# 4 Перформанси на МИМО релеен канал со повеќе антени по јазол

Во оваа глава ќе ги го анализираме ЕР (глава 4.2) и ОР (глава 4.3) за AF МИМО релејните ситеми. Дополитено во глава 4.4 ќе се анализараат перформансите на AF МИМО релејните канали со директна патека до дестинацијата.

Има многу научни трудови кои се однесуваат на AF МИМО релејните канали. Некои се фокусираат на релеите со една антена ([40]-[43]) и некои на релеите со повеќе антени ([20], [44]-[48]). Трудот [40] обезбедува апроксимативна и асимптотска анализа на битската веројатност на грешка (BEP) за дистрибуирани просторно-временски кооперативни системи со една антена во изворот, два релеа со една антена, и дестинација со една антена. BEP анализа за дво-делнични МИМО системи кои користат OSTBC пренос со повеќе антенски извор, дестинација со една/повеќе-антени и реле со една антена е спроведена во [41] и [42]. Трудот [43] се фокусира на пронаоѓање на точна затворена форма и асиптотски изрази за перформансите за испад и грешка во релеен канал со една антена каде изворот и дестинацијата имаат повеќе антени со користење на OSTBC пренос и Накагами-м фединг. Анализата во [20] ја дополнува анализата во [42] за AF МИМО релејни канали кои користат OSTBC пренос и кај кои изворот, релето, и дестинацијата имаат по две антени. Трудот [44] ја проширува анализата во [42] и [20] со анализа на горната граница на BEP за извор, реле и дестинација со повеќе антени. Трудот [45] обезбедува анализа на перформансите на грешка за AF МИМО релеен канал претставен во [44] каде секој од јазлите е екипиран со N антени. Исто така, во него е дадена анализа за асиптотската веројатност на грешка и споредба на AF МИМО релејните канали со повеќе МИМО релеи со и без избор на реле за препраќање. Во трудот [47] е анализирана долната граница на перформансите на грешка во дистрибуиран просторно-временски блок систем на кодирање во кој постои директен линк помеѓу дво-антенскиот извор и дестинција и индиректен линк преку повеќе-антенско реле. Авторите на [48] обезбедуваат детална анализа на перформансите на дво-делничен AF МИМО релеен канал кој користи OSTBC каде секој од јазлите има повеќе антени и има развиено точни изрази во затворена форма за веројатноста на грешка за одредени конфигурации на системот.

Освен за BEP има многу трудови кои ги разгледуваат OP перформансите на AF МИМО релејните канали. Во Трудот [41] авторите презентираат перформанси на грешка и испад за кооперативните релејни канали со диверзитет на предавателот со и без пренос преку директен линк. Во трудот [49] авторите презентираат изрази во затворена форма за веројатноста за испад на кооперативен МИМО релеен канал во кој изворот и релето користат OSTBC пренос, додека релето и дестинацијата во приемникот користат комбинирање со максимален сооднос (MRC). Трудот [46] дава точни изрази и граници во затворена форма за веројатноста за испад за AF МИМО релеен канал со користење на OSTBC каде секој од неговите јазли е екипиран со две антени преку Накагами-m фединг околина.

Горе споменатите трудови за имплементација на AF МИМО релеен канал ([20], [42]-[48]) користат варијанта на засили-и-испрати (AF - Amplify and Forward) релејна шема наречена раздвои-и-испрати (DCF) која што неодамна беше предложена во [20]. DCF е техника за линеарно процесирање со која релето конвертира повеќе просторни поворки од примениот OSTBC сигнал во една просторна поворка без декодирање на симболите. Како резултат на овој линеарен процес на раздвојување, доколку каналскиот шум се занемари, естимацијата од испратениот симбол може математички да се изрази како продукт од испратениот симбол и сумата од квадратите од модулите на коефициентите на МИМО каналот. Откако релето ќе го раздвои OSTBC сигналот примен од изворот тој повторно ги кодира раздвоените симболи со користење на OSTBC, ги засилува и испраќа преку делницата од релето до дестинацијата.

# 4.1 Модел на каналот

Во оваа глава ќе се анализираат перформансите на дво-делничниот релеен канал (кој се состои од извор, реле и дестинација), со повеќе антени и јазли кои користат OSTBC пренос (слика 4.1). Ќе се разгледуваат две системски конфигурации: $N$x*1*x$N$ конфигурација, во која изворот и дестинацијата се екипирани со $N_T = N_R = N$ антени[1], а релето со една антена и $N$x$N$x$N$ конфигурација, каде изворот, релето и дестинацијата се екипирани со $N$ антени. Се претпоставува дека нема просторна корелација меѓу сигналите испратени или примени во различни антени. Во AF релето се врши засилување со променлив фактор на засилување (VG) на влезниот сигнал, за што е потребно релето да има информација за моменталната состојбата на каналот (CSI) во делницата од изворот до релето [6]. Исто така се претпоставува дека дестинацијата ја има информацијата за состојбата на каналот за делницата од релето до дестинацијата.

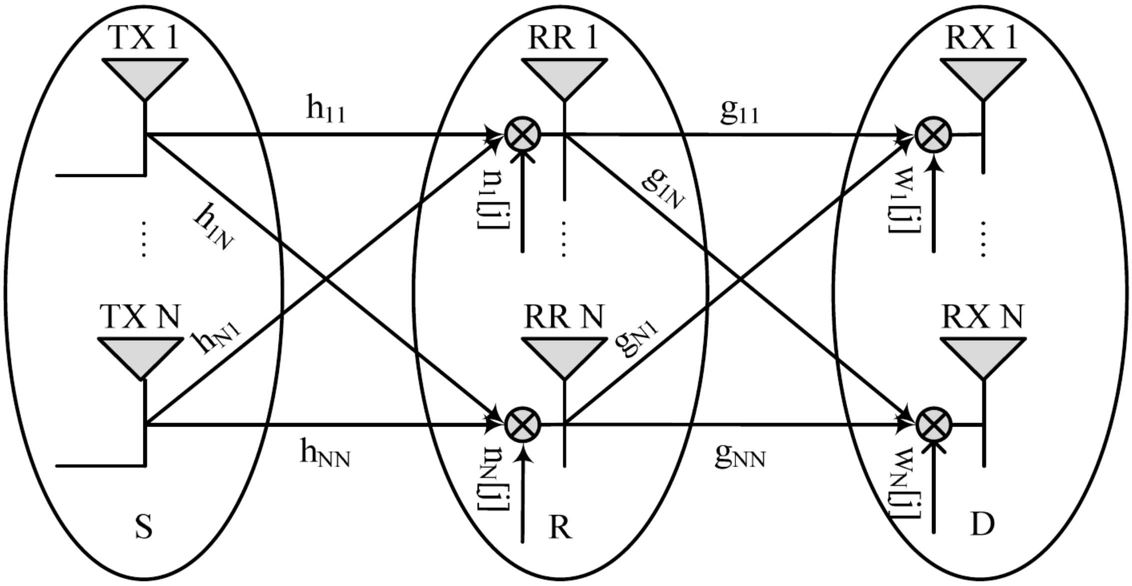
На слика 4.1 е претставен дво-делничнниот МИМО систем (како најгенерална конфигурација која ги вклучува двете разгледувани конфигурации како специјален случај), каде изворот, релето и дестинацијата се обележани со $S$, $R$ и $D$, соодветно. Релејниот канал е обележан како $N$x*1*x$N$ во случај кога релето $R$ има една антена и $N$x$N$x$N$ кога релето $R$ има $N$ антени. Делниците $S$-$R$ и $R$-$D$ се моделирани како независни МИМО релејни канали со канални матрици $\mathbf{H}$ и $\mathbf{G}$. Елементите $h_{ij}$и $g_{ij}$ од овие матрици се каналните коефициенти помеѓу $i$-та предавателна антена и $j$-та приемна антена, кои се сметаат како независни циркуларно-симетрични комплексни Гаусови случајни променливи со нулта средна вредност и единична варијанса. Затоа, квадратот од анвелопата од сигналот испратен преку каналот $h_{ij}$ ($g_{ij}$) ја следи опаѓачката експоненцијална функција на густина на веројатност [35] со исти средни квградратни вредности $E\left[|h_{ij}|^2\right] = E\left[|g_{ij}|^2\right] = 1$. Изворот $S$ испраќа со моќност $P$ и нема директната комуникација меѓу изворот и дестинацијата. Употребуваните OSTBC кодови се означуваат како кодови со три цифри, $NKL$, каде $N$ е бројот на антени, $K$ е бројот на кодни симболи испратени во еден коден блок, и $L$ претставува број на потребни временски слотови за испраќање на еден коден збор [50].

Претпоставуваме дека комуникацискиот систем работи во полу-дуплексен мод, поделен во две фази (фаза 1 и фаза 2). Изворот $S$ испраќа кон релето $R$ за време на фаза 1, потоа $R$ испраќа кон дестинацијата $D$ за време на фаза 2. Под претпоставка дека изворот $S$ користи OSTBC во фаза 1, група од $K$ информациски симболи $\mathbf{X} = [x_1,\ x_2,\ ..x_K]^T$ се пренесуват преку $N$ предавателни антени во $L$ последователно временски интервали. За време на фаза 2 релето на $Nx1xN$ системот ги раздвојува, засилува и испраќа $K$-те примени симболи кон дестинацијата. Во случај на $NxNxN$ систем, за време на фаза 2 релето ги раздвојува, засилува, OSTBC кодира и испраќа $K$-те примени симболи кон дестинацијата. Приемниот сигнал во една антена во релето на крај од фазата 1 е:

$$\mathbf{Y} = \sqrt{E_S}\ \mathbf{C}\ \mathbf{H} + \mathbf{N}\ ,\quad \mathbf{Y} = [y_1,\ y_2,\ \ldots y_L]^T\ , \tag{4.1}$$

каде $\mathbf{C}$ е $L$x$N$ кодната матрица од OSTBC кодот, $\mathbf{H} = [h_1,\ h_2,\ ..h_N]^T$ е $N$x1 каналниот вектор на $S$-$R$ делницата и $\mathbf{N} = [n_1,\ n_2,\ ..n_L]^T$ е $L$x1 вектор кој го претставува Гаусовот

[1] $n_T$- број на предаватени антени во изворот, $n_R$-број на премни антени во деснацијата




**Слика 4.1:** МИМО релеен канал со две делници.

бел шум (AWGN) на *S*-*R* делницата чии елементи имаат нулта средна вредност и варијанса $N_0$.
Операторот $\mathbf{T}$ во суперскриптот означува операција на транспонирање на матрица, и $E_S$ е средната испратена моќност по симбол. Во [51] е покажано дека изразот за раздвоен симбол во една антена во релето е:

$$\tilde{x}_k = \sqrt{E_S}\ \|\mathbf{H}\|_F^2\ x_k + \xi_k, \quad k = 1, 2, ..K\ , \tag{4.2}$$

каде $\|\mathbf{H}\|_F^2 = \sum_{i=1}^{N} |h_i|^2$ е квадрат од Фробениусовата норма на матрицата $\mathbf{H}$, $\xi$ е гаусовиот шум претставен како комплексна случајна променлива со нулта средна вредност и варијанса $\|\mathbf{H}\|_F^2\ N_0$. Во случајот каде релето има $N$ антени ($N$x$N$x$N$ систем), раздвоениот симбол во релето повторно може да се претстави со изразот (4.2) каде $\|\mathbf{H}\|_F^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} |h_{ij}|^2$[2]. Раздвоениот симбол $\tilde{x}_k$ за да се запази ограничувањето на моќност во релето се засилува со следниов фактор на засилување [16, eq.(9)]:

$$A = \sqrt{\frac{E_R}{E_I\, \|\mathbf{H}\|_F^4 + \|\mathbf{H}\|_F^2\ N_0}}. \tag{4.3}$$

каде енергијата на испратените симболи од изворот ($E_I$) и релето ($E_R$) се исти т.е. $E_I = E_R = E_s$. За Nx1xN системот дестинацијата $D$ ги комбинира примените сигнали од повеќето антени со користење на комбинирање со максимален сооднос (MRC). Со цел фер споредба на двата системи, се претпоставува иста предавателна моќност во релето во двете системски конфигурации. Затоа, за *Nx1xN* системот треба да се нормализира засилувањето на релето дадено со изразот (4.3) со фактор на нормализација $c$ кој ќе ја зголеми предавателната моќност пропорционално со бројот на предавателни антени во $S$. Ако се земе тоа во предвид и ако за полесна аналитичка анализа се апроксимира изразот (4.3) засилувањењето на релето може да се претстави со:

$$A \approx \frac{1}{\sqrt{b}\ \ \|\mathbf{H}\|_F^2}\ . \tag{4.4}$$

каде $b$ е фактор за нормализација на моќност. Во изразот (4.4) избираме $b = c$ за *Nx1xN* и $b = 1$ за *NxNxN* систем.

[2] Претпоставуваме дека каналната матрица $H$ е нормализирана т.е. $E\left[\|H\|_F^2\right] = N_R x N_T = N^2$.

Раздвоениот симбол во дестинацијата $D$ е:

$$\hat{x}_k = A \ \ \|\mathbf{G}\|_F^2 \ \ \tilde{x}_k + \mu_k, \quad k = 1, 2, \ldots K \tag{4.5}$$

каде $\|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum_{i=1}^N |g_i|^2$ и $\|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |g_{ij}|^2$ се соодветните Фробениусови норми на каналната матрица $\mathbf{G}$ за Nx1xN и NxNxN системи, и $\mu$ е комплексна случајна променлива која го претставува белиот Гаусов шум (AWGN) со нулта средна вредност и варијанса $\|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2 \ N_0$. Доколку се замени (4.2) во (4.5) ќе се добие изразот кој ги претставува раздвоените симболи во дестинацијата $D$ за $N$x$1$x$N$ и $N$x$N$x$N$ конфигурациите :

$$\hat{x}_k = \sqrt{E_s} \ A \ \ \|\mathbf{H}\|_F^2 \ \ \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2 \ \ x_k + A \ \ \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2 \ \ \xi_k + \mu_k \ .$$

Моќностите на корисниот сигнал и на шумот се:

$$\begin{aligned} P_S &= E_s \, A^2 \, \|\mathbf{H}\|_F^4 \, \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^4 \ \ , \\ P_N &= A^2 \, \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^4 \, \|\mathbf{H}\|_F^2 \, N_0 + \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2 \ \ N_0 \ . \end{aligned} \tag{4.6}$$

Затоа, односот сигнал-шум по информационен симбол за двата системи е:

$$\gamma = \frac{P_S}{P_N} = \frac{E_s}{N_0} \cdot \frac{A^2 \, \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2 \ \ \|\mathbf{H}\|_F^4}{A^2 \, \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2 \ \ \|\mathbf{H}\|_F^2 + 1} \ . \tag{4.7}$$

## 4.2 Веројатност на грешка

Во оваа глава, ќе дадеме апроксимаци на битските перформанси на дво-делничен DCF релеен канал, кој се состои од извор, DCF полу-дуплексно реле и дестинација, екипирани со повеќе антени кои користат OSTBC пренос во Рејлиева фединг околина. Слична апроксимативна BEP анализа за AF МИМО релејните сисеми е дадена во [44]. Сепак, во оваа докторска теза се доаѓа до едноставни универзални апроксимации за веројатноста на грешка на овие системи, кои се покажува дека се многу точни во SNR опсези кои се од практичен интерес. Во нумеричките резултати на оваа глава ќе ги споредиме резултатите добиени со нашите апроксимации со резултатите добиени во [44].

Продолжението на оваа глава е согласно следниов редослед. Во наредната глава ќе изведеме изрази во затворена форма за многу прецизна апроксимација на веројатноста на грешка. Во глава 4.2.2 ќе презентираме дополнителни едноставни асиптотски апроксимации на веројатноста на грешка кои се валидни за висок однос сигнал-шум и нумеричките резултати се презентирани во глава 4.2.4.

### 4.2.1 Апроксимација на ЕР за произволен однос сигнал-шум

Кумулативната функција на веројатност (CDF) за случајната променлива $\gamma$ се пресметува со наоѓање на инверзна Лапласова трансформација на нејзината функција за генерирање на моменти (MGF) [35]:

$$F_{\mathit{\Gamma}}(\gamma) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \mathrm{M}_{\mathit{\Gamma}}(-\mathrm{s})/\mathrm{s} \right] \ , \tag{4.8}$$

каде $\mathcal{L}^{-1}$означува инверзна Лапласова трансформација, и $\gamma$ е моменталнот SNR на сигналот во дестинацијата $D$. Со замена на (4.4) во (4.7) моменталниот крај-крај SNR ($\gamma$) за двата системи може да се претстави во следнава форма [42]:

$$W = 1/\mathit{\Gamma} = 1/\left(\overline{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2\right) + b/\left(\overline{\gamma} \cdot \|\mathbf{G}\|_F^2\right) = U + V \ , \tag{4.9}$$

каде $W = 1/\mathit{\Gamma}$, $U = 1/(\overline{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2)$, $V = b/(\overline{\gamma} \cdot \|\mathbf{G}\|_F^2)$, $\overline{\gamma} = E_s/N_0 = c \cdot \rho$ е средниот SNR по симбол и $\rho$ е вкупниот среден SNR во дестинацијата пред декодирањето. Изразот (4.9) важи за $N$x$1$x$N$ доколку се замени $b = c$ и за $N$x$N$x$N$ систем доколку се замени $b = 1$. Со оглед на тоа што моменталната моќност на каналните коефициенти ја следи експоненцијалната функција на густина на веројатност, $\|\mathbf{H}\|_{\mathrm{F}}^2$ и $\|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2$ ја следат гама функцијата на густина на веројатност:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\theta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\, e^{-\frac{x}{\theta}}\ , \text{ за } x > 0, \text{ и } \alpha, \theta > 0, \tag{4.10}$$

со параметар за размер $\theta = 1$[3] и параметар за облик $\alpha = m = m_1 = m_2$. Имајќи го тоа во предвид, функцијата на густина на веројатност на квадратот од Фробениусовата норма е:

$$f_{\|\mathrm{H}\|_{\mathrm{F}}^2}(x) = \frac{x^{m_1-1}}{\Gamma(m_1)}\, e^{-x}\ ,\ f_{\|\mathrm{G}\|_{\mathrm{F}}^2}(x) = \frac{x^{m_2-1}}{\Gamma(m_2)}\, e^{-x}, \tag{4.11}$$

каде $x > 0$, $m = m_1 = m_2 = N$ за $N$x$1$x$N$ системот и $m = m_1 = m_2 = N^2$ за $N$x$N$x$N$ системот. Со функционална трансформација на случајните променливи $U = 1/(\overline{\gamma} \cdot \|\mathrm{H}\|_F^2)$ и $V = b/(\overline{\gamma} \cdot \|\mathrm{G}\|_{\mathrm{F}}^2\,)$ се добиваат соодветните функции на густина на веројатност:

$$f_U(x) = \frac{x^{-m-1}}{\overline{\gamma}^m \cdot \Gamma(m)}\, e^{-\frac{1}{x\,\overline{\gamma}}}\ , \quad f_V(x) = \frac{b^m \cdot x^{-m-1}}{\overline{\gamma}^m \cdot \Gamma(m)}\, e^{-\frac{b}{x \cdot \overline{\gamma}}}\ . \tag{4.12}$$

Со користење на [38, eq.(3.471.9)] лесно се наоѓаат функциите за генерирање на моменти за $U$ и $V$:

$$\begin{aligned} M_U(-s) &= \frac{2}{\Gamma(m)}\, (s/\overline{\gamma})^{\frac{m}{2}}\, K_m\left(2\sqrt{s/\overline{\gamma}}\right), \\ M_V(-s) &= \frac{2\, b^{m/2}}{\Gamma(m)}\, (s/\overline{\gamma})^{\frac{m}{2}}\, K_m\left(2\sqrt{b\ s/\overline{\gamma}}\right), \end{aligned} \tag{4.13}$$

каде $K_m$ [38, eq.(8.432.1)] е модифицирана Беселова функција од втор тип од $m$-ти ред. Бидејќи $S$-$R$ и $R$-$D$ делниците се предмет на независен Рејлиев фединг, $U$ и $V$ се независни и функцијата за генерирање на моменти од нивната сума е производ од нивните MGF-и:

$$M_W(-s) = \frac{4 \cdot \sqrt{b^m}}{\Gamma^2(m)} \cdot \left(\frac{s}{\overline{\gamma}}\right)^m \cdot K_m\left(2\sqrt{\frac{s}{\overline{\gamma}}}\right) \cdot K_m\left(2\sqrt{\frac{b\ s}{\overline{\gamma}}}\right)\ . \tag{4.14}$$

За Nx1xN систем конфигурација, MGF од $1/\Gamma$ е изразен како (4.14), каде $m = N$ и $b = c$, додека, за $N$x$N$x$N$ систем конфигурацијата, $m = N^2$ и $b = 1$. Кумулативната дистрибутивна функција на случајната променлива $\mathit{\Gamma}$ се добива согласно [53, eq.(31)]:

$$F_{\mathit{\Gamma}}(\gamma)\ = 1 - \mathcal{L}^{-1}\left[M_w(-s)/s\right]\big|_{w=1/\gamma}\ . \tag{4.15}$$

Лесно може да се покае дека $(m-1)$-от извод од $L^{-1}\left[M_w(-s)/s^m\right]$ е еднаков на $\mathcal{L}^{-1}\left[M_w(-s)/s\right]$ и затоа (4.15) може да се претстави во следнава форма [42, eq.(9)]:

$$F_{\mathit{\Gamma}}(\gamma) = 1 - d^{m-1}L(w)/d\ w^{m-1}\big|_{w=1/\gamma}\ , \tag{4.16}$$

каде:

$$L(w) = \mathcal{L}^{-1}\left[M_w(-s)/s^m\right]\ . \tag{4.17}$$

[3] Имајќи во предвид дека $E\left[|h_{ij}|^2\right] = E\left[|g_{ij}|^2\right] = 1$.

