I}{\theta_i} \right)^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

## 8.22. Израз за PDF за MIMO RC со директна патека (2)

За случајот со две случајни променливи даден ( $\triangle$ ) е:

$$\theta_I = \min\left(\bar{\gamma}, \frac{\bar{\gamma}}{b+1}\right) = \frac{\bar{\gamma}}{b+1}, \rho = 2 \cdot m \quad C = \left(\frac{\bar{\gamma}/(b+1)}{\bar{\gamma}}\right)^m \cdot \left(\frac{\bar{\gamma}/(b+1)}{\bar{\gamma}/(b+1)}\right)^m = (b+1)^{-m}.$$

$$\delta_i = \frac{(m)_i}{i!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^i$$

- Ако овие параметри се заменат во  $g(y)$  се добива:

$$f_T(\gamma) = \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \frac{\gamma^{2m+k-1}}{\Gamma(2m+k) \cdot \theta_I^{2m+k}} \cdot e^{-\frac{\gamma}{\theta_I}} = \\ = \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot f_T(\gamma; \theta_I, 2 \cdot m + k)$$

каде  $f_T(\gamma; \theta_I, 2 \cdot m + k)$  е гама функција со параметар на облик  $\theta_I = \bar{\gamma}/(b+1)$  и параметар на облик  $\alpha = 2m + k$

$$f_T(\gamma) = \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \frac{\gamma^{2m+k-1} (b+1)^{2m+k}}{\Gamma(2m+k) \cdot \bar{\gamma}^{2m+k}} \cdot e^{-\frac{(b+1) \cdot \gamma}{\bar{\gamma}}}$$

## 8.23. ЕС на каскаден AF МИМО RC (1)

- Капацитетот на AF релејниот канал без директната компонента е:

$$C = \frac{1}{2} \log(1 + \gamma) = \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{\gamma_{32} \cdot \gamma_{21}}{\gamma_{32} + \gamma_{21} + 1} \right) \quad (*)$$

**Предлог:** Дропката во логаритамот во  $(*)$  го претставува крај-крај SNR-от на каскадниот AF МИМО релеен канал.

**Доказ:** Доколку во изразот за моментален SNR на слайд [▶ 4.2](#) се замени  $\bar{\gamma} = E_s / N_0$  се добива:

$$\gamma = \bar{\gamma} \cdot \frac{A^2 \|G\|_F^2 \|H\|_F^4}{A^2 \|G\|_F^2 \|H\|_F^2 + 1} \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\bar{\gamma}} \cdot \frac{A^2 \|G\|_F^2 \|H\|_F^2 + 1}{A^2 \|G\|_F^2 \|H\|_F^4} = \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot \|H\|_F^2} + \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot A^2 \cdot \|G\|_F^2 \|H\|_F^4}$$

Доколу земеме  $E_R = E_I = E_S$  во изразот [▶ 4.1](#) се добива:

$$A^2 = \frac{E_s}{E_s \|H\|_F^4 + \|H\|_F^2 N_0} = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma} \|H\|_F^4 + \|H\|_F^2}$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot \|H\|_F^2} + \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma} \|H\|_F^4 + \|H\|_F^2} \cdot \|G\|_F^2 \cdot \|H\|_F^4} = \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot \|H\|_F^2} + \frac{\bar{\gamma} \|H\|_F^4 + \|H\|_F^2}{\bar{\gamma}^2 \cdot \|G\|_F^2 \cdot \|H\|_F^4} = \frac{1}{\gamma_{21}} + \frac{1}{\gamma_{32}} + \frac{1}{\gamma_{21} \cdot \gamma_{32}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\frac{1}{\gamma_{21}} + \frac{1}{\gamma_{32}} + \frac{1}{\gamma_{21} \cdot \gamma_{32}}} = \frac{\gamma_{21} \cdot \gamma_{32}}{\gamma_{21} + \gamma_{32} + 1} \quad \text{Q.E.D.}$$

- Ако се користи апроксимативниот израз за  $A$  и се земе  $b = 1$ :

$$\gamma = \bar{\gamma} \cdot \frac{A^2 \|G\|_F^2 \|H\|_F^4}{A^2 \|G\|_F^2 \|H\|_F^2 + 1} \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\bar{\gamma}} \cdot \frac{A^2 \|G\|_F^2 \|H\|_F^2 + 1}{A^2 \|G\|_F^2 \|H\|_F^4} = \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot \|H\|_F^2} + \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot A^2 \cdot \|G\|_F^2 \|H\|_F^4} =$$