Со користење на [54, eq.(3.16.6.6)] $L(w)$ функцијата за MGF-от даден со (4.14) може да се претстави во следнава форма:

$$L(w) = \frac{2\ b^{m/2}\ e^{-\ \frac{b+1}{\overline{\gamma}\ w}}}{w\ \Gamma^2(m)\ \overline{\gamma}^m}\ K_m\left(\frac{2\ \sqrt{b}}{\overline{\gamma}\ w}\right)\ , \tag{4.18}$$

каде $K_m$ е модифицирана Беселова функција од втор тип. Со замена на (4.18) во (4.16) CDF-от за дадена вредност на $N$ може да се добие во затворена форма за двете конфигурации на системот. PDF-от на крај-крај SNR-от може да се најде со вадење на извод од CDF-от даден со (4.16) т.е. $f_\Gamma(\gamma) = dF_\Gamma(\gamma)/d\gamma$. Во случај $N = 2$ CDF-от и PDF-от можат лесно да се најдат во затворена форма со користење на формулата за извод од модифицирана беселова функција [39, eq.(9.6.29)] ([42] [20]). За поголеми вредности од $N$ многу е тешко да се најде израз во затворена форма за функцијата на густина на веројатност, а уште потешко е наоѓањето на израз во затворена форма за средната веројатност на грешка со користење на MGF пристапот даден во [35]. Затоа е потребно користење на апроксимативни методи. Со цел да се реши (4.16) во затворена форма, го апроксимиравме $K_m$ со користење на [38, eq.(8.446)]. За мали вредности на променливата $z \to 0$, бесконечната сума во [38, eq.(8.446)] може да се занемари и да се задржи само конечната сума т.е:

$$K_m(z) \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{z}\right)^m \cdot \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \cdot \frac{(m-k-1)!}{k!} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2\ k}\ . \tag{4.19}$$

Со комбинирање на (4.18) и (4.19) во (4.16) се добива следната апроксимација на кумулативната дистрибутивна функција:

$$\begin{aligned} F_{\Gamma_a}(\gamma) \approx 1 - \frac{b^{m/2}}{\Gamma^2(m)\ \overline{\gamma}^m} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k\ \cdot \frac{(m-k-1)!}{k!} \cdot \\ \cdot \frac{d^{m-1}}{d\ w^{m-1}} \left[\frac{\exp\left(-\frac{b+1}{\overline{\gamma}\ w}\right)}{w}\ \cdot \left(\frac{\overline{\gamma}\ w}{\sqrt{b}}\right)^{m-2\ k}\right]\Bigg|_{w=1/\gamma}\ . \end{aligned} \tag{4.20}$$

Со решавање на математичките операции во (4.20) може да се покаже дека апроксимативниот израз за кумулативната дистрибутивна функција за $N$x*1*x$N$ и $N$x$N$x$N$ системите е:

$$\begin{aligned} F_{\Gamma_a}(\gamma) \approx 1 + \frac{1}{\Gamma(m)} \cdot \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m+k+n}\,\Gamma(m-k)\cdot(2\,k+n-m+1)_{m-n-1}}{\Gamma(m-n)} \\ \cdot \frac{(b+1)^n\ b^k}{\Gamma(k+1)\ \Gamma(n+1)} \cdot \left(\frac{\gamma}{\overline{\gamma}}\right)^{n+2\ k} \cdot \exp\left(-\frac{(b+1)\gamma}{\overline{\gamma}}\right)\ . \end{aligned} \tag{4.21}$$

каде $(...)_{...}$ претставува Почхамеров симбол. Со користење на лапласова трансформација $M_{\Gamma_a}(-s) = s \cdot \mathcal{L}\left[F_{\Gamma_a}(\gamma)\right]$ може да се добие функцијата за генерирање на моменти (MGF) за случајната променлива $\gamma$ [35, eq.(1.5)]):

$$\begin{aligned} M_{\Gamma_a}(-s) \approx 1 + \frac{1}{\Gamma(m)} \cdot \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-1)^{k+m+n}\,\Gamma(m-k)\,\Gamma(n+2\,k+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(m-n)} \cdot \\ \frac{(2\,k+n-m+1)_{m-n-1} \cdot (b+1)^n \cdot b^k \cdot s \cdot \overline{\gamma}}{(s \cdot \overline{\gamma} + b + 1)^{n+2\,k+1}}\ . \end{aligned} \tag{4.22}$$

Со вадење на извод од $F_{\Gamma_{\mathrm{a}}}(\gamma)$ во (4.21) или со помош на инверзна лапласова трансформација од $M_{\Gamma_{\mathrm{a}}}(-s)$ во (4.22) се добива функцијата за густина на веројатност (PDF) од $\gamma$:

$$\begin{aligned} f_{\Gamma_{\mathrm{a}}}(\gamma) \approx \frac{1}{\Gamma(m)} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-1)^{k+m+n}\, \Gamma(m-k)\, (2\,k+n-m+1)_{m-n-1}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(m-n)} \cdot \\ \frac{(b+1)^n\, b^k\, [\overline{\gamma}\, (n+2\,k) - (b+1)\, \gamma]\, \gamma^{n+2\,k-1}}{\overline{\gamma}^{n+2\,k+1}} \cdot \exp\left[-\frac{(b+1)\,\gamma}{\overline{\gamma}}\right] . \end{aligned} \tag{4.23}$$

Изразот (4.21) може да се користи за да се добие средната веројатност на грешка, врз база на пристапот во [55]. Во согласност со [55, eq.(4)] средната веројатност на грешка е дадена со:

$$Pe = \int_0^\infty F_\Gamma\left(\frac{x^2}{d}\right) \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}}\, dx, \tag{4.24}$$

каде $d$ е константа одредена од употребената постапка на модулацијата и демодулација (на пример за BPSK со кохерентна демодулација $d=2$). Заменувајќи го апроксимативниот израз за кумулативната дистрибутивна функција од (4.21) во (4.24), со користење на [38, eq.(3.461.2)] и [38, eq.(8.339.2)] добиваме апроксимација за средната веројатност на грешка за двете разгледувани системски конфигурации:

$$\begin{aligned} P_{ea} \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{d\,\overline{\gamma}}}{2\,\sqrt{\pi}\,\Gamma(m)} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m+k+n}\, 2^{n+2\,k}\,\Gamma(m-k)}{\Gamma(m-n)} \\ \cdot \frac{\Gamma\left(n+2\,k+\frac{1}{2}\right)\, (2\,k+n-m+1)_{m-n-1}\, (b+1)^n\, b^k}{\Gamma(k+1)\, \Gamma(n+1)\, (d\,\overline{\gamma}+2\,b+2)^{n+2\,k+\frac{1}{2}}} . \end{aligned} \tag{4.25}$$

Изразите (4.21), (4.22), (4.23), и (4.25) можат да се користат за $N$x*1*x$N$ систем со користење на замените: $m=N$ и$b=c$ и за $N$x$N$x$N$ систем со користење на замените: $m=N^2$ и $b=1$.

## 4.2.2 Апроксимација на ЕР за голем однос сигнал-шум

Врз база на [56, eq.(13)] асимтотската апроксимација на средната веројатност на грешка за голем однос сигнал-шум може да се претстави во следнава форма:

$$P_{eas} = \frac{1}{2 \cdot d^m \cdot m!} \lim_{\gamma \to 0} \frac{d^m\, F_\Gamma(\gamma)}{d\gamma^m} \cdot \prod_{i=1}^{m} (2 \cdot i - 1)\ , \tag{4.26}$$

каде $m$ е продукт од бројот на предавателни и приемни антени на $S$-$R$ и $R$-$D$ делниците и $d$ е константа која зависи од типот на модулацијата кој се користи во (4.24). Доколку во (4.26) замениме $F_\Gamma(\gamma) \approx F_{\Gamma_{\mathrm{a}}}(\gamma)$, $(2\,m-1)!! = (2\,m)!/\,(2^m\, m!)$ и $f_{\Gamma_{\mathrm{a}}}(\gamma) = dF_{\Gamma_{\mathrm{a}}}(\gamma)/d\gamma$ се добива:

$$P_{eas} \approx \frac{\Gamma(2\,m+1)}{2^{m+1}\,\Gamma^2(m+1)\, d^m} \cdot \lim_{\gamma \to 0} \frac{d^{m-1} f_{\Gamma_{\mathrm{a}}}(\gamma)}{d\gamma^{m-1}}\ . \tag{4.27}$$

Доколу се земе во предвид дека $f_{\Gamma_{\mathrm{a}}}^{(i)}(0) = 0$ за $i = 0, 1..m-2$ и теоремата за почетна вредност дадена во [57, eq.(19.1.2.1.9)] равенката (4.27) може да се поедностави во следнава форма:

$$P_{eas} \approx \frac{\Gamma(2\,m+1)}{2^{m+1}\,\Gamma^2(m+1)\, d^m} \cdot \lim_{s \to \infty} s^m\, M_{\Gamma_{\mathrm{a}}}(-s)\ . \tag{4.28}$$

Доколку во изразот во лименсот од (4.28) го замениме $M_{\Gamma_a}(-s)$ од (4.22) и ги комбинираме изразите во форма на една дропка се добива:

$$\lim_{\gamma\to\infty} s^m \, M_{\Gamma_a}(-s) = \frac{b^m+1}{\overline{\gamma}^m} \;. \tag{4.29}$$

Ако се замени (4.29) во (4.28) ќе добиеме дека асимптотската апроксимација на веројатноста за грешка за голем SNR е:

$$P_{eas} \approx \frac{\Gamma\,(2\;m+1)\cdot(b^m{+}1)}{2^{m+1}\cdot\Gamma^2\,(m+1)\cdot d^m\cdot\overline{\gamma}^m} \;. \tag{4.30}$$

Претходниот израз може да се користи за пресметка на асимптотската апроксимација на средната веројатност на грешка за $N$x*1*x$N$ систем ($m = N$ и $b = c$) и за $N$x$N$x$N$ систем ($m = N^2$ и $b = 1$).

## 4.2.3 Раздвојување на OSTBC кодовите од повисок ред

За потребите на нумеричката анализа која ќе биде спроведена во глава 4.2.4 потребно е анализата од глава 4.1 да се претстави со користење на линеарна алгебра. Во глава 4.2.4 ќе бидат користени 222 2x1 и 2x2 OSTBC кодови чие раздвојување е прикажано во главите 3.3.2 и 3.3.4 и 334 (3x1) и 434 (4x1) OSTBC кодови кои се раздвојуваат на следниов начин.

**Раздвојување за 334 OSTBC код**Векторот кој ги претставува симболите испратени во изворот $X$ и каналната матрица (вектор) $H$ се:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

Шумот во делницата од изворот до релето и помошната променлива за шумот се:

$$\mathbf{N} := \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N}_a = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3^* & n_4^* \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

Кодна матрица за 334 OSTBC кодот е:

$$\mathbf{C}_{334} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2^* & x_1^* & 0 \\ x_3^* & 0 & -x_1^* \\ 0 & x_3^* & -x_2^* \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

Еквивалентната виртуелна канална матрица и нејзината транспонирана матрица се дадени со:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2^* & -h_3^* & 0 \\ h_2 & -h_1^* & 0 & -h_3^* \\ h_3 & 0 & h_1^* & h_2^* \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{\Omega}^T = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_2^* & -h_1^* & 0 \\ -h_3^* & 0 & h_1^* \\ 0 & -h_3^* & h_2^* \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

Приемниот сигнал во релето е:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} x_1h_1 + x_2h_2 + x_3h_3 + n_1, & -x_2^*h_1 + x_1^*h_2 + n_2, & x_3^*h_1 - x_1^*h_3 + n_3, & x_3^*h_2 - x_2^*h_3 + n_4, \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

Модифицираната верзија од сигналот даден со (4.35) е:

$$\begin{gathered} \mathbf{Y}_a = [y_1, y_2^*, y_3^*, y_4^*] = \\ = \begin{bmatrix} x_1h_1 + x_2h_2 + x_3h_3 + n_1, & -x_2h_1^* + x_1h_2^* + n_2^*, & x_3h_1^* - x_1h_3^* + n_3^*, & x_3h_2^* - x_2h_3^* + n_4^* \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{4.36}$$

Модифицираната верзија од сигналот може да се добие и директно со користење на EVCM:

$$\mathbf{Y}_a = \mathbf{X} \cdot \mathbf{\Omega} + \mathbf{N}_a \tag{4.37}$$

Раздвоениот сигнал во една антена од релето е:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{Y}_a \cdot \mathbf{\Omega}^H &= \begin{bmatrix} y_1 h_1^* + y_2^* h_2 - y_3^* h_3, & y_1 h_2^* - y_2^* h_1 - y_4^* h_3, & y_1 h_3^* + y_3^* h_1 + y_4^* h_2 \end{bmatrix} \\ &= \Big[ \left(|h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_3|^2\right) x_1 + h_1^* n_1 + h_2 n_2^* - h_3 n_3^*, \\ \left(|h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_3|^2\right) x_2 &+ h_2^* n_1 - h_1 n_2^* - h_3 n_4^*, \left(|h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_3|^2\right) x_3 + h_3^* n_1 + h_1 n_3^* + h_2 n_4^* \Big]\end{aligned} \tag{4.38}$$

**Раздвојување за 434 OSTBC код**Векторот кој ги претставува симболите испратени во изворот $X$ и каналната матрица (вектор) $H$ се:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

Шумот во делницата од изворот до релето и помошната променлива за шумот се:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N}_a = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3^* & n_4^* \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

Кодна матрица за 434 OSTBC кодот е:

$$\mathbf{C}_{434} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \frac{1}{2} x_3 \sqrt{2} & \frac{1}{2} x_3 \sqrt{2} \\ -x_2^* & x_1^* & \frac{1}{2} x_3 \sqrt{2} & -\frac{1}{2} x_3 \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} x_3^* \sqrt{2} & \frac{1}{2} x_3^* \sqrt{2} & -\frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_1^* + \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_2^* & -\frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_2^* + \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_1^* \\ \frac{1}{2} x_3^* \sqrt{2} & -\frac{1}{2} x_3^* \sqrt{2} & \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_2^* + \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_1^* & -\frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_1^* - \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_2^* \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

Приемниот сигнал во релето е:

$$\begin{aligned} &\mathbf{Y} = \mathbf{C}_{434} \cdot \mathbf{H}^T = \\ &\Big[ x_1 h_1 + x_2 h_2 + \tfrac{1}{2} x_3 \sqrt{2} h_3 + \tfrac{1}{2} x_3 \sqrt{2} h_4 + n_1, \quad -x_2^* h_1 + x_1^* h_2 + \tfrac{1}{2} x_3 \sqrt{2} h_3 - \tfrac{1}{2} x_3 \sqrt{2} h_4 + n_2, \\ &\frac{1}{2} x_3^* \sqrt{2} h_1 + \frac{1}{2} x_3^* \sqrt{2} h_2 + \frac{1}{2} \cdot \left(-x_1 - x_1^* + x_2 - x_2^*\right) h_3 + \frac{1}{2} \cdot \left(-x_2 - x_2^* + x_1 - x_1^*\right) h_4 + n_3, \\ &\frac{1}{2} x_3^* \sqrt{2} h_1 - \frac{1}{2} x_3^* \sqrt{2} h_2 + \frac{1}{2} \cdot \left(x_2 + x_2^* + x_1 - x_1^*\right) h_3 + \frac{1}{2} \cdot \left(-x_1 - x_1^* - x_2 + x_2^*\right) h_4 + n_4 \Big] \end{aligned} \tag{4.42}$$

Поединечните раздвоени симболи се добиваат [58, ch.(3.6)]:

$$\begin{aligned} &\tilde{x}_1 = y_1 h_1^* + y_2^* h_2 + \frac{1}{2} \left(y_4 - y_3\right)\left(h_3^* - h_4^*\right) - \frac{1}{2} \left(y_3^* + y_4^*\right)\left(h_3 + h_4\right) = \\ &= -\frac{1}{2} h_3 n_4^* + h_2 n_2^* - \frac{1}{2} h_3 n_3^* + h_1^* n_1 - \frac{1}{2} h_4^* n_4 + \frac{1}{2} n_4 h_3^* - \frac{1}{2} n_3 h_3^* + \frac{1}{2} n_3 h_4^* - \frac{1}{2} n_3^* h_4 - \frac{1}{2} n_4^* h_4 \end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2 &= y_1 h_2^* - y_2^* h_1 + \frac{1}{2} \left(y_4 + y_3\right)\left(h_3^* - h_4^*\right) + \frac{1}{2} \left(y_4^* - y_3^*\right)\left(h_3 + h_4\right) \\ &= \left(|h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_3|^2 + |h_4|^2\right) \cdot x_2 - h_1 n_2^* + h_2^* n_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left(h_3 n_4^* - h_3 n_3^* - h_4^* n_4 + n_4 h_3^* + n_3 h_3^* - n_3 h_4^* - n_3^* h_4 + n_4^* h_4\right) \end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_3 &= \frac{1}{2} \left(y_1 + y_2\right) h_3^* \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left(y_1 - y_2\right) h_4^* \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left(h_1 + h_2\right) y_3^* \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left(h_1 - h_2\right) y_4^* \sqrt{2} \\ &= \left(|h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_3|^2 + |h_4|^2\right) \cdot x_3 - \\ - \frac{1}{2} \cdot &\Big( h_4^* \sqrt{2} n_2 + \sqrt{2} h_1 n_4^* + \sqrt{2} h_2 n_3^* + h_3^* \sqrt{2} n_1 + \sqrt{2} h_1 n_3^* - \sqrt{2} h_2 n_4^* + h_3^* \sqrt{2} n_2 + h_4^* \sqrt{2} n_1 \Big) \end{aligned} \tag{4.45}$$

## 4.2.4 Нумерички и симулациски резултати

Во оваа глава ќе биде илустрирана точноста на апроксимациите презентирани во главите 4.2.1 и 4.2.2. Прво ќе бидат потврдени апроксимациите за ЕР за различен број на антени $N$ во споредба со: (а) точните вредности добиени со нумеричка интеграција на соодветни интеграли, и (b) точните вредности добиени со Монте Карло симулации. Во сликите прикажани во оваа нумеричка анализа ќе се користи кратенката „sim“ доколку кривата е добиена со користење на Монте-Карло симулација, кратенката „num“ доколку кривата е добиена со нумеричка интеграција на соодветната MGF функција, кратенката „asy“ доколку кривата е добиена со асимптотскиот израз (4.30) и кратенката „app“ доколку кривата е добиена со точниот апроксимативен израз (4.25).

На слика 4.2 се презентирани BEP резултатите за $N$x*1*x$N$ систем кој користи до 7 антени во изворот и дестинацијата за $E_s = P_T/N$ т.е. $c = 1/N$. Кривите со полна линија ги претставуваат резултатите добиени со изразот за апроксимација на веројатноста на грешка (4.25) и кривите со испрекинати линии претставуваат резултати добиени од изразот за асимптотска апроксимација на веројатноста на грешка (4.30). Треба да се напомене дека соодветните криви за $N > 7$ можат лесно да се добијат. Слично, на слика 4.3 се дадени BEP резултатите за $N$x$N$x$N$ систем со до 7 антени во изворот, релето и дестинацијата за $E_s = P_T/N$. Полната линија ги претставува резултатите добиени со користење на изразот за апроксимација на веројатноста на грешка (4.25), и точкастите линии ги претставуваат резултатите добиени со користење на изразот за асимптотска апроскимација на веројатноста за грешка (4.30). Сите резултати се добиваат многу лесно со правилен избор на точноста на пакетот за нумеричка анализа.