## 8.24. EC на каскаден AF МИМО RC (2)

$$= \frac{1}{\gamma \cdot \|H\|_F^2} + \frac{b}{\gamma \cdot \|G\|_F^2} = \frac{1}{\gamma_{31}} + \frac{b}{\gamma_{32}} \Rightarrow \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma_{31}} + \frac{b}{\gamma_{32}} \quad \gamma = \frac{1}{\frac{1}{\gamma_{31}} + \frac{1}{\gamma_{32}}} = \frac{\gamma_{31}\gamma_{32}}{\gamma_{31} + \gamma_{32}} (\triangle)$$

- Изразот ( $\triangle$ ) може да се претстави преку фробенуосовите норми на делницата S-D ( $\|H\|_F^2$ ) и делницата R-D ( $\|G\|_F^2$ ):

$$\gamma = \frac{1}{\frac{1}{\gamma_{31}} + \frac{1}{\gamma_{32}}} = \frac{\gamma_{31}\gamma_{32}}{\gamma_{31} + \gamma_{32}} = \frac{\left(\frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T}\right)^2 \|H\|_F^2 \cdot \|G\|_F^2}{\frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T} (\|H\|_F^2 + \|G\|_F^2)} = \frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T} \cdot \frac{\|H\|_F^2 \cdot \|G\|_F^2}{\|H\|_F^2 + \|G\|_F^2}$$

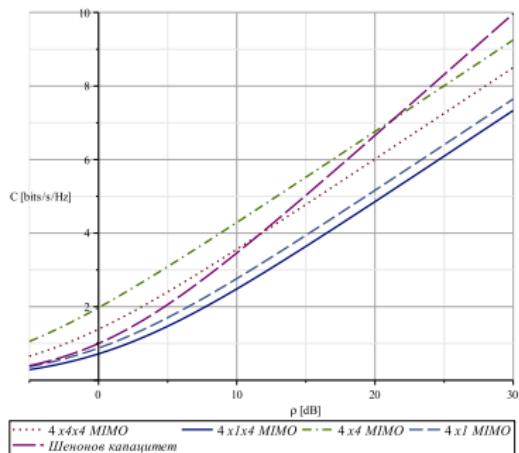
- AF МИМО RC со OSTBC може да го претставиме со еквивалентен точка-точка МИМО со EC:

$$C_{AF} = E_H \left\{ \frac{K}{L} \cdot \log_2 (1 + \gamma) \right\} = E_H \left\{ \frac{K}{L} \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{\gamma_{32} \cdot \gamma_{21}}{\gamma_{32} + \gamma_{21} + 1} \right) \right\} \approx \\ \approx E_H \left\{ \frac{K}{L} \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{\gamma_{32} \cdot \gamma_{21}}{\gamma_{32} + \gamma_{21}} \right) \right\} = E_H \left\{ \frac{K}{L} \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T} \cdot \frac{\|H\|_F^2 \cdot \|G\|_F^2}{\|H\|_F^2 + \|G\|_F^2} \right) \right\} (**)$$

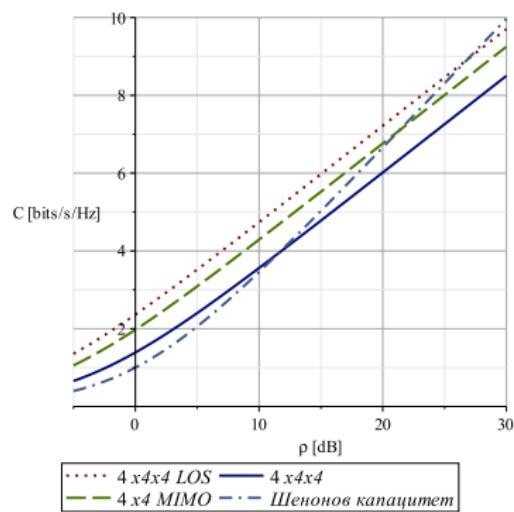
Од изразот (\*\*) е следи дека  $C$  на AF МИМО RC со OSTBC е помал од  $C$  на точка-точка МИМО каналот со OSTBC:

$$C_{AF} \leq \frac{K}{L} \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T} \cdot \|H\|_F^2 \right) \text{ затоа што: } \frac{\|H\|_F^2 \cdot \|G\|_F^2}{\|H\|_F^2 + \|G\|_F^2} < \|H\|_F^2 .$$

## 8.25. ЕС за 4x4x4 AF MIMO RC со и без DP

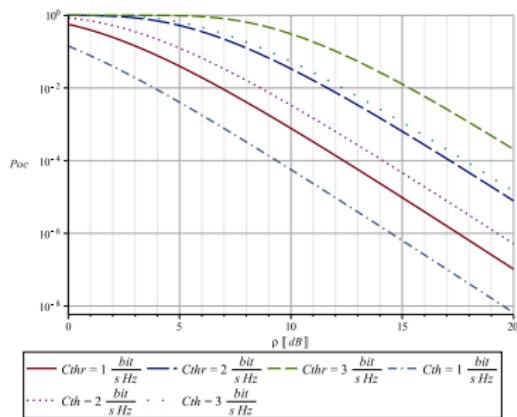


ЕС за  $4 \times 4 \times 4 / 4 \times 1 \times 4$  МИМО RC со 434  
OSTBC



ЕС за  $4 \times 4 \times 4$  МИМО RC со и без DP

## 8.26. ОС: Каскаден AF МИМО RC (2x2x2)



ОС за 2x2 и 2x2x2 МИМО со 222  
OSTBC за фиксно  $C_{th}$

- За пресметка на ОС на AF МИМО RC, ќе го користиме едноставниот израз за PDF на RC без DP: [▶ 4.8](#)

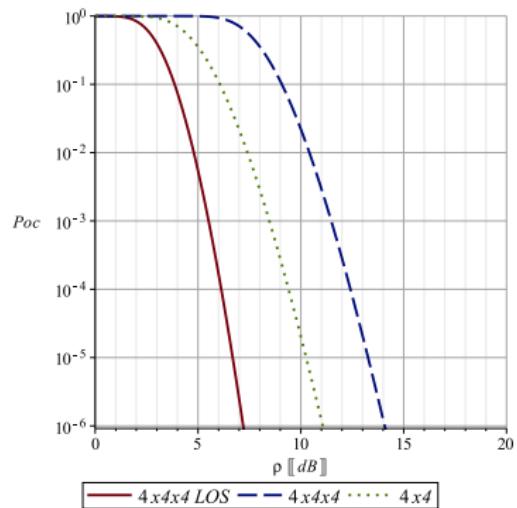
$$C = \frac{K}{L} \cdot \log_2 (1 + \gamma),$$

- Со функционална трансформација на RV:

$$f_C(C) = f_\Gamma\left(2^{\frac{LC}{K}} - 1\right) \cdot \frac{d\gamma}{dC} = \\ \frac{\left(2^{\frac{LC}{K}} - 1\right)^{\alpha-1}}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{\left(2^{\frac{LC}{K}} - 1\right)}{\theta}} \cdot \frac{L}{K} \cdot \ln(2) \cdot 2^{\frac{LC}{K}}$$

$$P_{oc} = 1 - \int_{C_{th}}^{\infty} f(C) \cdot dC = P_{oc} = 1 - \frac{1}{\Gamma(m)} \cdot \Gamma\left(m, \frac{\left(2^{\frac{LC_{th}}{K}} - 1\right)}{\rho \cdot L} \cdot N_T \cdot K \cdot (b+1)\right)$$

## 8.27. ОС: AF МИМО RC со директна патека (4x4x4)



- Може да се забележи дека системите со DP има значително помал ОС од каскадниот МИМО RC и точка-точка системот. Освен тоа МИМО релејнот систем со директна патека покажува и поголема добивка од диверзитет.