Во анализата ќе се фокусираме на неколку OSTBC шеми, како 222, 334, и 434, и ќе ги воспоставиме нивните соодветни точни и апроксимативни веројатности за грешка кога ќе се применат на разгледуваниот систем (слика 4.1). Согласно на [50] и [59] кодните матрици за овие шеми се дадени со:

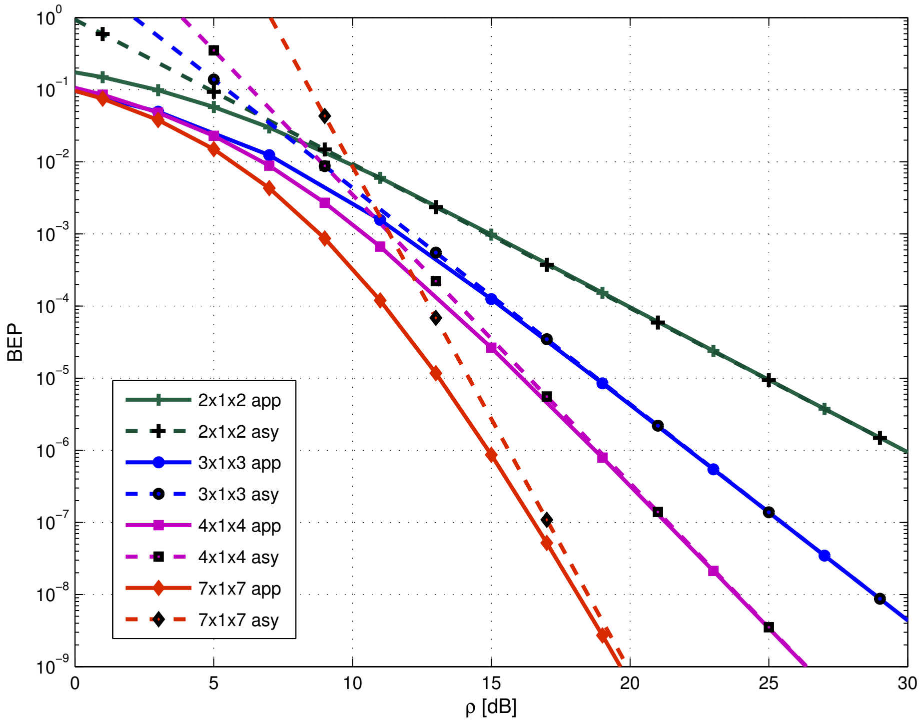
$$\mathbf{C}_{222} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2^* & x_1^* \end{bmatrix}, \ \mathbf{C}_{334} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2^* & x_1^* & 0 \\ x_3^* & 0 & -x_1^* \\ 0 & x_3^* & -x_2^* \end{bmatrix} ,$$
$$\mathbf{C}_{434} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3/\sqrt{2} & x_3/\sqrt{2} \\ -x_2^* & x_1^* & x_3/\sqrt{2} & -x_3/\sqrt{2} \\ x_3/\sqrt{2} & x_3/\sqrt{2} & \frac{(-x_1-x_1^*+x_2-x_2^*)}{2} & \frac{(-x_2-x_2^*+x_1-x_1^*)}{2} \\ x_3^*/\sqrt{2} & -x_3^*/\sqrt{2} & \frac{(x_2+x_2^*+x_1-x_1^*)}{2} & -\frac{(x_1+x_1^*+x_2-x_2^*)}{2} \end{bmatrix} . \tag{4.46}$$

За OSTB кодовите дадени во (4.46) средната моќност по симбол се пресметува како:

$$E_s = P_T \cdot c, \qquad c = \frac{L}{K\,N} . \tag{4.47}$$

Применските симболи во една релејна антена за 222, 334 и 434 OSTBC кодови се раздвојуваат согласно на [50] [51] (Процесот на раздвојување е детално анализиран во главите 3.3.2, 3.3.3 и 4.2.3) :

$$\widetilde{\mathbf{X}}_{222}^T = [y_1 h_1^* + y_2^* h_2,\ y_1 h_2^* - y_2^* h_1] ,$$
$$\widetilde{\mathbf{X}}_{334}^T = [y_1 h_1^* + y_2^* h_2 - y_3^* h_3,\ y_1 h_2^* - y_2^* h_1 - y_4^* h_3,\ y_1 h_3^* + y_3^* h_1 + y_4^* h_2] ,$$
$$\widetilde{\mathbf{X}}_{434} = \begin{bmatrix} y_1 h_1^* + y_2^* h_2 + \frac{(y_4-y_3)\left(h_3^*-h_4^*\right)}{2} - \frac{\left(y_3^*+y_4^*\right)(h_3+h_4)}{2} \\ y_1 h_2^* - y_2^* h_1 + \frac{(y_4+y_3)\left(h_3^*-h_4^*\right)}{2} + \frac{\left(y_4^*-y_3^*\right)(h_3+h_4)}{2} \\ \frac{(y_1+y_2)\ h_3^*}{\sqrt{2}} + \frac{(y_1-y_2)h_4^*}{\sqrt{2}} + \frac{(h_1+h_2)y_3^*}{\sqrt{2}} + \frac{(h_1-h_2)y_4^*}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} . \tag{4.48}$$



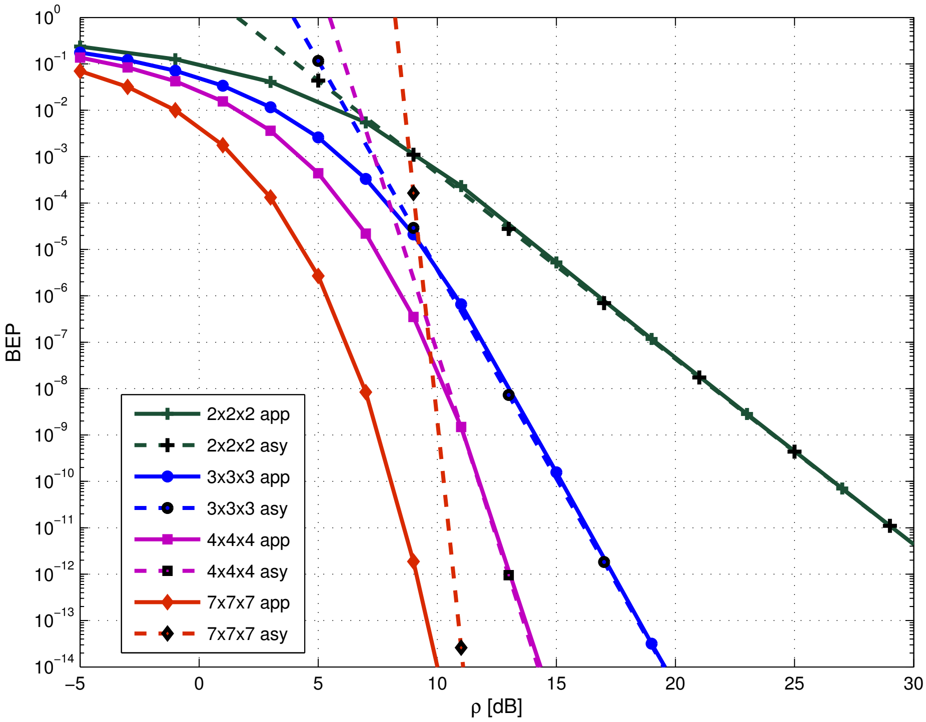

**Слика 4.2:** BEP за МИМО 2x1x2/3x1x3/4x1x4/7x1x7 AF релејни канали.

На слика 4.4 е прикажана BEP за 2x1x2 систем со Аламути кодирање [17], 3x1x3 со 334 OSTBC и 4x1x4 со 434 OSTBC. На сликата се споредени резултатите добиени со Монте Карло симулации, резултатите добиени со апроксимациите (4.25) и (4.30) за $m = N$ и $b = c$ и точните резултати добиени со нумеричка интеграција на [35, eq.(9.15)] и користење на изразот за MGF добиен со пристапот прикажан во [42]. Споредбата покажува поклопување на резултатите добиени со апроксимацијата (4.25), точните резултати добиени со нумеричка интеграција и резултатите добиени со симулација.

На слика 4.5 е дадена BEP за 2x2x2, 3x3x3 и 4x4x4 системите кои користат OSTBC дадени со (4.46). На сликата се презентирани BEP за 2x2x2, 3x3x3 и 4x4x4 системите кои користат OSTBC даден со (4.46). На сликата се претставени споредбите за резултатите добиени со помош на симулација, резултатите добиени со користење на изразот за апроксимација на веројатноста за грешка (4.25), резултатите добиени со асимптотска апроксимација на веројатноста за грешка (4.30) и резултатите добиени со нумеричка интеграција на MGF дадена во [45, eq.(15)] со користење на [35, eq.(9.15)]. За споредбите е употребена MGF презентирана во [45] заради подобрата пресметковна ефикасност. Повторно, споредбата покажува точно преклопување на резултатите добиени со апроксимацијата (4.25), нумеричката интеграција и симулацијата.

На слика 4.6 е прикажана споредбата на резултатите добиени со (4.25) и (4.30) со горните граници добиени од [44, eq.(15)] и [44, eq.(16)] за 2x1x2 и 4x1x4 системи кои користат 222 и 434 OSTB кодови. Резултатите добиени со апроксимациите (4.25) и (4.30) многу поточно ги следат точните резултати во споредба со горните граници дадени со [44, eq.(15)] и [44, eq.(16)]. На пример за 2x1x2 систем и BEP од $10^{-4}$ резултатите добиени со (4.25) и (4.30) се поточни од [44, eq.(15)] и [44, eq.(16)] за приближно $5dB$.

На слика 4.7 се претставени споредбите на апроксимациите (4.25) и (4.30) и горните граници добиени со [44, eq.(15)] и [44, eq.(16)] за 2x2x2 и 4x4x4 системи кои користат 222 и 434 OSTB кодови. Резултатите добиени со апроксимациите (4.25) и (4.30) поточно




**Слика 4.3:** BEP за МИМО 2x2x2/3x3x3/4x4x4/7x7x7 AF релејни канали.

ги следат точните резултати во споредба со горните граници дадени со [44, eq.(15)] и [44, eq.(16)]. На пример, за 2x2x2 систем и BEP од $10^{-4}$ (4.25) и (4.30) се поточни од [44, eq.(15)] и [44, eq.(16)] за приближно $4dB$.

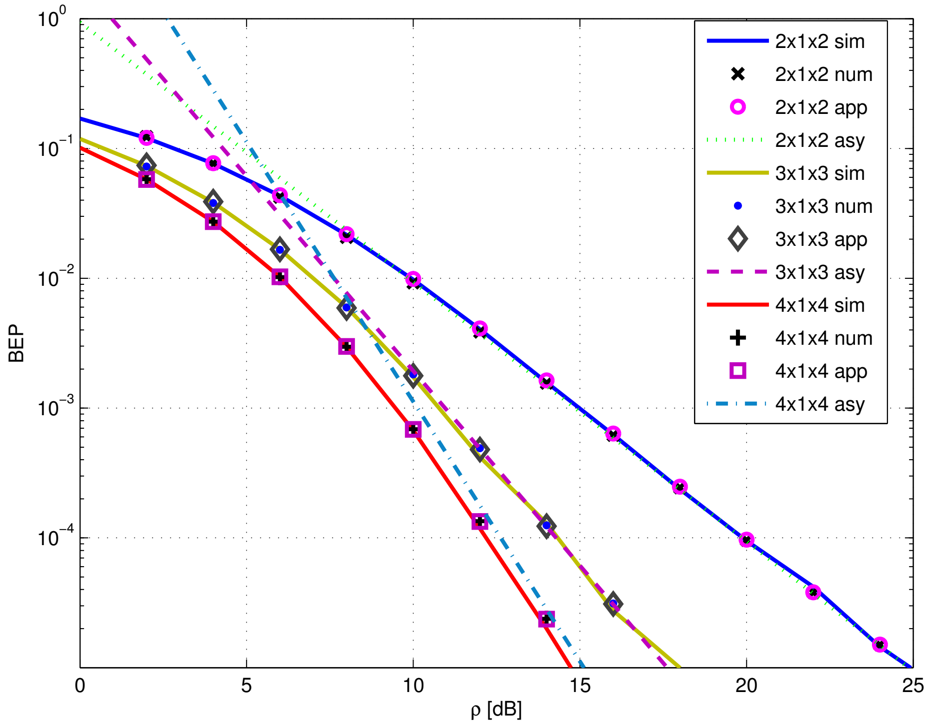
За упростување на математичката анализа во наредните глави во изразот за BEP (4.25) ќе земеме $k = 0$ со што се добива грубата апроксимација за средната веројатност на грешка за двете системски конфигурации:

$$P_{el} \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{d\,\overline{\gamma}}}{2\,\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{m-1} \frac{2^n\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)(b+1)^n}{\Gamma\left(n+1\right)\ \left(d\,\overline{\gamma}+2\,b+2\right)^{n+\frac{1}{2}}}\,. \tag{4.49}$$

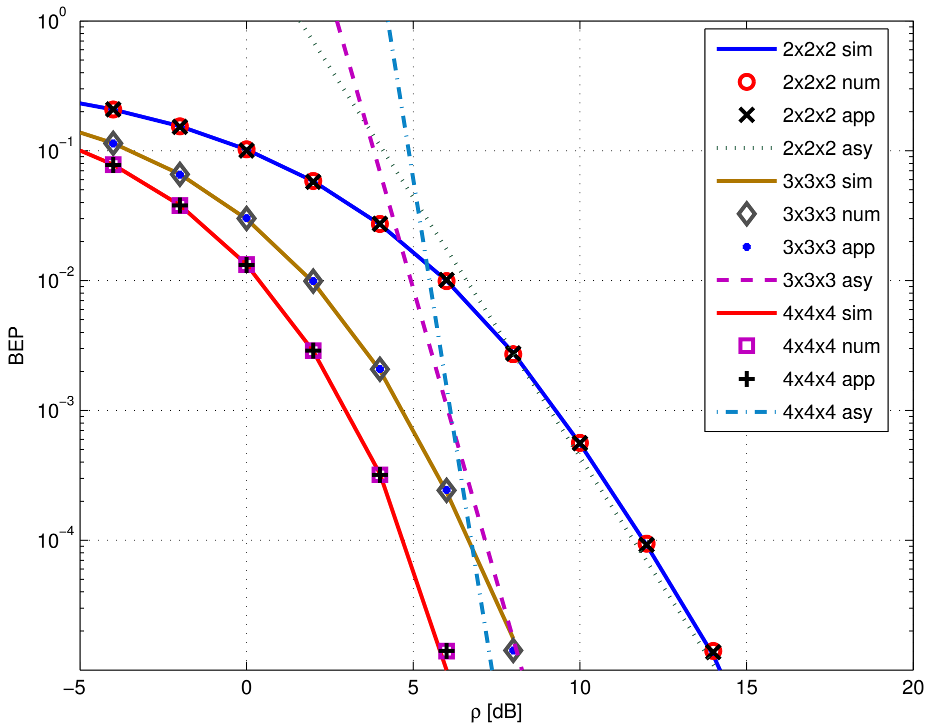
Изразот (4.49) може да се користи за $N$x$1$x$N$ систем со користење на замените: $m = N$ и $b = c$ и за $N$x$N$x$N$ систем со користење на замените: $m = N^2$ и $b = 1$.

Во продолжението на оваа глава ќе ја илустрираме точноста на грубата апроксимација за веројатност на грешка 4.49. Ќе ја валидираме нејзината точност за различен број на антени $N$ со споредба со: (a) точните вредности добиени со нумеричка интеграција на соодветните MGF функции, и (b) точните вредности добиени со Монте Карло симулации. Како и претодно се фокусираме на неколку практични OSTBC шеми, 222, 334 и 434 во разгледуваниот систем од слика 4.1. Употребуваните кодни матрици се согласно (4.46) и применитe симболи во дестинацијата се раздвојуваат согласно (4.48). Во сликите прикажани во оваа нумеричка анализа ќе се користи кратенката „sim“ доколку кривата е добиена со користење на Монте-Карло симулација, кратенката „num“ доколку кривата е добиена со нумеричка интеграција на соодветната MGF функција, кратенката „ap1“ доколку кривата е добиена со точниот апроксимативен израз (4.25) и кратенката „ap2“ доколку кривата е добиена со грубиот апроксимативен израз (4.49).

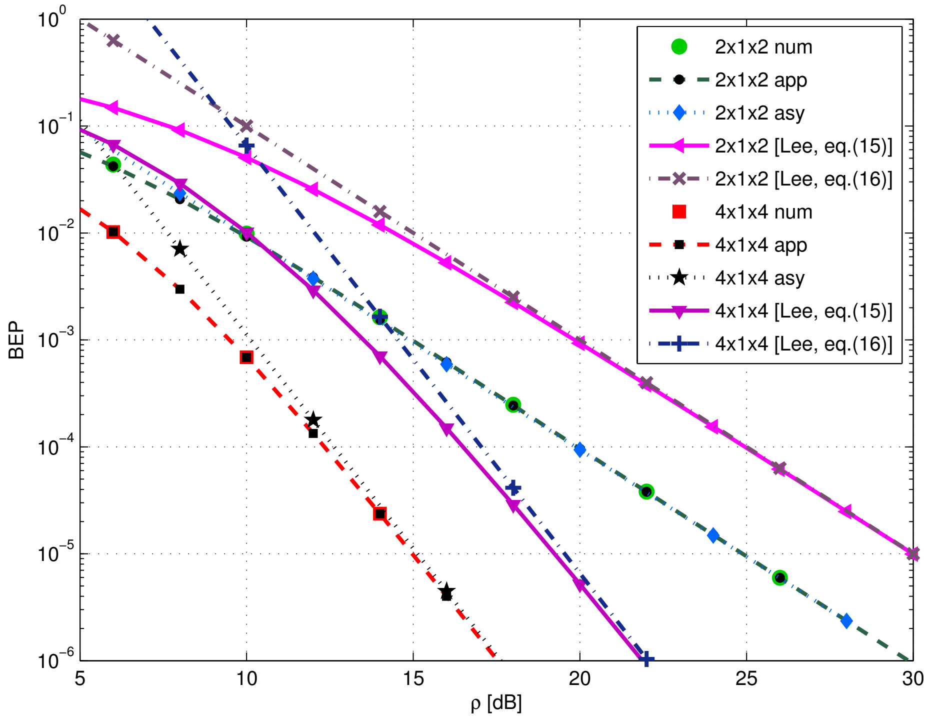
На слика 4.8 е дадена веројатноста на грешка за $2$x$1$x$2$ систем со Аламути кодирање [17], 3x1x3 со 334 OSTBC и 4x1x4 систем со 434 OSTBC. За овие системи се споредуваат резултатите добиени со Монте Карло симулацијата, многу точните апроксимации добиени



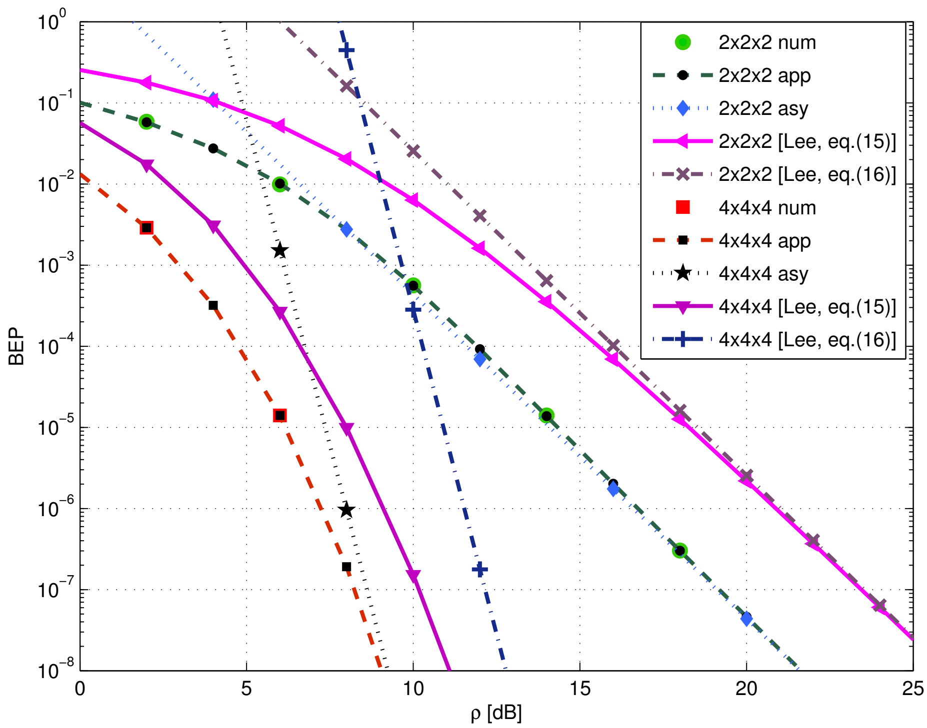

**Слика 4.4:** BEP за МИМО 2x1x2/3x1x3/4x1x4 AF релејни канали со 222/334/434 OSTBC.



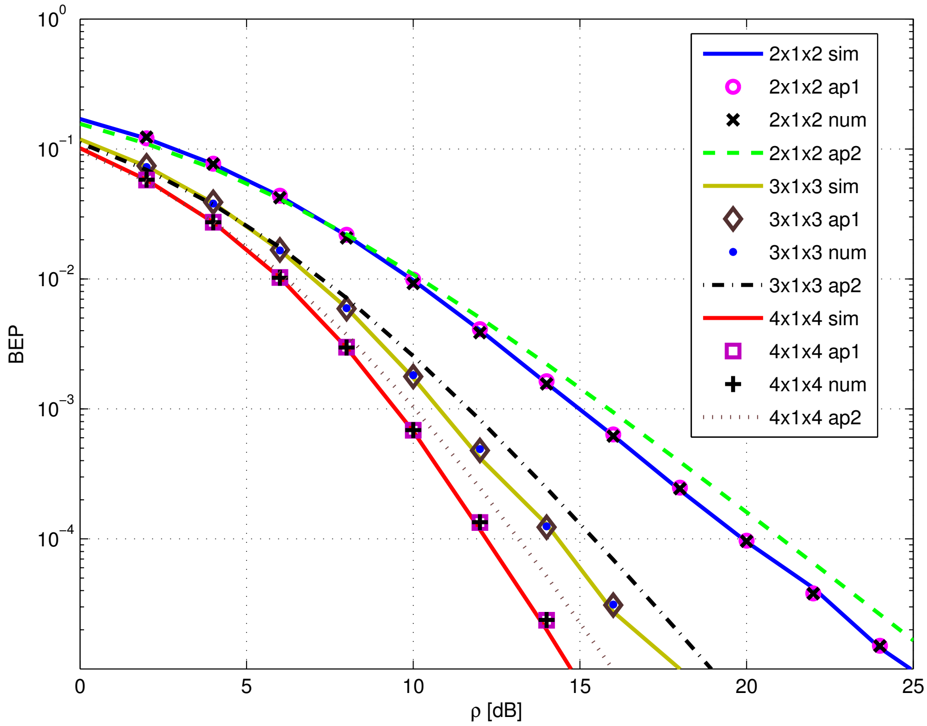

**Слика 4.5:** BEP за МИМО 2x2x2/3x3x3/4x4x4 AF релејни канали со 222/334/434 OSTBC.




**Слика 4.6:** Споредба на BEP апроксимациите за МИМО 2x1x2 и 4x1x4 AF релејни канали со горните граници добиени во [44, eq.(15)] и [44, eq.(16)].




**Слика 4.7:** Споредба на BEP апроксимациите на МИМО 2x2x2 и 4x4x4 AF релеен канал со горните граници добиени со [44, eq.(15)] и [44, eq.(16)].

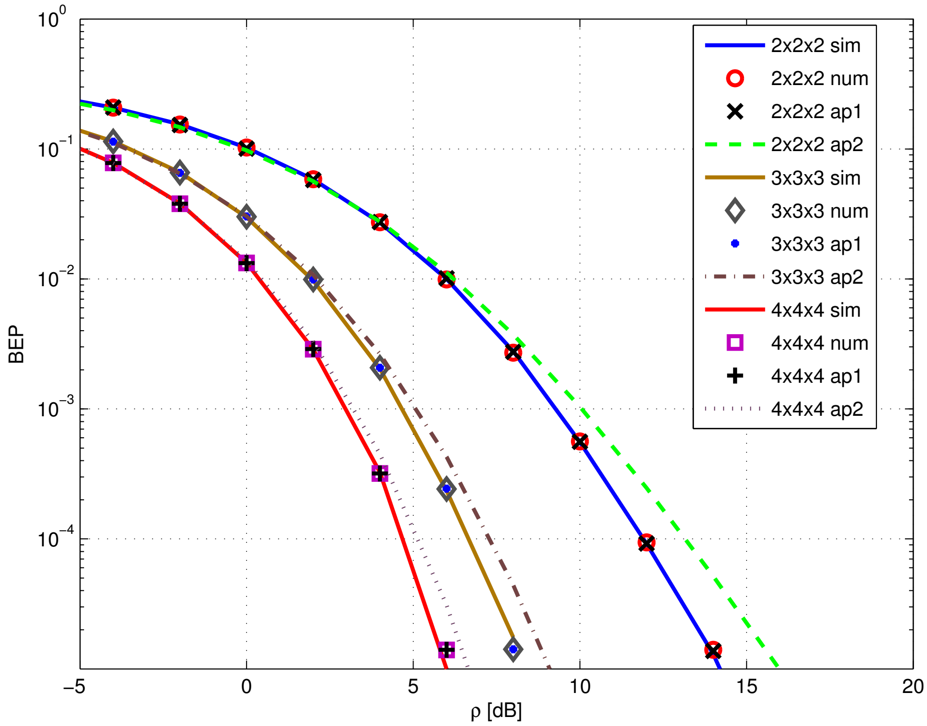



**Слика 4.8:** BEP за дво-делнични МИМО 2x1x2/3x1x3/4x1x4 AF системи со BPSK и 222/334/434 OSTB кодирање.

со (4.25), грубата апроксимација претставена со (4.49) и точните резултати добиени со нумеричка интеграција на [35, eq.(9.15)] со користење на изразите за MGF добиени во [42]. Параметарот $\rho$ кој се користи на хоризонталната оска претставува вкупен среден SNR. Споредбата покажува блиска усогласеност на резултатите добиени со прецизната апроксимација (4.25), точните резултати добиени со нумеричка интеграција и симулацијата како и добра усогласеност со грубата апроксимација (4.49).

На слика 4.9 е презентирана веројатноста за грешка за *2*x*2*x*2*, *3*x*3*x*3* и *4*x*4*x*4* систем со користење на OSTBC дадена со (4.46). На сликата е дадена споредба на резултатите добиени со помош на симулација, резултатите добиени со користење на изразот за прецизна апроксимација (4.25), резултатите добиени со користење на изразот за груба апроксимација (4.49) и резултатите добиени со нумеричка интеграција на MGF-от даден во [45, eq.(15)] со користење на [35, eq.(9.15)]. Го избравме MGF-от презентиран во [45] заради подобрата нумеричка ефикасност. Споредбата покажува блиска усогласеност на резултатите добиени со прецизната апроксимација (4.25), точните резултати добиени со нумеричка интеграција и симулација како и добра усогласеност со грубата апроксимација (4.49).

За двете системски конфигурации усогласеноста на точните резултати со резултатите добиени со грубата апроксимација е подобра за помали вредности на односот сигнал-шум и е полоша за поголеми вредности на односот сигнал-шум.
Со анализата на резултатите во 4.8 и 4.9 покажавме дека резултатите добиени со грубата апроксимација на BEP добро се усогласени со точните вредности добиени со симулација, нумеричка интеграција и блиската апроксимација 4.25. Усогласеноста на резултатите е подобра за помали вредности на односот сигнал-шум.




**Слика 4.9:** BEP за дво-делнични МИМО 2x2x2/3x3x3/4x4x4 AF системи со BPSK и 222/334/434 OSTB кодирање.

# 4.3 Веројатност на испад

Во оваа глава ќе ги презентираме апроксимации за веројатноста за испад (OP) за целиот однос сигнал-шум кој е од практичен интерес за AF релејните канали со информации за каналот достапни во релето и дестинацијата, кои користат повеќе антени во јазлите и OSTBC пренос преку рамен Рејлиев фединг. За анализата на веројатноста за испад го користиме истиот релеен канал претставен на слика 4.1 и чиј модел е опишан во глава 4.2. Имено, ќе бидат дадени апроксимации на веројатноста на испад на дво-делничниот DCF релеен канал, кој се состои од извор, DCF полу-дуплексно реле и дестинација, при што сите јазли се екипирани со повеќе антени и користат OSTBC пренос во Рејлиев фединг. Во AF релето, влезниот сигнал се раздвојува, засилува и испраќа кон дестинацијата. Ние дојдовме до универзална апроксимација за веројатноста за испад за тие системи, која се покажува многу прецизна за сите SNR вредности кои се од практичен интерес. Исто така прецизната апроксимација ја упростивме со што добивме груба апроксимација на OP. Резултатите за веројатноста за испад добиени со прецизната и грубата апроксимација ќе се споредат со точните резултати на веројатноста на испад добиени со нумеричка инверзија на лапласовата трансформација на функцијата за генерирање на моменти и со резултатите добиени со Монте Карло симулации. Споредбата покажува добро преклопување на резултатите [61].

Веројатноста за испад (OP) е дефинирана како веројатност дека моменталниот SNR ќе падне под одреден праг $\gamma_{th}$. Имајќи го во предвид изразот (4.21) веројатноста за испад може да се добие како:

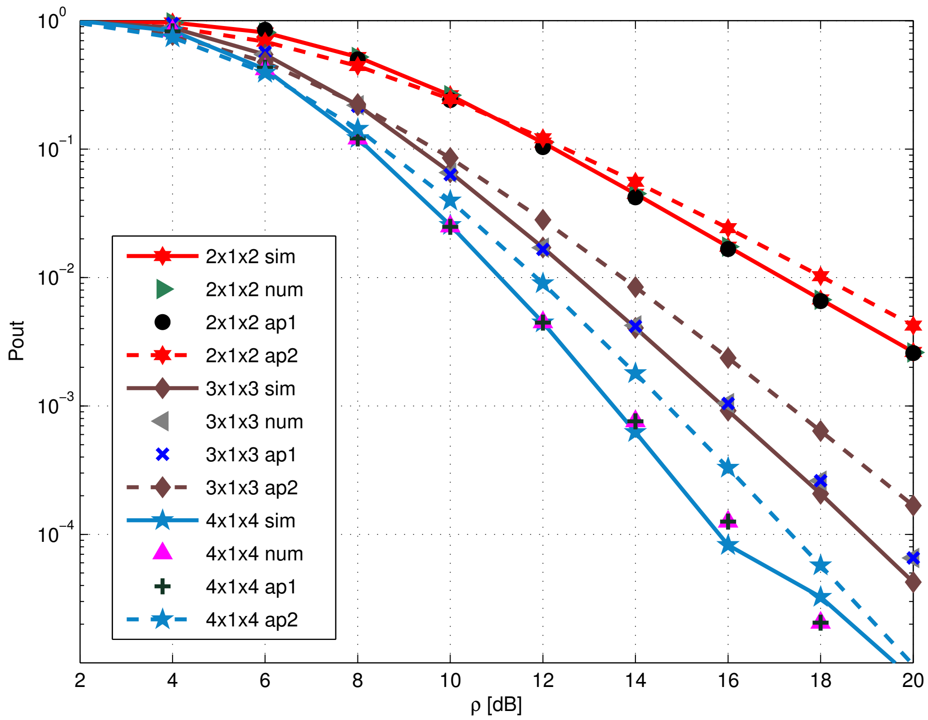
$$P_{\text{out}} = P\left(\gamma < \gamma_{th}\right) = F_{\Gamma}\left(\gamma\right)\big|_{\gamma=\gamma_{th}} \approx F_{\Gamma_a}\left(\gamma\right)\big|_{\gamma=\gamma_{th}}. \tag{4.50}$$

Со замена на (4.14) во (4.15) може да ги најдеме точните вредности на OP со помош на нумеричка инверзија на лапласовата трансофрмација и со користење на (4.50) може да добиеме точни апроксимации на веројатноста за испад за двете системски конфигурации ($N$x$1$x$N$ и $N$x$N$x$N$). Со цел да се симплифицира изразот (4.21) ги земаме во предвид само членовите каде $k = 0$. Оваа симплификација води кон груба апроксимација на веројатноста за испад:

$$P_{\text{out}} \approx 1 - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(b+1)^n}{n!} \cdot \left(\frac{\gamma_{th}}{\overline{\gamma}}\right)^n \cdot \exp\left(-\frac{(b+1)\gamma_{th}}{\overline{\gamma}}\right). \tag{4.51}$$

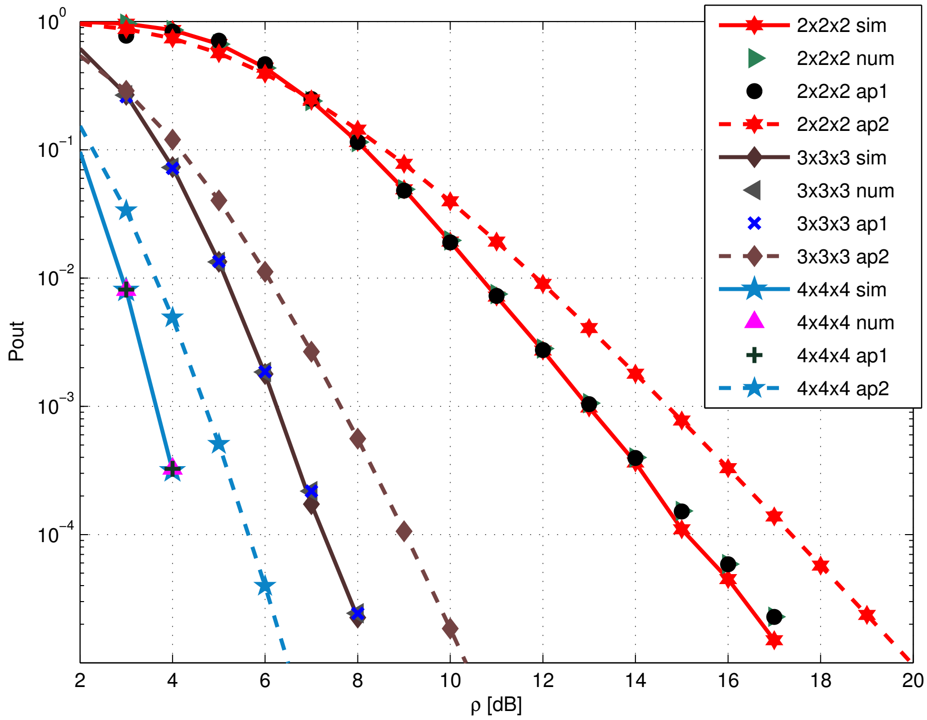
Претходните изрази може да се користат за пресметка на прецизната (4.50) и грубата (4.51) апроксимација на веројатноста за испад за $N$x$1$x$N$ систем ($m = N$ и $b = c$) и за $N$x$N$x$N$ system ($m = N^2$ и $b = 1$).

Во продолжението на оваа глава ќе ја илустрираме точноста на нашите апроксимации. На почеток ќе ги споредиме апроксимациите на веројатноста за испад за различен број на антени $N$ со споредба на: (a) точните вредности добиени со нумеричка инверзија на Лапласовата трансформација на функцијата за генерирање на моменти, и (b) на вредностите добиени со Монте Карло симулации.




**Слика 4.10:** OP за AF МИМО релеен канал со реле со една антена ($\gamma_{th} = 5dB$).

За инверзната Лапласова трансформација се користи Ојлеровата нумеричка техника дадена во ([64, eq.(12)], [64, eq.(13)]). Ќе се фокусираме на истите OSTBC шеми презентирани во главите 3.3.2, 3.3.4 и 4.2.4 (222, 334 и 434). Во сликите прикажани во оваа нумеричка анализа ќе се користи кратенката „sim“ доколку кривата е добиена со користење на Монте-Карло симулација, кратенката „num“ доколку кривата е добиена со нумеричка интеграција на соодветната MGF функција, кратенката „ap1“ доколку кривата е добиена со точниот апроксимативен израз (4.50) и кратенката „ap2“ доколку кривата е добиена со грубиот апроксимативен израз (4.51).



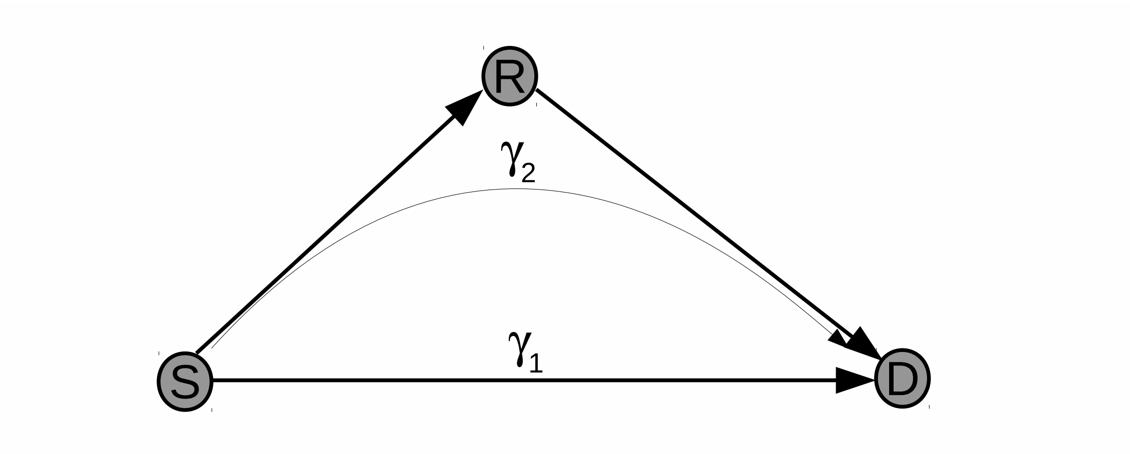

**Слика 4.11:** OP за AF МИМО релеен канал со реле со повеќе антени ($\gamma_{th} = 5dB$).

На слика 4.10 се презентирани резултатите за веројатноста за испад за $N$x*1*x$N$ систем со максимум 4 антени во изворот и дестинацијата. Кривите со полна линија ги претставуваат резултатите за веројатноста на испад добиени со Монте Карло симулации, триаголните маркери ги претставуваат точните OP резултати добиени со нумеричка инверзија на лапласовата трансформација (4.15), кривите со испрекинати линии ги претставуваат резултатите добиени со грубата апроксимација (4.51) и останатите маркери (o, x и +) ги претставуваат резултатите добиени со изразите за точни апроксимации на веројатноста на испад (4.50). Треба да се напомене дека соодветните криви за $N > 4$ можат лесно да се добијат. Слично на слика 4.11 се претставени OP резултатите за $N$x$N$x$N$ систем со максимум 4 антени во изворот, релето, и дестинацијата. Кривите со полни линии ги претставуваат OP резултатите добиени со Монте Карло симулации, триаголнестите маркери претставуваат точни OP резултати кои се добиени со нумеричка инверзија на Лапласовата трансформација (4.15), кривите со испрекинати линии претставуваат резултати добиени со грубата апроксимација (4.51) и преостанатите маркери (o, x и +) ги претставуваат резултатите добиени со користење на изразот за прецизна апроксимација на веројатноста на испад (4.50). Двете споредби покажуваат преклопување на резултатите добиени со апроксимација (4.50), точните резултати добиени со нумеричка инверзија на Лапласовата трансформација и резултатите добиени со Монте Карло симулации.

Во оваа глава ја анализиравме веројатноста на испад на дво-делничен релеен канал со повеќе антени во изворот релето и дестинацијата кој користи OSTBC и засили-и-проследи постапка во релето. За тие системи изведовме генерализирани изрази во затворена форма за прецизна (4.50) и груба (4.51) апроксимација на веројатноста за испад. Покажавме дека резултатите добиени со нашите апроксимации блиску ги следат точните резултати и резултатите добиени со Монте Карло симулации.

# 4.4 МИМО релеен канал: Вклучување на директна патека во анализата

Во главите 4.2 и 4.3 беа анализирани перформансите на МИМО релејните канали кај кои нема директна патека од изворот до дестинацијата. Тоа е случај кога испратениот сигнал од изворот во дестинацијата е многу слаб или воопшто не постои. Во таков случај дестинацијата го реконструира испратениот сигнал само врз основ на испратениот сигнал во релето. Ваквите ситеми често се нарекуваат каскадни релејни канали. Во оваа глава анализата ќе ја прошириме со вклучување на директна патека од изворот до дестинацијата.




**Слика 4.12:** Релеен канал со директна патека до дестинацијата

Информациско-теоретската анализа во 2 покажа дека користењето на реле кое ја помага комуникацијата може да доведе до зголемување на капацитетот на системот. Доколку се разгледува изразот за засили-и-проследи 2.231 може да се види дека резултантниот однос сигнал-шум е сума од две случајни променливи: односот сигнал-шум на делницата од изворот до дестинацијата и еквивалентниот однос сигнал-шум на делницата која го вклучува и релето (види слика 4.12). Во оваа глава ќе ги разгледуваме перформансите на овој релеен канал за случај кога релето користи засили-и-проследи под претпоставка дека односот сигнал-шум во делницата од изворот до дестинацијата е статистички независен од еквивалентниот однос сигнал-шум на делницата која го вклучува релето.

## 4.4.1 Едноставен израз за PDF за МИМО RC без директна патека

Во оваа глава ќе го упростиме изразите за CDF (4.21) и PDF (4.23) за засили-и-проследи МИМО релеен канал без директна патека до дестинацијата, кој користи OSTBC пренос во Рејлиев фединг [62]. Ова упростување е неопходно за едноставна математичката анализа на перформансите на МИМО релејниот канал со директна патека до дестинацијата. Точноста на ова упростување претходно ја проверивме за системот без директна патека преку анализа на грубите апроксимации за ЕР во глава 4.2 и грубата апроксимација за ОР во глава 4.3 кои се добиваат со користење на предложеното упростување.

Следејќи го пристапот за добивање на 4.49 и 4.51 за да се поедностави изразот (4.21) се земаат само членовите каде $k = 0$ што резултира во груба апроксимација на CDF:

$$F_{\Gamma_l}(\gamma) \approx 1 - \exp\left(-\frac{(b+1)\gamma}{\overline{\gamma}}\right) \cdot \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(b+1)^n}{n!} \cdot \left(\frac{\gamma}{\overline{\gamma}}\right)^n. \tag{4.52}$$

Вториот член од (4.52) може да се изрази преку гама и горна некомплетна гама функција [38, eq.(8.350.2)] со користење на [38, eq.(8.352.2)]:

$$\exp\left(-\frac{(b+1)\gamma}{\overline{\gamma}}\right)\cdot\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(b+1)^n}{n!}\cdot\left(\frac{\gamma}{\overline{\gamma}}\right)^n=\frac{\Gamma\left(m,\frac{(b+1)\gamma}{\overline{\gamma}}\right)}{\Gamma(m)} \tag{4.53}$$

Доколку го замениме (4.53) во (4.52) и користиме [39, eq.(6.5.3)] ќе го добиеме следниов израз за кумулативната дистрибутивна функција за каскадниот AF MIMO релеен канал:

$$F_{\Gamma_l}(\gamma)\approx 1-\frac{\Gamma\left(m,\frac{(b+1)\gamma}{\overline{\gamma}}\right)}{\Gamma(m)}=\frac{\gamma\left(m,\frac{(b+1)\gamma}{\overline{\gamma}}\right)}{\Gamma(m)}\ , \tag{4.54}$$

каде $\gamma(...)$ е долна некомплетна гама функција [38, eq. (8.350.1)].

**Тврдење 4.1.**

CDF функцијата дадена во (4.54) е CDF на случајна променлива која ја следи гама функцијата на густина на веројатност со параметар на облик $m$ и параметар на размер $\theta=\overline{\gamma}/(b+1)$, затоа моменталниот крај-крај SNR даден во (4.7) за каскадниот AF MIMO RC може грубо да се апроксимира со случајна променлива која ја следи гама функцијата на густина на веројатност:

$$f(\gamma)=\frac{1}{\theta^m\cdot\Gamma(m)}\,\gamma^{m-1}e^{-\frac{\gamma}{\theta}}\qquad \text{каде } \theta=\frac{\overline{\gamma}}{b+1} \tag{4.55}$$

**Доказ:**

$$F(\gamma)=Pr(x\le\gamma)=\int_0^\gamma f(x)dx=1-\int_\gamma^\infty\frac{1}{\theta^m\Gamma(m)}\cdot x^{m-1}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=$$

$$=1-\int_\gamma^\infty\frac{1}{\theta^{m-1}\Gamma(m)}\cdot x^{m-1}e^{-\frac{x}{\theta}}\frac{1}{\theta}\cdot dx=1-\frac{1}{\Gamma(m)}\cdot\int_\gamma^\infty\left(\frac{x}{\theta}\right)^{m-1}e^{-\frac{x}{\theta}}d\left(\frac{x}{\theta}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{\Gamma(m)}\cdot\int_{\frac{\gamma}{\theta}}^\infty v^{m-1}e^{-v}\cdot dv=1-\frac{\Gamma\left(m,\frac{\gamma}{\theta}\right)}{\Gamma(m)}=1-\frac{\Gamma\left(m,\frac{(b+1)\gamma}{\overline{\gamma}}\right)}{\Gamma(m)} \tag{4.56}$$

Доколку во 4.55 се замени $\theta=\frac{\overline{\gamma}}{b+1}$ се добива:

$$f(\gamma)=\frac{(b+1)^m}{\overline{\gamma}^m\cdot\Gamma(m)}\,\gamma^{m-1}e^{-\frac{(b+1)\gamma}{\overline{\gamma}}} \tag{4.57}$$

### 4.4.2 PDF на односот сигнал-шум на AF МИМО RC со директна патека

За директната делница до дестинацијата ќе претпоставиме дека е под влијание на Рејлиев фединг во кој случај односот сигнал-шум ја следи гама функцијата на густина на веројатност:

$$f_{\Gamma_1}:=\frac{1}{\overline{\gamma}^m\cdot\Gamma(m)}\,\gamma^{m-1}e^{-\frac{\gamma}{\overline{\gamma}}} \tag{4.58}$$

За делницата преку релето ќе земеме дека ја следи грубата апроксимација за односот сигнал-шум 4.57:

$$f_{\Gamma_2}:=\frac{(b+1)^m}{\overline{\gamma}^m\cdot\Gamma(m)}\,\gamma^{m-1}e^{-\frac{(b+1)\gamma}{\overline{\gamma}}}. \tag{4.59}$$

Резултантната случајна променлива е сума од две случајни променливи кои следат Гама PDF-и со различен параметар на размер:

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \tag{4.60}$$

Во општ случај сумата на $n$ случајни променливи кои следат гама функции на густина на веројатност со различни параметри на облик и размер е:

$$Y = X_1 + X_2 + ... + X_n, \qquad f_i\left(x_i\right) = \frac{x_i^{\alpha_i}}{\theta_i^{a_i} \cdot \Gamma\left(\alpha_i\right)} e^{-\frac{x_i}{\theta_i}} \tag{4.61}$$

Согласно [63] густината на веројатност на случајната променлива $Y$ дефинирана согласно (4.61) е:

$$g\left(y\right) = C \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_k \cdot y^{\rho+k-1}}{\Gamma\left(\rho+k\right) \cdot \theta_l^{\rho+k}} e^{-\frac{y}{\theta_l}} \tag{4.62}$$