$$C = \frac{K}{L} \cdot \log_2 (1 + \gamma)$$

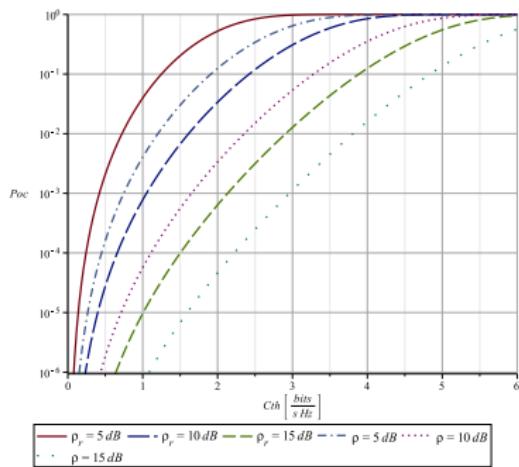
$$f_C(C) = \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \left(\frac{2^{\frac{LC}{K}} - 1}{\Gamma(2m+k) \cdot \theta_I^{2m+k}}\right)^{2m+k-1} \cdot e^{-\frac{\gamma}{\theta_I}} \cdot \frac{L}{K} \cdot |\ln(2)| \cdot 2^{\frac{LC}{K}}$$

ОС за  $4 \times 4 \times 4$  со и без DP за фиксно  
 $C_{th} = 3 \text{bit/s/Hz}$

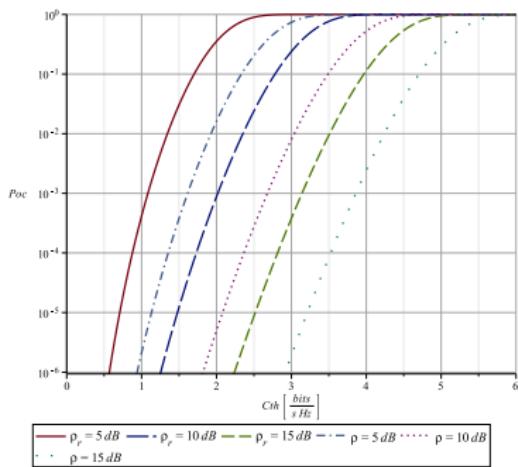
$$P_{oc} \approx 1 - \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \frac{1}{\Gamma(2m+k)} \Gamma\left(2m+k, \frac{2^{\frac{LC_{th}}{K}} - 1}{\bar{\gamma}} \cdot (b+1)\right)$$



# 8.28. ОС на каскаден AF МИМО RC за фиксно $\rho$

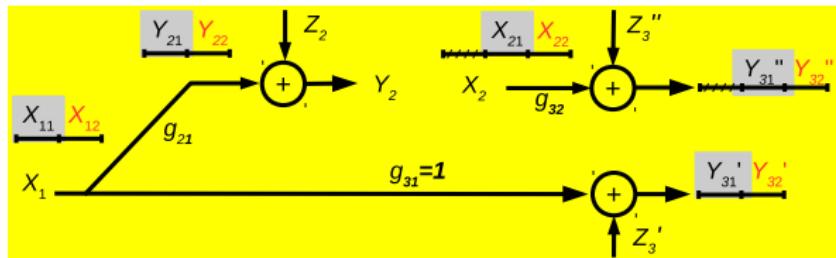


ОС за  $2 \times 2$  и  $2 \times 2 \times 2$  МИМО со 222  
OSTBC за фиксно  $\rho$



ОС за  $3 \times 3$  и  $3 \times 3 \times 3$  МИМО со 334  
OSTBC за фиксно  $\rho$

## 8.29. Израз за капацитет за AF RC (1)



- Изразот за капаците на AF RC е:

$$C_L^{(1)} = C \left( \gamma_{31} + \frac{\gamma_{21}\gamma_{32}}{\gamma_{21} + \gamma_{32} + 1} \right)$$

**Доказ:** Се претпоставува  $X_1, X_2, \dots$  се i.i.d  $\sim \mathcal{N}(0, P)$ ,

$Z_2, Z'_3, Z''_3 \sim \mathcal{N}(0, N)$  и  $x_2 = A \cdot y_2$  каде  $A$  е:

$$A = \sqrt{\frac{P}{g_{21}^2 P + N}} \quad A^2 = \frac{P}{g_{21}^2 P + N} = \frac{\frac{P}{N}}{g_{21}^2 \frac{P}{N} + 1}$$

$$X_1 \sim \mathcal{N}(0, P) \quad Y_2 = g_{21} \cdot X_1 + Z_2 \quad X_2 = A \cdot Y_2,$$

$$Y''_3 = Y''_{31} = g_{32} \cdot X_2 + Z''_3 = g_{32} \cdot A \cdot (g_{21} \cdot X_1 + Z_2) + Z''_3 = \\ = g_{32} \cdot A \cdot g_{21} \cdot X_1 + g_{32} \cdot A \cdot Z_2 + Z''_3 \quad Y'_3 = Y'_{31} = X_1 + Z'_3$$