каде:

$$\theta_l = \min_i\left(\theta_i\right) \qquad \rho = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \qquad C = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\theta_l}{\theta_i}\right)^{\alpha_i} \tag{4.63}$$

$$\delta_{k+1} = \frac{1}{k+1} \cdot \sum_{i=1}^{k+1} i \cdot \gamma_i \cdot \delta_{k+1-i},\ k = 0, 1, 2,\ \delta_0 = 1; \qquad \gamma_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(1 - \frac{\theta_l}{\theta_i}\right)^k, \quad k = 1, 2, ... \tag{4.64}$$

Да го сведеме генерализираниот израз даден со (4.62), 4.63 и 4.64 за случајот со две случајни променливи даден со (4.58), 4.59 и 4.61. Првиот член од 4.63 се сведува на:

$$\theta_l = \min\left(\overline{\gamma}, \frac{\overline{\gamma}}{b+1}\right) = \frac{\overline{\gamma}}{b+1}, \tag{4.65}$$

а вториот и третиот член се:

$$\rho = 2 \cdot m \qquad C = \left(\frac{\overline{\gamma}/\left(b+1\right)}{\overline{\gamma}}\right)^m \cdot \left(\frac{\overline{\gamma}/\left(b+1\right)}{\overline{\gamma}/\left(b+1\right)}\right)^m = \left(b+1\right)^{-m}. \tag{4.66}$$

Вториот член од (4.64) за $k = 1, 2, 3$ е:

$$\gamma_1 = m \cdot \left(1 - \frac{\overline{\gamma}/\left(b+1\right)}{\overline{\gamma}}\right) = m \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(b+1\right)}\right) = \left(\frac{b \cdot m}{b+1}\right)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(b+1\right)}\right)^2 = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^2, \qquad \gamma_3 = \frac{1}{3} \cdot m \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^3 \tag{4.67}$$

Доколку се земе во предвид (4.67) за првиот член од (4.64) за $k = 1, 2, 3$ се добива:

$$\delta_1 = \gamma_1 = \frac{m \cdot b}{b+1}, \qquad \delta_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\gamma_1 \cdot \delta_1 + 2 \cdot \gamma_2\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\gamma_1^2 + 2 \cdot \gamma_2\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\gamma_1^2 + 2 \cdot \gamma_2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(m^2 \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^2 + m \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^2\right) = \frac{m \cdot \left(1+m\right)}{2} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^2,$$

$$\delta_3 = \frac{1}{3} \cdot \left(\gamma_1 \cdot \delta_2 + 2 \cdot \gamma_2 \cdot \delta_1 + 3 \cdot \gamma_3\right) =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{m \cdot b}{b+1} \cdot \frac{m \cdot \left(1+m\right)}{2} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^2 + 2 \cdot \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^2 \frac{m \cdot b}{b+1} + m \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^3\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{m^2 \cdot (1+m)}{2} \cdot \left( \frac{b}{b+1} \right)^3 + m^2 \cdot \left( \frac{b}{b+1} \right)^3 + m \cdot \left( \frac{b}{b+1} \right)^3 \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{m^2 \cdot (1+m)}{2} + m^2 + m \right) \cdot \left( \frac{b}{b+1} \right)^3 = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{m^2 + m^3 + 2m^2 + 2m}{2} \right) \cdot \left( \frac{b}{b+1} \right)^3 =$$

$$\frac{m}{3} \cdot \left( \frac{m^2 + 3m + 2}{2} \right) \cdot \left( \frac{b}{b+1} \right)^3 = \frac{m}{3} \cdot \frac{(m+1) \cdot (m+2)}{2} \cdot \left( \frac{b}{b+1} \right)^3 \tag{4.68}$$

Од (4.68) но и доколку се продолжи со развојот во (4.67) и (4.68) за $k > 3$ може да се заклучи дека во општ случај:

$$\delta_i = \frac{(m)_i}{i!} \cdot \left( \frac{b}{b+1} \right)^i \tag{4.69}$$

Доколку (4.65),(4.66) и (4.69) се заменат во (4.62) за $\Gamma$ во (4.60) добиваме дека ја следи следнава функција на густина на веројатност:

$$f_\Gamma(\gamma) = C \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_k \cdot \gamma^{\rho+k-1}}{\Gamma(\rho+k) \cdot \theta_l^{\rho+k}} e^{-\frac{\gamma}{\theta_l}} = \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_i}{i!} \cdot \left( \frac{b}{b+1} \right)^i \frac{\gamma^{\rho+k-1}}{\Gamma(\rho+k) \cdot \theta_l^{\rho+k}} e^{-\frac{\gamma}{\theta_l}} =$$

$$= \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left( \frac{b}{b+1} \right)^k \cdot \frac{\gamma^{2m+k-1}}{\Gamma(2m+k) \cdot \theta_l^{2m+k}} \cdot e^{-\frac{\gamma}{\theta_l}} \tag{4.70}$$

Изразот (4.70) може да се претстави во следниов облик:

$$f_\Gamma(\gamma) = \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left( \frac{b}{b+1} \right)^k \cdot f_\Gamma(\gamma; \theta_l, 2 \cdot m + k) \tag{4.71}$$

каде $f_\Gamma(\gamma; \theta_l, 2 \cdot m + k)$ е гама функција со параметар на облик $\theta_l = \overline{\gamma} / (b+1)$ и параметар на облик $\alpha = 2m + k$. Доколку (4.65) се замени во (4.70) се добива најопштиот облик на функцијата на густина на веројатност на случајната променлива $\Gamma$ која го претставува моменталниот однос сигнал-шум на влезот на дестинацијата за системот прикажан на слика 4.12:

$$f_\Gamma(\gamma) = \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left( \frac{b}{b+1} \right)^k \cdot \frac{\gamma^{2m+k-1} (b+1)^{2m+k}}{\Gamma(2m+k) \cdot \overline{\gamma}^{2m+k}} \cdot e^{-\frac{(b+1) \cdot \gamma}{\overline{\gamma}}} \tag{4.72}$$

### 4.4.3 OP на AF МИМО релеен канал со директна патека

Доколку (4.70) се замени во (4.50) се добива веројатноста на испад на AF МИМО релејните канали кога постои директна патека од изворот до дестинацијата:

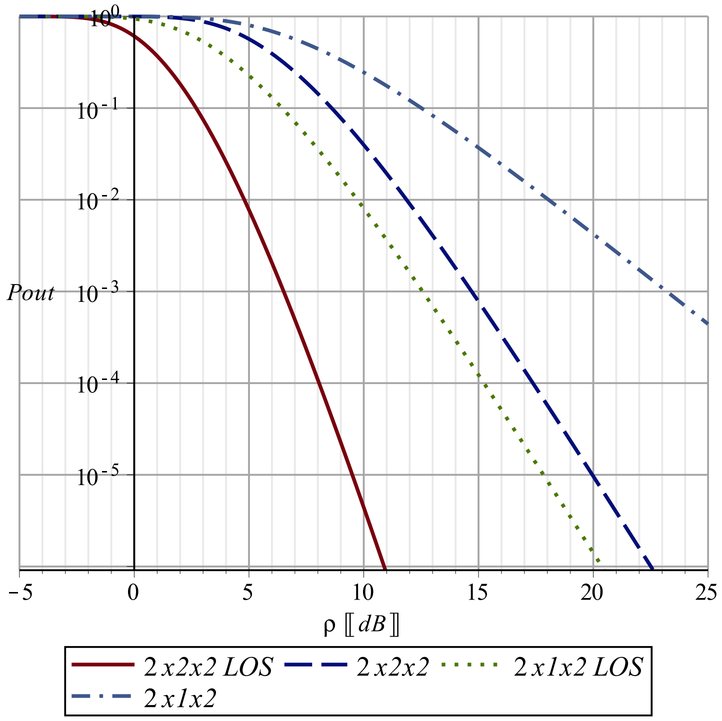
$$P_{out} = Pr(\gamma \leq \gamma_{th}) = F(\gamma)|_{\gamma=\gamma_{th}} = \int_0^{\gamma_{th}} f(\gamma) d\gamma = 1 - \int_{\gamma_{th}}^{\infty} f(\gamma) d\gamma =$$

$$= 1 - \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left( \frac{b}{b+1} \right)^k \cdot \frac{1}{\Gamma(2m+k)} \cdot \int_{\gamma_{th}}^{\infty} \frac{\gamma^{2m+k-1}}{\theta_l^{2m+k}} e^{-\frac{\gamma}{\theta_l}} d\gamma = \tag{4.73}$$

Интегралот во (4.73) е:

$$\int_{\gamma_{th}}^{\infty} \frac{\gamma^{2m+k-1}}{\theta_l^{2m+k}} e^{-\frac{\gamma}{\theta_l}} d\gamma = \int_{\gamma_{th}}^{\infty} \left( \frac{\gamma}{\theta_l} \right)^{2m+k-1} e^{-\frac{\gamma}{\theta_l}} d\left( \frac{\gamma}{\theta_l} \right) =$$

$$\int_{\frac{\gamma_{th}}{\theta_l}}^{\infty} t^{2m+k-1} e^{-t} dt = \Gamma\left(2m+k, \frac{\gamma_{th}}{\theta_l}\right) \tag{4.74}$$




**Слика 4.13:** OP за 2x2x2/2x1x2 со 222 OSTBC релеен канал со и без диреkнта патека до дестинацијата за $\gamma_{th} = 5dB$

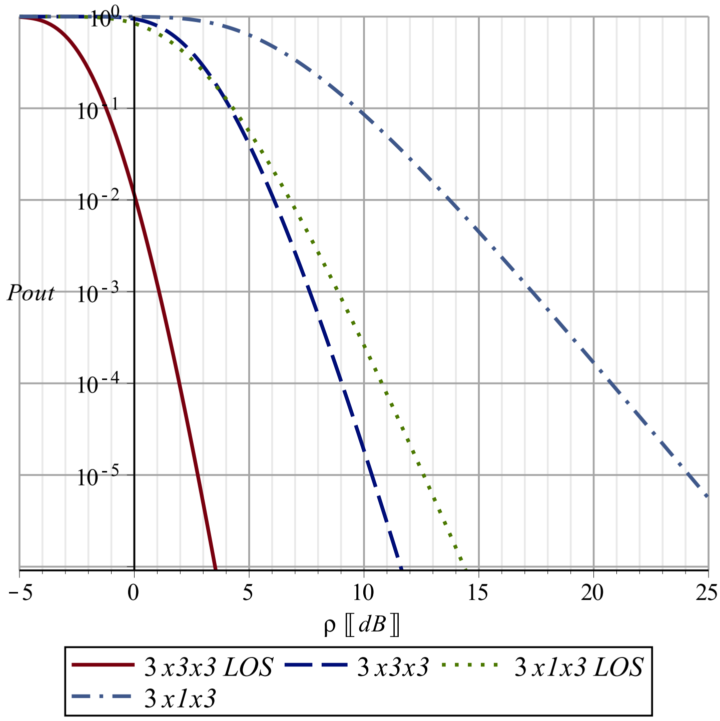
Доколку (4.74) се замени во (4.73) за веројатноста на испад се добива:

$$P_{out} = 1 - \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \frac{\Gamma(2m+k, \gamma_{th}/\theta_l)}{\Gamma(2m+k)} =$$

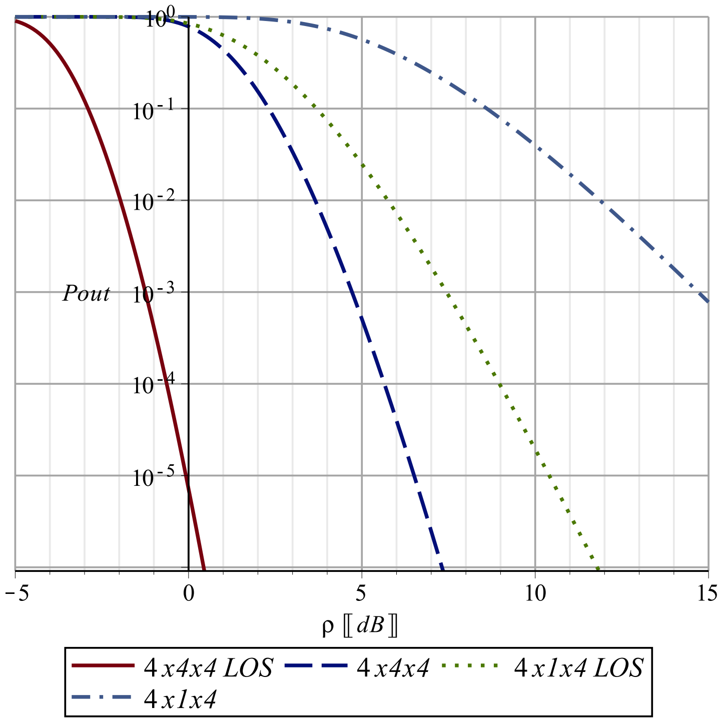
$$= 1 - \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \frac{\Gamma\left(2m+k, \frac{\gamma_{th}(b+1)}{\bar{\gamma}}\right)}{\Gamma(2m+k)} \tag{4.75}$$

На сликите 4.13, 4.14 и 4.15 е дадена веројатноста на испад на AF МИМО релејните системите разгледувани во глава 4.3 во случај кога има директна патека до дестинацијата во споредба со веројатноста на испад на каскадните AF МИМО релејни канали кај кои нема диреkнта патека до дестинацијата во случај кога прагот е $\gamma_{th} = 5dB$. Имено, на овие слики се споредувани изразите за веројатност на испад (4.51) и (4.75) кои се базираат на грубата апроксимација на функцијата на густина на веројатност на каскадниот МИМО релеен канал дадена со (4.57).

Од сликите 4.13, 4.14 и 4.15 може да се заклучи дека AF МИМО релејните канали со директна патека имаат значително подобри перформанси во споредба со AF МИМО релејните канали без директна патека, како и што можеше да се претпостави од информатичко теоретската анализа во глава (2). На пример, за 2x2x2 системот за $\rho = 10dB$ веројатноста на испад на системот без дирекна патека е $4 \cdot 10^{-2}$, а веројатноста на испад за истиот тој систем со дирекна патека изнесува $4 \cdot 10^{-6}$ што претставува подобрување на перформансите од четири редни големини. Слични подобрувања се забележуват и кај $N$x*1*x$N$ системската конфигурација. Исто така, од сликите 4.13, 4.14




**Слика 4.14:** OP за 3x3x3/3x1x3 334 OSTBC систем со и без дирекнта патека до дестинацијата за $\gamma_{th} = 5dB$




**Слика 4.15:** OP за 4x4x4/4x1x4 со 434 OSTBC систем со и без дирекнта патека до дестинацијата $\gamma_{th} = 5dB$

и 4.15 може да се забележи дека системите со директна патека имаат поголема добивка на диверзитет од системите без директна патека. Разликата во добивка од диверзитет се намалува со зголемување на бројот на антени.

# 5 Веројатност на испад во релеен канал со повеќе делници

Во кооперативните комуникации, веројатноста за испад (OP) е една од клучните метрики за перформансите на релејниот канал. Во оваа глава, ќе ја анализираме крај-крај веројатноста за испад на релејните канали во услови на Рејлиев, Накагами, Рајсов и Веибул фединг. Како и во претходните глави разгледуваме засили-и-проследи (AF) релеен канал но во овој случај релејниот канал е со повеќе делници и една антена по јазол. Анализата на овие системи ќе се спроведе за случаите на реле со фиксно (FG) и променливо засилување (VG) [64]. На релето со фиксно засилување му е потребно да го знае средниот однос сигнал-шум, додека на релето со променливо засилување потребно е да ја познава моменталната состојба на каналот (CSI) за секоја делница.

## 5.1 Модел на каналот

На слика 5.1 е претставен не-регенеративен релеен канал со повеќе делници, кој содржи извор $T$, дестинација $D$ и (*N-1*) AF релеи. Секоја делница е предмет на независен Рејлиев, Накагами, Рајсов и Веибул фединг, за кои моменталниот SNR по делница ($\gamma$) е распределен согласно функциите на густина на веројатност (PDF) дадени во [35]:

$$p_{ray}\left(\gamma\right) = \frac{1}{\bar{\gamma}} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right) \tag{5.1}$$

$$p_{nak}\left(\gamma\right) = \frac{m^m \cdot \gamma^{m-1}}{\bar{\gamma}^m \cdot \Gamma(m)} \cdot \exp\left(-\frac{m \cdot \gamma}{\bar{\gamma}}\right) \tag{5.2}$$

$$p_{ric}\left(\gamma\right) = \frac{(1+K)}{\bar{\gamma}} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}} - K\right) \cdot I_0\left(2\sqrt{\frac{K \cdot (1+K)\gamma}{\bar{\gamma}}}\right) \tag{5.3}$$

$$p_{wei}\left(\gamma\right) = \frac{c}{2} \cdot \left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{c}\right)}{\bar{\gamma}}\right)^{\frac{c}{2}} \cdot \gamma^{\frac{c}{2}-1} \cdot \exp\left(-\left(\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\Gamma\left(1+\frac{2}{c}\right)\right)^{\frac{c}{2}}\right) \tag{5.4}$$

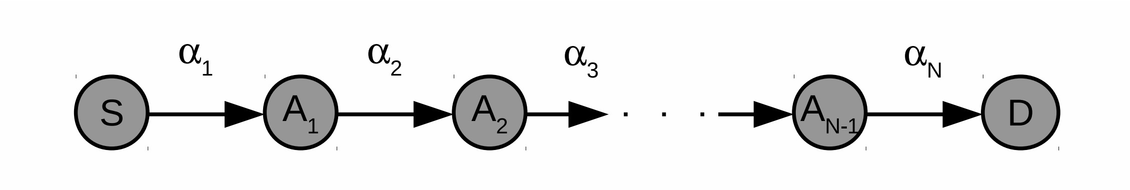
соодвенто, каде $m$ во (5.2) го претставува Накагами фединг параметарот, $\bar{\gamma}$ е среден SNR по делница, $K$ во (5.3) е рајсов фактор, $c$ во (5.4) е Веибул параметар, $I_0\left(\cdot\right)$ во (5.3) е модифицирана Беселова фунцкија од прв вид и нулти ред, и $\Gamma\left(\cdot\right)$ во (5.2) и (5.3) е Гама функција.

Во случај на AF, релето го засилува и потоа препраќа примениот сигнал од претходнио јазол, додека во случај на декодирај-и-проследи (DF), релето во целост го декодира примениот сигнал и потоа го испраќа. Релеите со променливо и фиксно засилување се моделирани согласно концептите презентиран во [53] и [6], соодветно. На слика 5.1 е претставен систем со $N$-делници, со нископропусиниот-еквивалентен сигнал на влезот од $n$-то реле изразен како:

$$r_n(t) = A_{n-1} \cdot \alpha_n \cdot \sqrt{E_n} \cdot r_{n-1}(t) + w_n(t), \tag{5.5}$$

каде $A_{n-1}$е изасилување на $(n-1)$-то реле, $\alpha_n$ е аплитудата на федингот на $n$-та делница, $E_n$ е предавателната моќност на (*n-1*)-то реле, $r_{n-1}$ е сигналот на влезот од $(n-1)$-то реле, и $w_n(t)$ е додавачки бел гаусов шум (AWGN) со средна моќност $N_{0n}$. Имајќи го во предвид (5.5), моќноста на корисниот сигнал и на шумот во приемникот е:

$$\begin{aligned} P_S &= \left(A_1^2A_2^2\cdots A_{N-1}^2\right)\cdot\left(E_1\alpha_1^2E_2\alpha_2^2\cdots E_N\alpha_N^2\right)\\ P_N &= \left(A_1^2A_2^2\cdots A_{N-1}^2\right)\cdot\left(E_2\alpha_2^2E_3\alpha_3^2\cdots E_N\alpha_N^2\right)\cdot N_{01}\\ &+\left(A_2^2\cdots A_{N-1}^2\right)\cdot\left(E_3\alpha_3^2E_4\alpha_4^2\cdots E_N\alpha_N^2\right)\cdot N_{02}+\cdots+N_{0N}. \end{aligned} \tag{5.6}$$




**Слика 5.1:** Модел на релеен канал со $N$-делници

Со користење на (5.6), може да се покаже дека односот сигнал-шум (SNR) на влезот од дестинацијата од системот со N-делници е:

$$\gamma_{eq}^{-1} = \sum_{n=1}^{N}\left(\prod_{t=1}^{n-1}A_t^2N_{0t}\prod_{t=1}^{n}\gamma_t\right)^{-1}. \tag{5.7}$$

Во случај на систем каде релеите се со променливо засилување, засилувањето на $n$-то реле се избира да биде [53]:

$$A_n^2 = \frac{1}{\alpha_{n^2}} \tag{5.8}$$

каде $\alpha_n$е фединг амплитуда во $n$-та делница. Во случај на реле со фиксно засилување засилувањето на $n$-то реле е фиксно и се избира да биде [6]:

$$A_n = \sqrt{\frac{\overline{\gamma}}{C}} \qquad C = \overline{\gamma}\cdot\left(e^{1/\bar{\gamma}_n}E_1\left(1/\bar{\gamma}_n\right)\right)^{-1} \tag{5.9}$$

каде $E_1(\cdot)$ е експоненцијален интеграл дефиниран со [39, eq. (5.1.1)], и $\bar{\gamma}_n$ е среден SNR за $n$-та делница. Веројатноста за испад е дефинирана како веројатност дека моменталниот SNR ќе падне под прагот $\gamma_{th}$:

$$P_{out} = P\left[\gamma_{eq} < \gamma_{th}\right]. \tag{5.10}$$

За да се добие веројатноста за испад во случај на релеен канал со променливо засилување на релеите, го користевме пристапот базиран на фунцијата за генерирање на моменти (MGF), претставен во [53] и [35].

$$P_{out} = P\left(\gamma_{eq} < \gamma_{th}\right) = 1 - P\left(\frac{1}{\gamma_{eq}} < \frac{1}{\gamma_{th}}\right) = 1 - \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{M_{1/\gamma_{eq}}(-s)}{s}\right)|_{1/\gamma_{th}} \tag{5.11}$$

каде $M_{1/\gamma_{eq}}$ е MGF од инверзната вредност од крај-крај моменталниот однос сигнал-шум - $\gamma_{eq}$. За инверзија на Лапласовата трансформација ја користевме Ојлеровата нумеричка техника [35, Appendix 9B]:

$$P\left(\frac{1}{\gamma_{eq}} < \frac{1}{\gamma_{th}}\right) = \frac{2^{-k}e^{\frac{A}{2}}}{1/\gamma_{th}}\cdot\sum_{k=0}^{K}\binom{K}{k}\sum_{n=0}^{N+k}\frac{(-1)^n}{\alpha_N}\cdot Re\left(\frac{M_{1/\gamma}\left(-\frac{A+2\,\pi\,j\,n}{2/\gamma_{th}}\right)}{\frac{A+2\,\pi\,j\,n}{2/\gamma_{th}}}\right) + E\left(A,\,K,\,N\right), \tag{5.12}$$

$$E(A,K,N)=\frac{e^{-A}}{1-e^{-A}}+\frac{2^{-k}e^{\frac{A}{2}}}{1/\gamma_{th}}\sum_{k=0}^{K}(-1)^{N+k+1}\binom{K}{k}Re\left(\frac{M_{1/\gamma}\left(-\frac{A+2\,\pi\,j\,(N+k+1)}{2/\gamma_{th}}\right)}{\frac{A+2\,\pi\,j\,(N+k+1)}{2/\gamma_{th}}}\right),\quad (5.13)$$

каде $\alpha_n = 1$ за $n = 1, 2, ..., N$ и $\alpha_n = 2$ за $n = 0$. Земаме $A = 10 \cdot \ln(10)$ со цел да имаме грешки на дискретизација помала од $10^{-10}$.
Во случај на Накагами и Рејлиев ($m_n = 1$) фединг, за $n$-та делница се користи изразот во затворена форма за инверзната вредност на односот сигнал-шум ($1/\gamma_n$) [52, eq.(10)]:

$$M_{1/\gamma_n}(-s)=\frac{2}{\Gamma(m)}\cdot\left(\frac{m_n\cdot s}{\bar{\gamma}_n}\right)\cdot K_{m_n}\left(2\cdot\sqrt{\frac{m_n s}{\bar{\gamma}_n}}\right).\quad (5.14)$$

Под претпоставка дека делниците се предмет на независен фединг и се користи променливо засилување во релето (5.8), MGF-от на $1/\gamma_{eq}$ е производ на MGF-те на $1/\gamma_n,\ n = 1, 2, \ldots N$[53].
Во случај на Рајсов фединг, не е можно да се најде $M_{1/\gamma_{eq}}$ во затворена форма и затоа се користи нумеричка интеграција. За Веибул фединг, функцијата на густина на веројатност (5.4) може да се претстави во следнава форма:

$$p_{\gamma\ wei}(\gamma)=bA^{-b}\gamma^{b-1}\exp\left(-\left(\frac{\gamma}{A}\right)^{b}\right)$$

каде $A$ и $b$ се:

$$b=\frac{c}{2},\ A=\frac{\bar{\gamma}}{\Gamma\left(1+\frac{2}{c}\right)}.$$

потоа, се пресметува MGF-от за Веибул за оние вредности на аргументот $s$ кои се потребни во Ојлеровата нумеричка техника за инверзија на лапласовата трансформација:

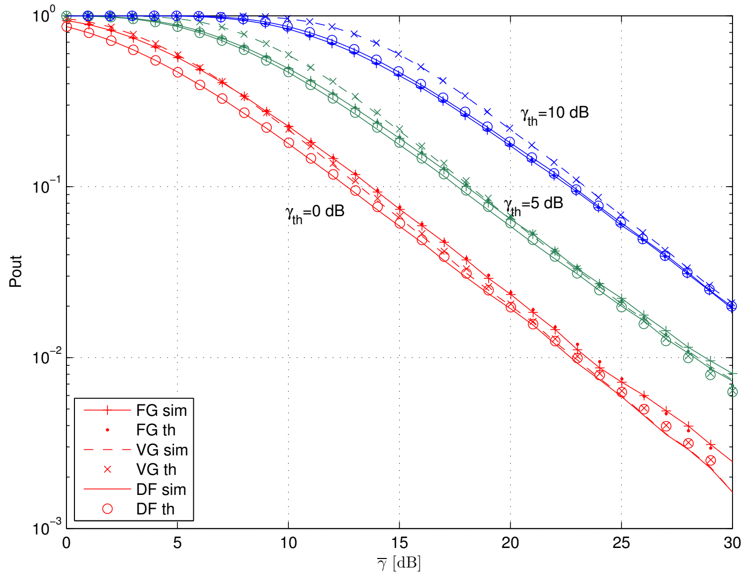
$$M_{1/\gamma_n}(-s)=\int_0^{\infty}b\cdot A^{-b}\cdot\gamma_n^{b-1}e^{-\frac{s}{\gamma_n}-\left(\frac{\gamma_n}{A}\right)^{b}}d\gamma_n\quad (5.15)$$

## 5.2 Нумерички и симулациски резултати

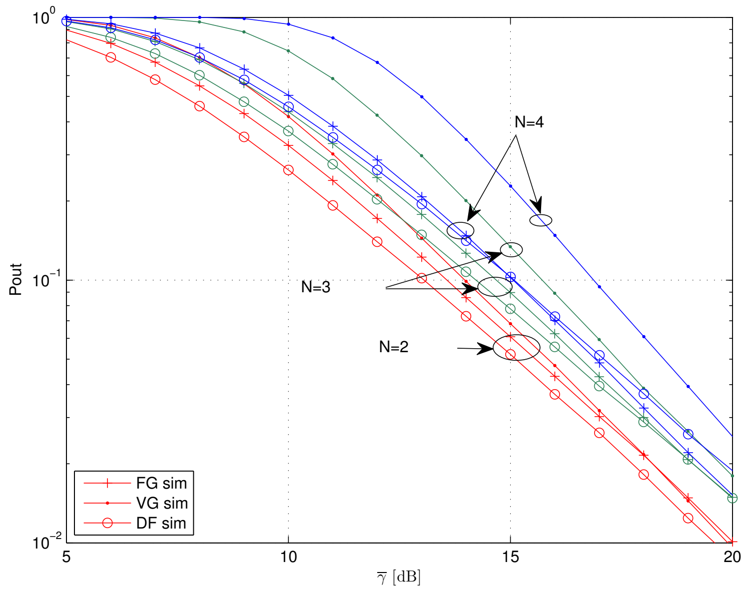
Во оваа глава, ќе се прикажат нумеричките резултати кои го покажуваат идеалното поклопување на резултатите добиени со нумеричка интеграција и соодветните резултати добиени со Монте Карло симулации. За систем со две делници ($N = 2$) во кој релето користи фиксно засилување во случај на Рејлиев фединг наместо (5.11) се користи затворената форма на OP [6, eq.(9)]:

$$P_{out}=1-2\cdot\sqrt{\frac{C\cdot\gamma_{th}}{\bar{\gamma}_1\cdot\bar{\gamma}_2}}\exp\left(-\frac{\gamma_{th}}{\bar{\gamma}_1}\right)\cdot K_1\left(2\sqrt{\frac{C\cdot\gamma_{th}}{\bar{\gamma}_1\cdot\bar{\gamma}_2}}\right).\quad (5.16)$$

каде $K_1(\cdot)$ е модифицирана Беселова функција од втор вид и прв ред.

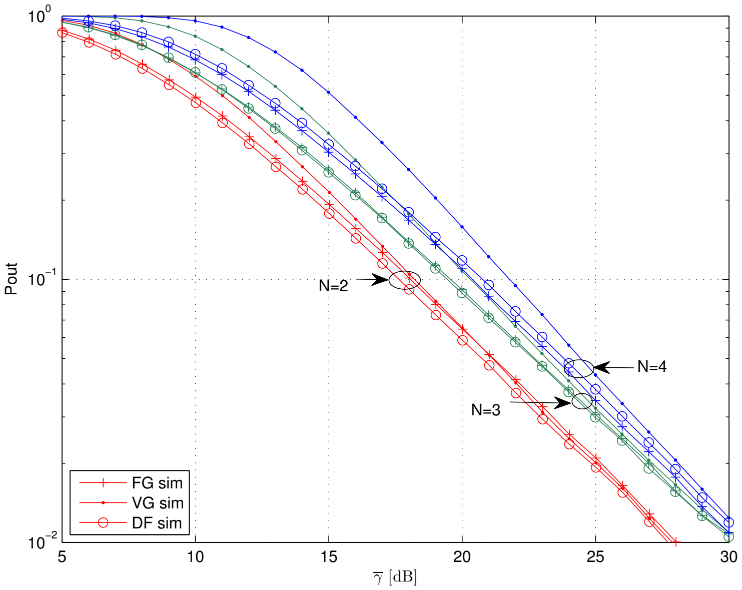



**Слика 5.2:** OP перформанси на дво-делничен систем во Рејлиев фединг со $\gamma_{th} = 0,\ 5,$ и $10\,\mathrm{dB}$



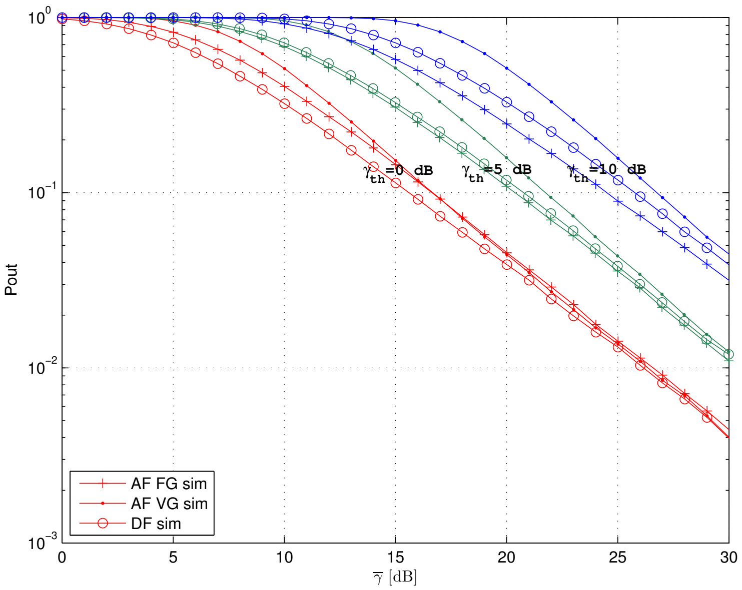

**Слика 5.4:** OP за релеен канал за $N$=2, 3 и 4 во Веибул фединг кога $\gamma_{th} = 5dB$

На слика 5.2 е претставена веројатноста на испад за систем со две делници и фиксно засилување во Рејлиев фединг (5.16). За анализираниот систем е земено $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2$, а $\gamma_{th}$ е поставен на 0, 5 и 10dB.
На слика 5.3 се презентирани кривите на веројатноста на испад на AF систем со фиксно засилување, AF систем со променливо засилување и DF систем со повеќе делници во Рејлиев фединг. Системите кои се споредуваат се со $N = 2, 3$ и 4, и $\gamma_{th} = 5\ dB$. Од сликата може да се забележи дека за среден до голем SNR, релејниот канал со две делници и со променливо засилување има подобри перформанси (помала веројатност за испад) од соодветниот систем со фиксно засилување, а за мал до среден SNR, системот со фиксно засилување има подобри перформанси од системот со променливо засилување.

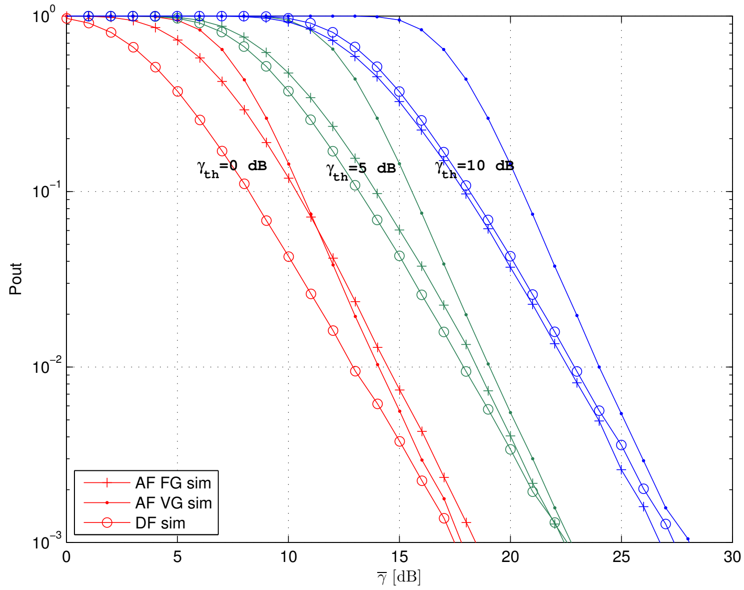



**Слика 5.3:** OP за повеќе-делничен систем за $N = 2, 3$ и 4 делници во Рејлиев фединг кога$\gamma_{th} = 5\,dB$

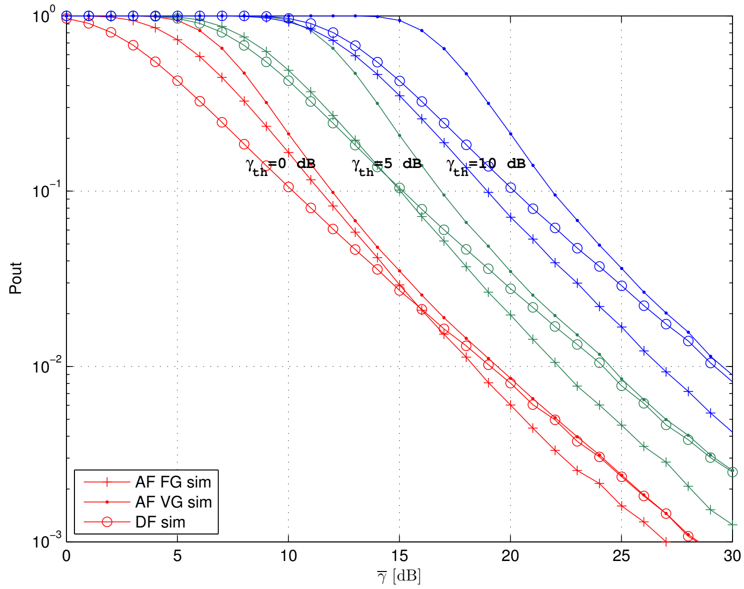
Сепак, како бројот на делници се зголемува, системите со фиксно засилување покажуваат подобри перформанси од од соодвентите системи со променливо засилување за целиот SNR опсег од практичен интерес. За другите типови на фединг околини добивме слични резултати. На пример резултатите за Веибул фединг се прикажани на слика 5.4. Треба да се напомене дека во нашата анализа ефектот на заситување на релеите со фиксно засилување не е земен во предвид.




**Слика 5.5:** OP за 4-делничен систем во Рејлиев фединг за $\gamma_{th} = 0,\ 5,$ и $10\,\mathrm{dB}$

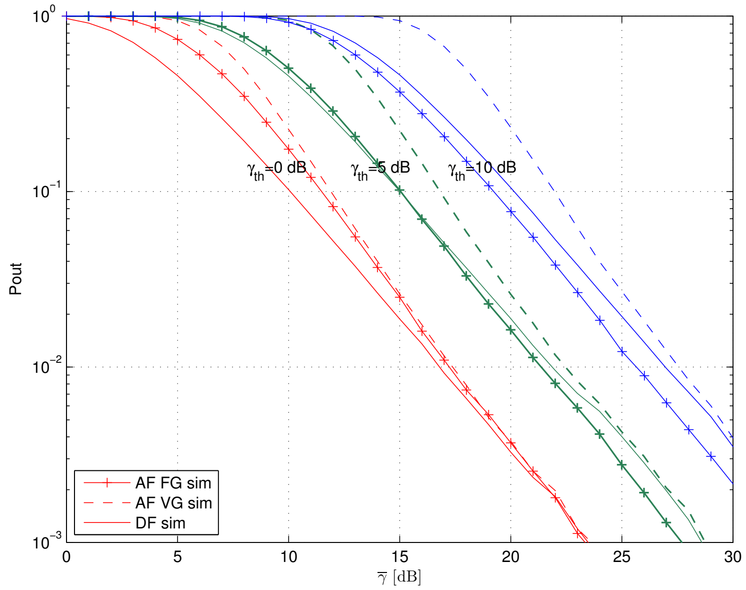



**Слика 5.6:** OP за 4 делничен систем во Накагами фединг каде $\gamma_{th} = 0,\ 5,\ 10\,dB$, и $m = 2.3$



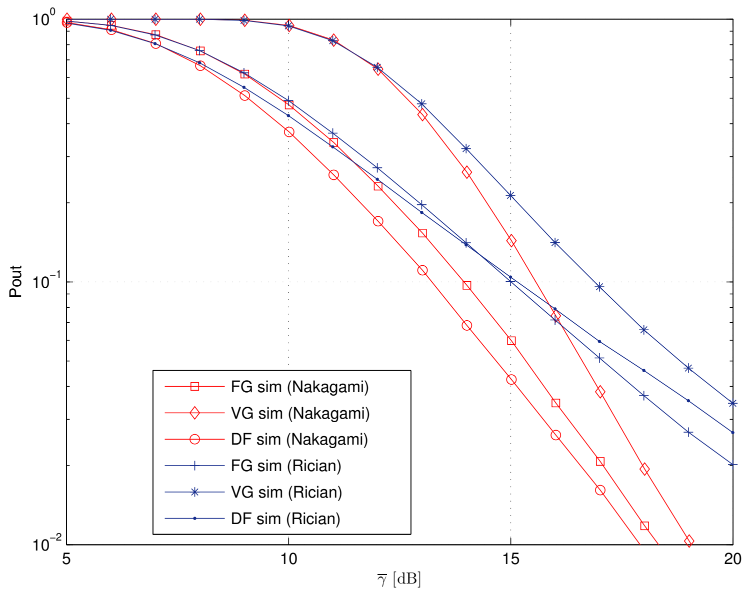

**Слика 5.7:** OP за 4 делничен ситем во Рајсов фединг каде $\gamma_{th} = 0,\ 5,\ 10\,dB$ и $K = 3$

Исто така, анализиравме релеен канал со 4 делници и прагови на односот сигнал-шум $\gamma_{th}$ of 0, 5 и 10 dB во различни фединг околини. На слика 5.5 се претставени резултатите за четири-делничен систем во случај кога сите делници се под влијание на Рејлиев фединг, додека на слика 5.6 се прикажани резултатите за Накагами фединг. На слика 5.7 и 5.8 се презентирани резултатите за Рајсов и Веибул фединг соодветно.




**Слика 5.8:** ОР за 4 делничен систем во Веибул фединг ($\gamma_{th} = 0,\ 5,\ 10\,dB$)

За нумеричката анализа, ги сетиравме PDF параметрите на следниве вредности: $m = 2.285$, $K = 3$ и $b = 1.5$. Во случај на $\gamma_{th} = 0$ (освен за Рајсов фединг), резултатите повторно покажуваат дека за среден до голем SNR, системите со променливо засилување имаат занемарливо подобри перформанси од системите со фиксно засилување. Сепак, за $\gamma_{th} > 0$, се забележува дека системите со фиксно засилување покажуваат подобри перформанси за за сите видови на фединг. Разликата во перформанси помеѓу двата системи се зголемува во корист на системите со фиксно засилување со зголемувае на $\gamma_{th}$ .




**Слика 5.9:** ОР за 4 делничен систем во Накагами и Рајсов фединг ($\gamma_{th} = 5dB$)

За релеен канал со 4 делници во Рајсов фединг, системите со фиксно засилување имаат подобри перформанси од системите со променливо засилување во целиот опсег на SNR без оглед на прагот $\gamma_{th}$ . Треба да се истакне дека релеите со фиксно засилување ги постигнуваат нивните најдобри можни перфоманси бидејќи ефектот на чуствителност на сатурација не е земен во предвид. Освен тоа, во сите случаи може да се забележи дека како бројот на делници се зголемува системите со фиксно засилување дури покажуваат занемарливо подобри перформанси и од DF системите заради неоптималната алокација на снаги во DF системите [65].

На слика 5.9 се прикажани OP перформансите на 4-делничен ситем во Накагами фединг со фединг параметар $m = 2.2857$ и Рајсов фединг со соодветен Рајсов фактор $K = 3$, пресметани согласно изразот (5.17). Со таков избор на параметрите треба да се очекуваат слични фединг ефекти.

$$K = \frac{\sqrt{m^2 - m}}{m - \sqrt{m^2 - m}} \tag{5.17}$$

Имајќи ја во предвид слика 5.9 очигледно е дека апроксимаците се релативно успешни бидејќи OP перформансите за двата система се слични, особено за мали до средни вердности на средниот SNR. Како средниот SNR се зголемува, системот во Накагами фединг има помала веројатност на испад во споредба со истиот систем во Рајсов фединг.

# 6 МИМО релеен канал од информациско-теоретски аспект

Во оваа глава ќе го анализираме капацитетот за МИМО релејните канали кои користат OSTBC. Ќе бидат анализирани перфомансите на капацитетот на овие системи од аспект на анализа на ергодичниот капацитет и веројатноста на испад.

Во услови на брз фединг должината на блокот се протега на голем број на кохерентни временски интервали (види (1.15)) така што каналот е ергодичен со добро дефиниран Шенонов капацитет кој често се нарекува *ергодичен капацитет.* Сепак ваквото кодирање кај кое блокот се протега низ повеќе кохерентни временски интервали резултира во преголемо доцнење. Ергодичниот капацитет на точка-точка каналот со една антена по јазол е средна вредност по ансамбл на моменталниот капацитет по распределбата на односот сигнал-шум. Тоа е капацитет на каналот кога распределбата на аплитудите на федингот во каналот $|h| = \alpha$ има независна реализација (т.е. моменталната амплитудата на федингот на каналот не зависи од претходните вредности на аплитудата на федингот на каналот). Соглано (1.6) ергодичниот капацитет за точка-точка канал со една антена по јазол е :

$$C = E\left[\log_2\left(1+\gamma\right)\right] \qquad \text{bit/Hz/s} \tag{6.1}$$

каде $\gamma$ е моменталниот однос сигнал-шум, а операторот $E\left[...\right]$ означува средна вредност по случајната променлива $\gamma$.