## 8.30. Израз за капацитет за AF RC (2)

Капацитетот на каналот е:

$$I(X_1; Y'_{31} Y''_{31}) = h(Y'_{31} Y''_{31}) - h(Y'_{31} Y''_{31} | X_1) = \\ = h(Y''_{31}) + h(Y'_1 | Y''_{31}) - h(Y'_1 | X_1) - h(Y''_{31} | X_1 Y'_1) \quad (\#)$$

- првиот член од (#) е:

$$h(Y''_{31}) = h(g_{32} \cdot A \cdot g_{21} \cdot X_1 + g_{32} \cdot A \cdot Z_2 + Z''_3) \leq \\ \frac{1}{2} \log(2\pi e) (g_{32}^2 A^2 g_{21}^2 P + g_{32}^2 A^2 N + N)$$

- вториот член од (#) е:

$$h(Y'_1 | Y''_{31}) = h(X_1 + Z | Y''_{31}) = \frac{1}{2} \log(2\pi e) E(Var(X_1 + Z | Y''_{31})) \quad (\triangle)$$

- Изразот во логаритамот е:

$$E(Var(X_1 + Z | Y''_{31})) = E(Var(X_1 | Y''_{31})) + N = P - \frac{E^2(X_1 | Y''_{31})}{E(Y''_{31}^2)} + N = = \\ P - \frac{E^2(X_1 \cdot (g_{32} \cdot A \cdot g_{21} \cdot X_1 + g_{32} \cdot A \cdot Z_2 + Z''_3))}{E(Y''_{31}^2)} + N = P - \frac{g_{32}^2 \cdot A^2 \cdot g_{21}^2 \cdot P^2}{g_{32}^2 A^2 g_{21}^2 P + g_{32}^2 A^2 N + N} + N \quad (*)$$

Ако (\*) се замени во ( $\triangle$ ) се добива:

$$h(Y'_1 | Y''_{31}) = \frac{1}{2} \log(2\pi e) \left( P - \frac{g_{32}^2 \cdot A^2 \cdot g_{21}^2 \cdot P^2}{g_{32}^2 A^2 g_{21}^2 P + g_{32}^2 A^2 N + N} + N \right) \quad (\square)$$

## 8.31. Израз за капацитет за AF RC (3)

Ако ( $\square$ ) се сумира со  $h(Y''_{31})$  се добива:

$$h(Y'_{31} Y''_{31}) = \frac{1}{2} \log (2\pi e)^2 (g_{21}^2 g_{32}^2 A^2 NP + g_{32}^2 A^2 N^2 + g_{32}^2 A^2 NP + N^2 + NP)$$

- Третиот член од (#) е:

$$h(Y'_{31}|X_1) = \frac{1}{2} \log (2\pi e) (N)$$

Четвртиот член од (#) е:

$$\begin{aligned} h(Y''_{31}|X_1 Y'_{31}) &= h(g_{32} \cdot A \cdot g_{21} \cdot X_1 + g_{32} \cdot A \cdot Z_2 + Z''_3|X_1 Y'_{31}) = \\ &= \frac{1}{2} \log (2\pi e) Var(g_{32} \cdot A \cdot Z_2 + Z''_3|Y'_{31}) = \frac{1}{2} \log (2\pi e) (g_{32}^2 \cdot A^2 \cdot N + N) \end{aligned}$$

Со замена на изразите за членовите во (#) се добива:

$$\begin{aligned} I(X_1; Y'_{31} Y''_{31}) &= \frac{1}{2} \cdot \log \left( 1 + \frac{P}{N} \cdot \left( 1 + \frac{g_{21}^2 g_{32}^2 \cdot P}{(g_{21}^2 + g_{32}^2)P + N} \right) \right) = \\ C \left( \frac{P}{N} + \frac{g_{21}^2 g_{32}^2}{(g_{21}^2 + g_{32}^2)\frac{P}{N} + 1} \cdot \frac{P^2}{N^2} \right) &= C \left( \gamma_{31} + \frac{\gamma_{21} \cdot \gamma_{32}}{\gamma_{21} + \gamma_{32} + 1} \right) \quad Q.E.D. \end{aligned}$$