## 6.1 Точка-точка МИМО канал

Во телекомуникациите од особена важност е да се дизајнираат методи за пренос кои го искористуваат капацитетот на каналот што е можно повеќе. Ако влезот и излезот на безжичниот канал без меморија го претставиме со случајните променливи $X$ и $Y$ соодветно, каналниот капацитет е [9]:

$$C = \max_{p(x)}\left\{I\left(\mathbf{X};\mathbf{Y}\right)\right\} \tag{6.2}$$

Вообичаено е да се претстават влезно-злезните релации на теснопојасниот МИМО линк со комплексна векторска нотација во основен опсег:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\cdot\mathbf{X} + \mathbf{N} \tag{6.3}$$

каде $\mathbf{X}$ е $N_T \times 1$ вектор на симболите во изворот, $\mathbf{Y}$ е $N_R \times 1$ векторот на симболите во дестинацијата, $\mathbf{H}$ е $N_R \times N_T$ каналната матрица, и $\mathbf{N}$ е $N_R \times 1$ вектор кој го претставува додавачкиот бел Гаусов шум (AWGN) во даден момент од времето. Се претпоставува дека каналната матрица е случајна и дека дестинацијата ги има информациите за каналот (CSI). Исто така се претпоставува дека каналот е без меморија, т.е., за секоја употреба на каналот се „влече“ независен примерок од $\mathbf{H}$. Ова значи дека капацитетот може да се пресмета како максимум од здружената информација како што е дефинирано со (6.2). Резултатите се исто така валидни кога $\mathbf{H}$ се генерира од ергодичен процес, затоа што се додека дестинацијата го разгледува процесот $\mathbf{H}$, само статистиката од прв ред е потребна за да се одреди капацитетот на каналот [66].

Општ елемент од каналната матрица се обележува со $h_{ij}$. Тој го претставува комплексниот коефициент на каналот помеѓу $i$-та антена од изворот и $j$-та антена од дестинацијата. Ако се земе дека МИМО каналот се состои од $N_T$ антени во изворот и $N_R$ антени во дестинацијата, каналната матрица е:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1N_T} \\ h_{21} & \dots & h_{2N_T} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{N_R1} & \dots & h_{N_RN_T} \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

$$h_{ij} = \alpha + j\beta = |h_{ij}|\, e^{j\phi_{ij}} = \sqrt{a^2 + b^2} e^{j\cdot \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} \tag{6.5}$$

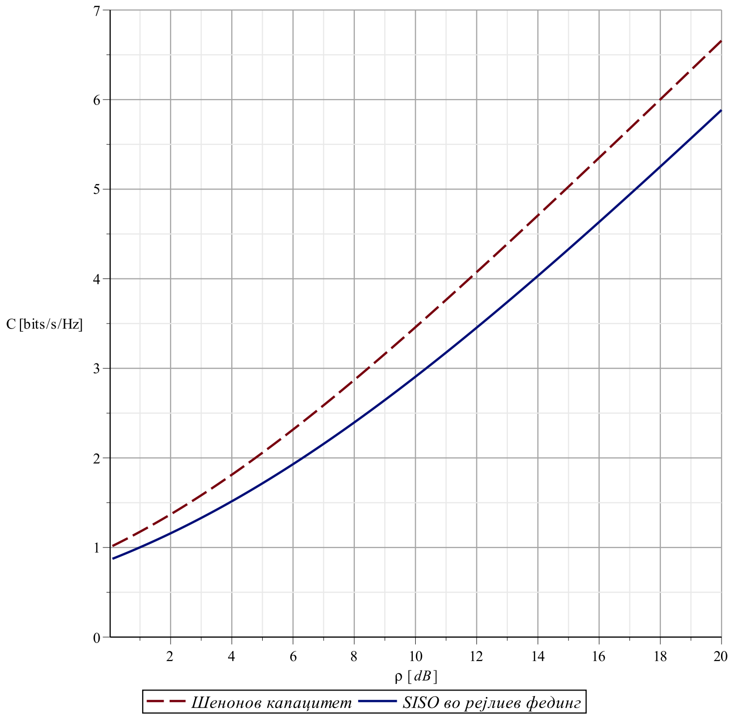
Во средина со многу расејување без директна линија на видливост, каналните коефициенти $|h_{ij}|$ се обично распределени согласно Рејлиевата функција на густина на веројатност (1.21).

### 6.1.1 Капацитет на точка-точка канал со една антена по јазол

Ергодичниот (средниот) капацитет на случаен канал со една антена во изворот и една во дестинацијата ($N_T = N_R = 1$) (анг. SISO - Single Input - Single Output) со ограничување на средната моќност $P_T$ е [9]:

$$C_H = E_H \left\{ \max_{p(x):P \le P_T} I\left(X;Y\right) \right\} \tag{6.6}$$

каде $P$ е средната можност на единечен канален коден збор испратен преку каналот и $E_H$ означува усреднување по распределбата на каналните коефициенти.




**Слика 6.1:** Ергодичен капацитет на SISO рејлиев фединг канал во споредба со Шенононовиот капацитет

Во споредба со дефиницијата (6.2) капацитетот на каналот за SISO е дефиниран како максимум од здружената информација помеѓу влезот и излезот по сите статистички распределби на влезот кој го задоволува ограничувањето на средна моќност. Доколку секој симбол во изворот се обележи со $s$, ограничувањето на средната моќност е:

$$E_s = E\left[|x|^2\right] \leq P_T \tag{6.7}$$

Со користење на (6.6), ергодичниот капацитет на SISO систем ($N_T = N_R = 1$) со случаен коефициент на каналот $h_{11}$ е:

$$C = E_H\left\{\log_2\left(1 + \rho \cdot |h_{11}|^2\right)\right\} \tag{6.8}$$

каде $\rho = \overline{\gamma} = \frac{E_s}{N_0} = \frac{P_T}{N_0}$ е средниот однос сигнал-шум. Доколку $|h_{11}|$ ја следи Рејлиевата распределба (1.22), $|h_{11}|^2$ ја следи експоненцијалната распределба (1.22). Доколку (1.22) се замени во (6.8) се добива [67]:

$$C = \int_0^\infty \frac{1}{\overline{\gamma}} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{\overline{\gamma}}\right) \cdot \log_2\left(1+\gamma\right) d\gamma = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{\overline{\gamma}}} \cdot E_1\left(\frac{1}{\overline{\gamma}}\right)}{\ln\left(2\right)} \tag{6.9}$$

каде $E_1\left(...\right)$ е експоненцијален интеграл дефиниран со [39, eq.(5.1.4)].

На сликата 6.1 е прикажана споредба на Шеноновиот капацитет[1] и капацитетот на Рејлиев фединг канал согласно (6.9).

### 6.1.2 Капацитет на точка-точка МИМО канал

Ергодичниот капацитет на МИМО канал со ограничување на моќност $P_T$ е даден со [9, eq.(9.104)]:

$$C = E_H\left\{\max_{p(x): tr(\mathbf{K}_x) \leq P_T} I\left(\mathbf{X}; \mathbf{Y}\right)\right\} \tag{6.10}$$

Каде $\mathbf{K}_x = E\left\{\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^H\right\}$ матрица на коваријанси на векторот на симболи испратени во изворот $\mathbf{X}$, а операторот $tr\left(...\right)$ означува сума на елементите во дијагоналата на $\mathbf{K}_x$. Вкупната предавателна моќност е ограничена на $P_T$, независно од бројот на предавателни антени. Доколку расположивата моќност $P_T$ е рамномерно распределена помеѓу предавателните антени во изворот и доколку шумот во антените не е корелиран моменталниот капацитет на МИМО каналот е (види глава 8.6):

$$C = \log_2\left[det\left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{P_T}{N_T \cdot N_0} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^H\right)\right] \tag{6.11}$$

Во тој случај ергодичниот (средниот) капацитет на МИМО каналот е ( [67], [68]):

$$C = E_H\left\{\log_2\left[det\left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{\rho}{N_T} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^H\right)\right]\right\} \tag{6.12}$$

каде $\rho = P_T/N_0$ е средниот однос сигнал-шум. Од законот за големи броеви [15, ch.(1.1)], членот $\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^H/N_T \to \mathbf{I}_{N_R}$ ако $N_T$ е многу големо и $N_R$ е фиксно, на тој начин капацитетот во случај на големо $N_T$ е:

$$C = \log_2\left[det\left(\mathbf{I}_{N_R} + \rho \cdot \mathbf{I}_{N_R}\right)\right] \tag{6.13}$$

[1] $\log_2\left(1 + \overline{\gamma}\right)$

Капацитетот на МИМО каналот може да се анализа со дијагонализација на продуктот на матрици $\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^H$ во (6.11) со помош на декомпозиција на сопствени вредности (анг. eigen values) или со декомпозиција на сингуларни вредности (види глава 8.6) :

$$C = \sum_{i=1}^{r} \log_2 \left(1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \sigma_i^2\right) = \sum_{i=1}^{r} \log_2 \left(1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \lambda_i\right) \tag{6.14}$$

каде $\sigma_i^2$ се квадратите на сингуларните вредности, $\lambda_i$ се сопствените вредности и $r = rank\,(\mathbf{H}) \leq \min\,(N_T, N_R)$ е рангот на каналната матрица $\mathbf{H}$.

Максималниот капацитет на МИМО каналот се достигнува во нереалистична ситуација кога секој од $N_T$ испратени сигнали се прима во $N_R$ антени во дестинацијата без интерференција. Тој случај може да се опише како секој од испратените сигнали да е примен од различно множество од приемни антени, со што се добива вкупно $N_T \cdot N_R$ еквивалентни приемни антени.

За случајот на SIMO канал ($N_T = 1, N_R > N_T$) каналната матрица е вектор-редица: $\mathbf{H} = [h_1, h_2, ..., h_{N_T}]$, а матрицата $\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^H = \sum_{j=1}^{N_T} |h_j|^2 = \|\mathbf{H}\|_F^2$ е скалар. Имајќи го тоа во предвид и доколку изразот за МИМО (6.11) се упрости со користење на (8.91) ќе се добие изразот за капацитет на SIMO:

$$C = \log_2 \left(1 + \frac{E_s}{N_0} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2\right) = \log_2 \left(1 + \overline{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2\right) \tag{6.15}$$

Во средина со многу расејување без директна линија на видливост, обично амплитудата на федингот е распределена согласно Рејлиевата, моќноста на федингот согласно експоненцијалната, а квадратот на Фробениусовата норма $\|\mathbf{H}\|_F^2$ (сумата на моќностите) ја следи гама функцијата на густина на веројатност со параметар на размер $\theta$=1 (4.11). За ваков случај, доколку имаме МИМО канал, т.е. во изворот има $N_T$ антени и оптимално комбинирање на сигналите од $N_R$-те антени во дестинацијата горната граница на ергодичнит капацитет е[2]:

$$C \leq E_H \left\{ N_T \cdot \log_2 \left[1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2\right] \right\} \tag{6.16}$$

Ако во (6.16) се замени (4.11) се добива изразот за ергодичниот капацитет во затворена форма [69]:

$$C \leq \frac{N_T}{\Gamma\,(m) \ln\,(2)} \cdot G_{3,2}^{1,3} \left( \frac{\rho}{N_T} \Bigg|_{1,0}^{1-m,1,1} \right) \tag{6.17}$$

Каде $G_{3,2}^{1,3}\,(...)$ е Меијер Г функција [38, eq.(9.301)]. За голем однос сигнал-шум изразот (6.16) може да се апроксимира:

$$C \leq E_H \left\{ N_T \cdot \log_2 \left[\frac{\rho}{N_T} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2\right] \right\} = \frac{N_T}{\ln\,(2)} \cdot \left( \ln \left(\frac{\rho}{N_T}\right) + \Psi\,(m) \right) \tag{6.18}$$

каде $\Psi$ е дигама функција [39, eq.(6.3.1)].

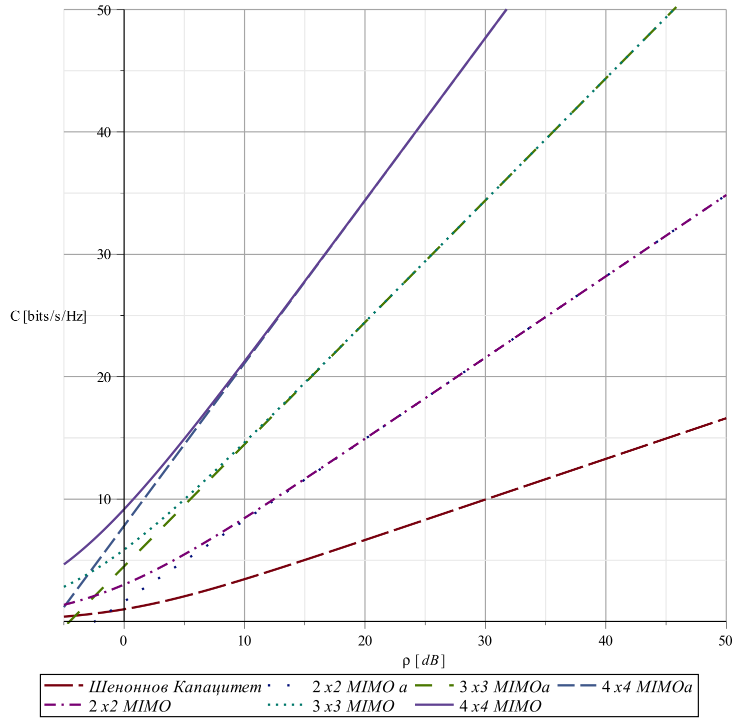
На слика 6.2, е даден Шеноновиот капацитет во споредба со горната граница (6.17) со $N_T = N_R = 2$, $N_T = N_R = 3$ и $N_T = N_R = 4$. На истата слика е дадена и апроксимацијата на горната граница на ергодичниот капацитет за голем среден SNR ($\rho$) согласно (6.18). Покрај тоа што оваа горна граница за МИМО каналот претставува специјален случај, со слика 6.2 јасно се покажува потенцијалот на МИМО технологијата.

[2]Под претпоставка дека нема интерференција помеѓу примените $N_T$ сигнали во дестинацијата.

Кога каналот е познат во изворот, максималниот капацитет на МИМО каналот може да се постигне со користење на принципот на полнење со вода [9, ch.(9.4)] на предавателната матрица на коваријанси. Во тој случај капацитетот е:

$$C = E_H \left\{ \sum_{i=1}^{r} \log_2 \left( 1 + \epsilon_i \cdot \frac{\rho}{N_T} \cdot \sigma_i^2 \right) \right\} = E_H \left\{ \sum_{i=1}^{r} \log_2 \left( 1 + \epsilon_i \cdot \frac{\rho}{N_T} \cdot \lambda_i \right) \right\} \tag{6.19}$$

каде $\epsilon_i$ е скалар, која кажува колкав дел од расположивата предавателна моќност се користи во $i$-от под-канал со ограничување на моќност $\sum_{i=1}^{N_T} \epsilon_i \leq 1$.




**Слика 6.2:** Ергодичен капацитет за 2x2, 4x4 и 6x6 МИМО канал

Во случај кога сигналите кои пристигнуваат во дестинацијата се корелирани се намалува рангот на каналната матрица т.е. бројот на не-нулти сингуларни вредности во (6.19) со што се намалува капацитетот на МИМО каналот.

### 6.1.3 Капацитет на точка-точка МИМО со OSTBC

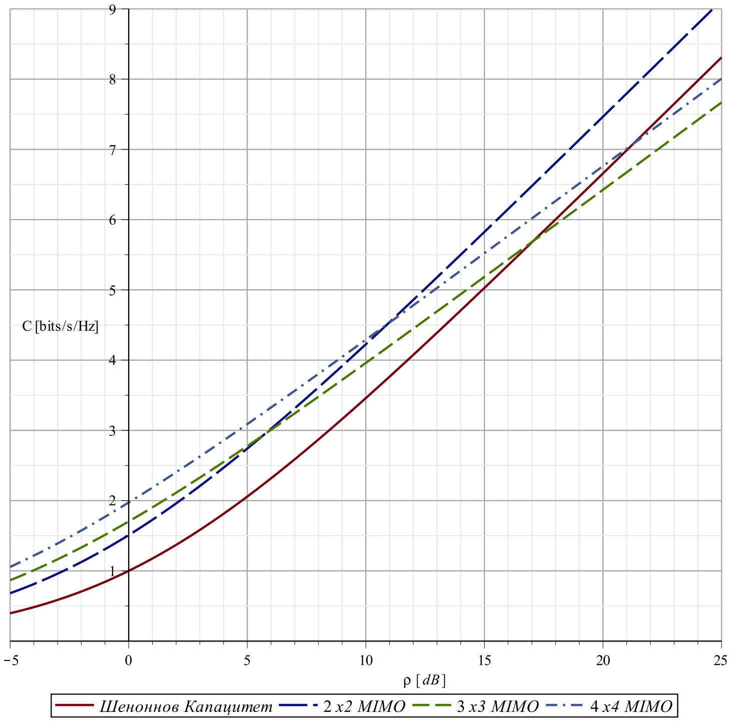
Во глава 3.2 е покажано дека е можно да се генерира ист степен на диверзитет со систем со повеќе влезови и еден излез (анг. MISO - Multiple-Input Single-Output) (види 3.2) како степенот на диверзитет во системот со еден влез и повеќе излези (анг. SIMO - Single-Input Multiple-Output) .

Во општ случај, ефективниот канал кој се добива како резултат на просторно-временско блоковско кодирање на комплексни симболи (пред детекцијата) е даден со (4.2). Моменталнот SNR пред детекција на симболите е:

$$\gamma = \frac{\|\mathbf{H}\|_F^4 \cdot \frac{P_T \cdot L}{N_T \cdot K}}{\|\mathbf{H}\|_F^2 N_0} = \frac{P_T \cdot L}{N_0 \cdot N_T \cdot K} \|\mathbf{H}\|_F^2 = \frac{\rho \cdot L}{N_T \cdot K} \|\mathbf{H}\|_F^2 = \overline{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2 \tag{6.20}$$

Каде $\overline{\gamma}$ е средниот SNR по симбол за произволен OSTBC код (4.47):

$$\overline{\gamma} = \rho \cdot c = \rho \cdot \frac{L}{N_T \cdot K} \tag{6.21}$$




**Слика 6.3:** Ергодичен капацитет на точка-точка 2x2, 3x3, 4x4 МИМО канал со користење на 222, 334, 434 OSTBC во споредба со Шеноновиот капацитет

каде $\rho = P_T/N_0$ е вкупнот SNR по временски интервал, $L$ е бројот на временски интервали во кој се пренесува OSTBC блокот, $N_T$ е бројот на предавателни антени во изворот и $K$ е бројот на ненулти симболи кои се пренесуваат по антена за период од $L$ временски интервали. Со ова покажавме дека за секој испратен симбол, ефективниот канал е сразмерен AWGN канал со SNR $\overline{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2 = \frac{\rho \cdot L}{N_T \cdot K}\|\mathbf{H}\|_F^2$.

Ако се претпостави дека OSTBC кодот испраќа $K$ симболи за $L$ временски интервали, максималниот достиглив капацитет на OSTBC условен на каналот $\mathbf{H}$ се достигнува со некорелиран влез, што се добива ако се замени (6.20) во детерминантата од (6.11):

$$det\left(\mathbf{I}_{N_R} + \overline{\gamma} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^H\right) = 1 + \frac{\rho \cdot L}{N_T \cdot K} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2 \tag{6.22}$$

односно изразот за капацитетот на МИМО каналот со користење на OSTBC се сведува на [66]:

$$C_{\text{ostbc}} = E_H\left\{\frac{K}{L} \cdot \log_2\left(1 + \frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2\right)\right\} = E_H\left\{\frac{K}{L} \cdot \log_2\left(1+\gamma\right)\right\} \qquad \text{бити/у. на к.} \tag{6.23}$$

каде $\frac{K}{L}$ пред изразот ја означува брзината на OSTBC кодот. На пример, со Аламути OSTBC (види глава 3.3.3), два симболи ($K = 2$) се пренесуваат во два временски интервали ($L = 2$) и затоа Аламути OSTBC кодот е со единечна брзина.

Ако во (6.23) се замени (4.11) се добива изразот за ергодичниот капацитет во затворена форма [69]:

$$C_{\text{ostbc}} = \frac{K}{L \cdot \Gamma(m) \ln(2)} \cdot G_{3,2}^{1,3}\left(\frac{K \cdot \rho}{L \cdot N_T}\Bigg|_{1,0}^{1-m,1,1}\right) \tag{6.24}$$

Каде $G_{3,2}^{1,3}(...)$ е Меијер Γ функција [38, eq.(9.301)]. За голем однос сигнал-шум изразот

(6.16) може да се апроксимира:

$$C_{\text{ostbc}} \approx E_H \left\{ \frac{K}{L} \cdot \log_2 \left[ \frac{K \cdot \rho}{L \cdot N_T} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2 \right] \right\} \tag{6.25}$$

Ако во (6.25) се замени (4.11) се добива апроксимацијата на на ергодичниот капацитет за МИМО канал со OSTBC за голем однос сигнал-шум:

$$C_{\text{ostbc}} = \frac{K \cdot N_T}{L \cdot \ln(2)} \cdot \left( \ln \left( \frac{K \cdot \rho}{L \cdot N_T} \right) + \Psi(m) \right) \tag{6.26}$$

каде $\Psi$ е дигама функција [39, eq.(6.3.1)].

На слика 6.3 е даден Шенновиот капацитет во споредба со ергодичниот капацитет за МИМО со OSTBC (6.24) со $N_T = N_R = 2$, $N_T = N_R = 3$ и $N_T = N_R = 4$. Може да се забележи дека во случај на 2x2 МИМО со 222 OSTBC зголемувањето на бројот на антени значително го зголемува капацитетот на каналот. Имено, може да се забележи 50% зголемување за мал однос сигнал-шум и 15% за голем однос сигнал-шум. За системите со 3x3 и 4x4 со оглед на тоа што се работи за 334 и 434 OSTBC кодирање, односно кодовите се со 3/4 брзина на пренесување, има зголемување на капацитетот за мал до среден однос сигнал-шум, а за однос сигнал-шум поголем $17dB$ односно $21dB$ капацитетот е помал од шеноновиот капацитет што се должи на 3/4 брзината на пренесување на кодот.

### 6.1.4 Веројатност на капацитетен испад

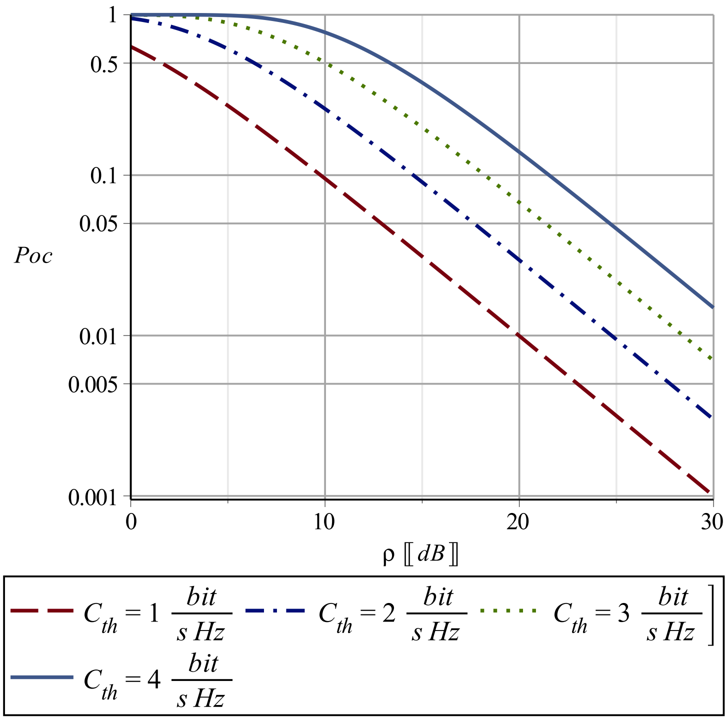
Во претходната глава, го користевме ергодичниот капацитет како мерка за спектралната ефикасност на МИМО каналот. Капацитетот во случај на ергодичност на каналот беше дефиниран во (6.6) и (6.10) дефинирани како средна вредност од максималната вредност на здружената информација помеѓу испратениот сигнал во изворот и примениот сигнал во дестинацијата, каде максимизацијата се прави по сите можни статистички распределби на сигналот во изворот.

Во денешните телекомуникациски решенија повеќето безжични услуги имаат минимални барања во поглед на потребните податочни брзини на пренесување, под кои сервисот е неупотреблив. Затоа во оваа глава ќе разгледуваме каква е веројатноста произволните достигливи брзини на пренесување паднат под одредена граница, која се нарекува податочна брзина за одржување на услугата (анг. SSR - Service Sustainability Rate). Со други зборови, ќе ја разгледуваме веројатноста на капацитетен испад. Со веројатноста на капацитетен испад, капацитетот на каналот се придружува на веројатноста на испад. Капацитетот се третира како случајна променлива која зависи од моменталниот одзив на каналот и останува константен за време на преносот на кодиран блок на информација со конечна должина. Ако капацитетот на каналот падне под границата на капацитетниот испад, тогаш мала е веројатноста дека испратениот блок на информација ќе биде декодиран без грешки во дестинацијата, без разлика на употребениот метод на кодирање. Веројатноста дека моменталниот капацитет е помал од капацитеот на испад - $C_{th}$ изнесува $q$, т.е.:

$$P_{oc} = Pr\left[C \leq C_{th}\right] = q = \int_0^{C_{th}} f_c(C)\, dC \tag{6.27}$$

Во овој случај (6.27) претставува горна граница заради фактот дека постои конечна веројатност $q$ дека капацитетот на каналот е помал од границата на капацитетниот испад. Веројатноста на капацитетен испад може да се изрази во форма на долна граница, што ќе претставува случај каде постои конечна веројатност $(1-q)$ дека капацитетот на каналот ќе биде поголем од $C_{th}$, т.е.:

$$Pr\left[C > C_{th}\right] = 1 - q = \int_{C_{th}}^{\infty} f_c\left(C\right) dC\cdot \tag{6.28}$$




**Слика 6.4:** Веројатност на капацитетен испад за SISO за Рејлиева распределба на амплитудите на сигналот за фиксно $C_{th}$

**Веројатност на капацитетен испад на SISO:** Согласно (6.8) моменталниот капацитет за SISO е:

$$C = \log_2\left(1 + \frac{E_s}{N_0}\left|h\right|^2\right) = \log_2\left(1 + \overline{\gamma}\cdot\left|h\right|^2\right) = \log_2\left(1+\gamma\right) \tag{6.29}$$

Затоа, да претпоставиме дека $\alpha = |h|$ е случајна променлива распределена по Рејлиева функција на густина на веројатност (1.21) каде $\Omega = E\left[\alpha^2\right]$. PDF-от на моменталниот однос сигнал-шум во каналот $\gamma = \frac{E_s}{N_0}\cdot\alpha^2 = \overline{\gamma}\cdot\alpha^2$ е даден со (1.22) каде $E\left[\gamma\right] = \overline{\gamma}$.

Да претпоставиме дека $X$ и $Y$ се континуални случајни променливи со фунцкионална зависност $Y = g(X)$. Да претпоставиме дека $g$ е еден-на-еден фунција, и двете $g$ и нејзината инверзна функција, $g^{-1}$, се континуални и непрекинати. Тогаш со функционална трансформација на случајните променливи може да се добие функцијата на густина на веројатност за случајната променлива $Y$:

$$f_Y = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{dg^{-1}\left(y\right)}{dy}\right|. \tag{6.30}$$

$$C = g\left(\gamma\right) = \log_2\left(1+\gamma\right), \qquad \gamma = g^{-1}\left(C\right) = 2^C - 1. \tag{6.31}$$

Ако извршиме функционална трансформација на случајните променливи согласно(6.30) и (6.31) се добива :

$$f_C(C) = f(\gamma)\cdot\frac{d\gamma}{dC}\bigg|_{\gamma=2^C-1} = \frac{1}{\overline{\gamma}}\cdot\exp\left(\frac{1-2^C}{\overline{\gamma}}\right)\cdot 2^C\cdot\ln\left(2\right) \tag{6.32}$$

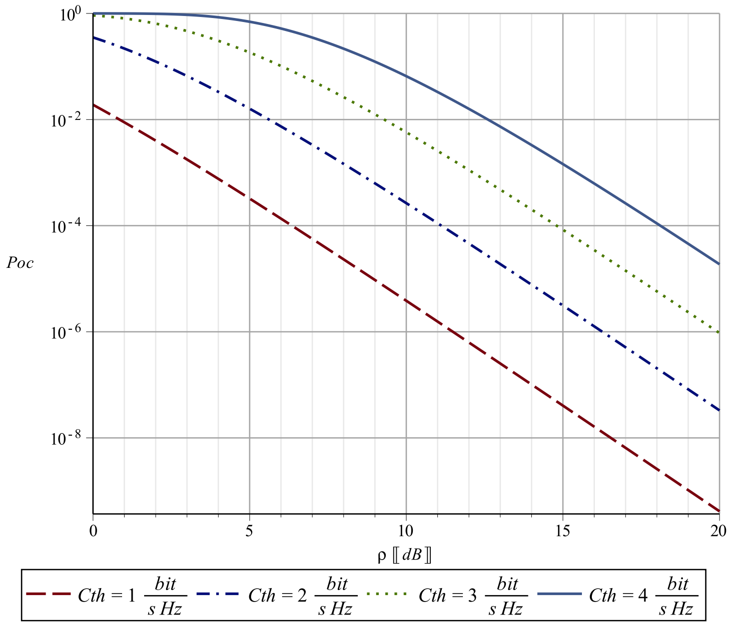
Ако го замениме (6.32) во (6.27) ќе се добие веројатноста на капацитетен испад на SISO каналот за рејлиев фединг:

$$P_{oc} = \int_0^{C_{th}} \frac{1}{\overline{\gamma}} \cdot \exp\left(\frac{1-2^C}{\overline{\gamma}}\right) \cdot 2^C \cdot \ln(2)\, dC = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{-1+2^{C_{th}}}{\overline{\gamma}}}. \tag{6.33}$$

На слика 6.4 е прикажана ОС за SISO добиен со (6.33) во зависност од средниот однос сигнал-шум во рејлиев канал за различни вредности на прагот $C_{th} = 1\,bit/s/Hz$, $C_{th} = 2bit/s/Hz$, $C_{th} = 3\,bit/s/Hz$ и $C_{th} = 4\,bit/s/Hz$.

**Веројатност на капацитетен испад на SIMO:** За случајот на SIMO канал ($N_T = 1, N_R > N_T$) каналната матрица е вектор-редица: $\mathbf{H} = [h_1, h_2, ..., h_{N_T}]$, а матрицата $\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^H = \sum_{j=1}^{N_T} |h_j|^2 = \|\mathbf{H}\|_F^2$ е скалар. Имајќи го тоа во предвид (6.11) се сведува на:

$$C = \log_2\left(1 + \frac{E_s}{N_0} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2\right) = \log_2\left(1 + \overline{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2\right). \tag{6.34}$$




**Слика 6.5:** Веројатност на капацитетен испад за SIMO со $N_R = m = 4$ во рејлиев фединг за фиксно $C_{th}$

Да претпоставиме дека модулот од секој елемент од каналниот векторот $\mathbf{H}$, $|h|$ е дистрибуиран согласно рејлиевата распределба. Тогаш квадратот на фробениусовата норма е $\|\mathbf{H}\|_F^2$ ја следи гама функцијата на густина на веројатност (4.11). Во овој случај изразот (6.34) е:

$$C = \log_2(1 + \overline{\gamma} \cdot x) \tag{6.35}$$

каде $x$ е случајна променлива која ја опишува фробениусовата норма $\|\mathbf{H}\|_F^2$. Ако од (6.35) го изразиме $x$ се добива:

$$x = \frac{2^C - 1}{\overline{\gamma}} \qquad dx = \frac{1}{\overline{\gamma}} \cdot \ln(2) \cdot 2^C dC \qquad x_{th} = \frac{2^{C_{th}} - 1}{\overline{\gamma}}. \tag{6.36}$$

Ако извршиме функционалнат трансформација согласно (6.36) се добива функцијата на густина на веројатност на капацитетот:

$$f_C = f_X(x) \cdot \left.\frac{dx}{dC}\right|_{x=\frac{2^C-1}{\overline{\gamma}}} = \frac{\left(\frac{2^C-1}{\overline{\gamma}}\right)^{m-1}}{\Gamma(m)} \cdot e^{-\frac{2^C-1}{\overline{\gamma}}} \cdot \frac{1}{\overline{\gamma}} \cdot \ln(2) \cdot 2^C \tag{6.37}$$

Доколку (6.37) се замени во (6.27) се добива :

$$P_{oc} = 1 - \frac{1}{\Gamma(m)} \cdot \int_{x_{th}}^{\infty} x^{m-1} \cdot e^{-x} \cdot dx = 1 - \frac{\Gamma\left(m, \frac{2^{C_{th}}-1}{\overline{\gamma}}\right)}{\Gamma(m)} \tag{6.38}$$

На слика 6.5 е прикажана ОС за SIMO во рејлиев фединг со користење на (6.38) во зависност од средниот однос сигнал-шум за различни вредности на прагот $C_{th} = 1\,bit/s/Hz$, $C_{th} = 2bit/s/Hz$, $C_{th} = 3\,bit/s/Hz$ и $C_{th} = 4\,bit/s/Hz$.

**Веројатност на капацитетен испад за МИМО:** Согласно 8.95 капацитетот на МИМО каналот е:

$$C = \sum_{i=1}^{r} \log_2\left(1 + \frac{P_T}{N_T \cdot N_0} \cdot \lambda_i\right) \tag{6.39}$$

Доколку претпоставиме дека сопствените вредности се i.i.d. случајни променливи и доколку бројот на предавателни антени во изворот е еднаков на бројот на приемни антени во дестинацијата($N_T = N_R$), максимално достигливиот капацитет може да се изрази како:

$$C = N_T \log_2\left(1 + \frac{P_T}{N_T N_0} \cdot \lambda\right) \tag{6.40}$$

Доколку од (6.40) ја изразиме сопствената вредност:

$$\lambda = \frac{\left(2^{\frac{C}{N_T}} - 1\right)}{P_T/\left(N_T N_0\right)} \tag{6.41}$$

Со користење на функционална трансформација на случајните променливи се добива PDF-от на капацитетот :

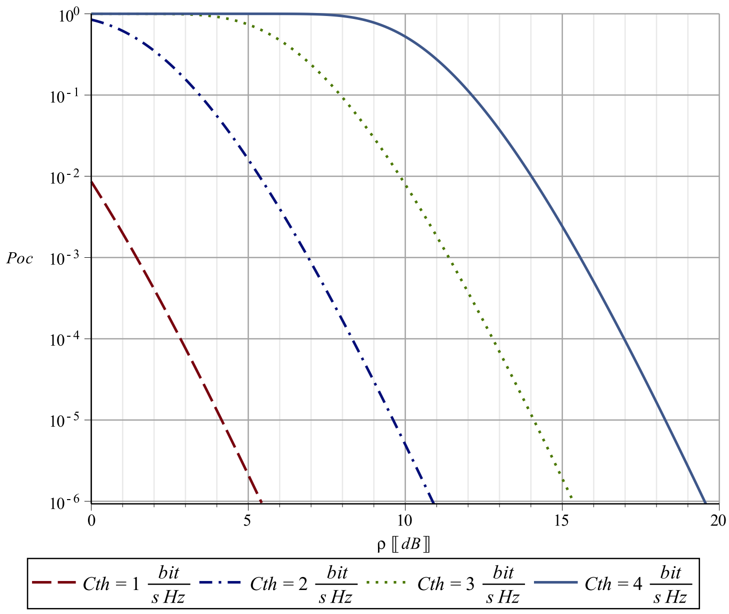
$$f_C(C) = f_\lambda\left(\frac{\left(2^{\frac{C}{N_T}} - 1\right)}{P_T/\left(N_T N_0\right)}\right) \cdot \ln(2) \cdot \frac{N_0}{P_T} \cdot 2^{C/N_T} \tag{6.42}$$

Доколку се знае PDF-от на сопствената вредност може да се пресмета и PDF-от на капацитетот, а со користење на (6.27) може да се добие и ОС.

**Веројатност на капацитетен испад на МИМО со OSTBC:** Согласно (6.23) моменталнот капацитет на МИМО со OSTBC е:

$$C = \frac{K}{L} \cdot \log_2\left[1 + \overline{\gamma} \cdot \|H\|_F^2\right] = \frac{K}{L} \cdot \log_2\left[1 + \frac{\rho \cdot L}{N_T \cdot K} \cdot \|H\|_F^2\right] \tag{6.43}$$

Каде $\overline{\gamma} = \rho \cdot c = \rho \cdot \frac{L}{N_T \cdot K}$ е средниот SNR по симбол за произволен OSTBC код (4.47), $\rho = P_T/N_0$ е вкупнот SNR по симболен интервал, $L$ е бројот на временски интервали во кој се пренесува OSTBC блокот, $N_T$ е бројот на предавателни антени во изворот и




**Слика 6.6:** Веројатност на испад на капац. за 3x3 МИМО со 334 OSTBC за фиксно $C_{th}$

$K$ е бројот на ненулти симболи кои се пренесуваат по антена за период од $L$ временски интервали. Изразот (6.43) може да се претстави во следнава форма:

$$C = \frac{K}{L} \cdot \log_2 \left(1 + \gamma\right). \tag{6.44}$$

Со оглед на тоа што моменталниот однос сигнал-шум е:$\gamma = \overline{\gamma} \cdot \|H\|_F^2$ и квадратот на фробениусовата норма $\|H\|_F^2$ го следи (4.11) со параметар на размер$\theta$=1 и параметар на облик $\alpha$, ако се изврши функционална трансформација на случајните проеменливи:

$$\gamma = \overline{\gamma} \cdot x \qquad f_\Gamma\left(\gamma\right) = \left.\frac{f\left(x\right)}{\overline{\gamma}}\right|_{x=\frac{\gamma}{\overline{\gamma}}} = \frac{\gamma^{\alpha-1}}{\overline{\gamma}^{\alpha}\Gamma\left(\alpha\right)}\; e^{-\frac{\gamma}{\overline{\gamma}}} \tag{6.45}$$

се добива дека моменталнот однос сигнал-шум $\gamma$ ја следи гама функција за густина на веројатност (4.10) со параметар на размер $\theta = \overline{\gamma}$. Ако го изразиме $\gamma$ од (6.44) се добива:

$$\gamma = 2^{\frac{LC}{K\cdot}} - 1 \qquad d\gamma = \left(e^{\frac{LC}{K\cdot}\cdot\ln(2)}\right)' dC = \frac{L}{K\cdot} \cdot \ln\left(2\right) \cdot 2^{\frac{LC}{K}} \tag{6.46}$$

Доколку со користење на (6.46) извршиме функционална трансформација на случајните променливи, PDF-от на капацитетот е:

$$f_C\left(C\right) = \frac{\left(2^{\frac{LC}{K}} - 1\right)^{\alpha-1}}{\theta^{\alpha}\Gamma\left(\alpha\right)}\; e^{-\frac{\left(2^{\frac{LC}{K}}-1\right)}{\theta}} \cdot \frac{L}{K} \cdot \ln\left(2\right) \cdot 2^{\frac{LC}{K}} \tag{6.47}$$

Доколку (6.47) се замени во (6.27) се добива :

$$P_{oc} = 1 - \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\Gamma\left(\alpha, \frac{2^{\frac{LC_{th}}{K}} - 1}{\theta}\right) \tag{6.48}$$

Доколку во (6.48) земеме дека параметарот на облик $\alpha = N_R \cdot N_T$ и параметарот на размер е $\theta = \overline{\gamma} = \frac{L\cdot\rho}{N_T K}$ ќе ја добиеме веројатноста на капацитетен испад за МИМО OSTBC канал во рејлиев фединг:

$$P_{oc} = 1 - \frac{1}{\Gamma(n_R \cdot n_T)} \cdot \Gamma\left(n_R \cdot n_T, \frac{2^{\frac{L \cdot C_{th}}{K}} - 1}{\rho \cdot L} \cdot N_T \cdot K\right) \tag{6.49}$$

На слика 6.6 е прикажана ОС за 3x3 МИМО со 334 OSTBC добиени со (6.49) во зависност од средниот однос сигнал-шум за различни вредности на прагот $C_{th} = 1\,bit/s/Hz$, $C_{th} = 2bit/s/Hz$, $C_{th} = 3\,bit/s/Hz$ и $C_{th} = 4\,bit/s/Hz$.

# 6.2 Ергодичен капацитет

Во главите 3, 4 и 5 беа разгледувани ОР и ЕР перформансите на МИМО релејните канали со и без директна патека до дестинацијата, а во оваа глава ќе го анализираме капацитетот на овие релејни канали. Исто така во главите 3, 4 и 5 се разгледувани МИМО системи кои користат OSTBC кодирање и затоа во понатамошното излагање ќе се користат изразите за МИМО со OSTBC кодирање без тоа посебно да се нагласува.

## 6.2.1 Каскаден AF МИМО релеен канал

Во оваа глава ќе го анализираме капацитетот на каскадниот МИМО релеен канал. Согласно изразот (2.253) капацитетот на AF релејниот канал без дирекнта компонента е:

$$C = \frac{1}{2}\log(1+\gamma) = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\gamma_{32} \cdot \gamma_{21}}{\gamma_{32} + \gamma_{21} + 1}\right) \tag{6.50}$$

**Тврдење 6.1.**

Дропката во логаритамот од (6.50) го претставува крај-крај односот сигнал-шум на каскадниот AF МИМО релеен канал.

**Доказ:** Доколку во изразот (4.7) се замени $\overline{\gamma} = E_s/N_0$ се добива:

$$\gamma = \overline{\gamma} \cdot \frac{A^2 \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2 \ \|\mathbf{H}\|_F^4}{A^2 \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2 \ \|\mathbf{H}\|_F^2 + 1} \tag{6.51}$$

Изразот 6.51 може да се претстави во следнава форма:

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\overline{\gamma}} \cdot \frac{A^2 \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2 \ \|\mathbf{H}\|_F^2 + 1}{A^2 \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2 \ \|\mathbf{H}\|_F^4} = \frac{1}{\overline{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2} + \frac{1}{\overline{\gamma} \cdot A^2 \cdot \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2 \ \|\mathbf{H}\|_F^4} \tag{6.52}$$

Доколу земеме $E_R = E_I = E_S$ во изразот (4.3) се добива:

$$A^2 = \frac{E_s}{E_s \|\mathbf{H}\|_F^4 + \|\mathbf{H}\|_F^2 \ N_0} = \frac{\overline{\gamma}}{\overline{\gamma}\|\mathbf{H}\|_F^4 + \|\mathbf{H}\|_F^2} \tag{6.53}$$

Доколку (6.53) се замени во (6.52) се добива:

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\overline{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2} + \frac{1}{\overline{\gamma} \cdot \frac{\overline{\gamma}}{\overline{\gamma}\|\mathbf{H}\|_F^4 + \|\mathbf{H}\|_F^2} \cdot \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2 \cdot \|\mathbf{H}\|_F^4} = \frac{1}{\overline{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2} + \frac{\overline{\gamma}\|\mathbf{H}\|_F^4 + \|\mathbf{H}\|_F^2}{\overline{\gamma}^2 \cdot \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2 \cdot \|\mathbf{H}\|_F^4} =$$

$$= \frac{1}{\overline{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2} + \frac{1}{\overline{\gamma} \cdot \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2} + \frac{1}{\overline{\gamma}^2 \cdot \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2 \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2} = \frac{1}{\gamma_{21}} + \frac{1}{\gamma_{32}} + \frac{1}{\gamma_{21} \cdot \gamma_{32}} \tag{6.54}$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma_{21}} + \frac{1}{\gamma_{32}} + \frac{1}{\gamma_{21} \cdot \gamma_{32}} \qquad \gamma = \frac{1}{\frac{1}{\gamma_{21}} + \frac{1}{\gamma_{32}} + \frac{1}{\gamma_{21} \cdot \gamma_{32}}} = \frac{\gamma_{21} \cdot \gamma_{32}}{\gamma_{21} + \gamma_{32} + 1} \tag{6.55}$$

Со што се докажува тврдењето 6.1.

Од друга страна доколку во (6.52) се замени апроксимативниот израз за факторот на засилување на релето (4.4) за $b = 1$ се добива:

$$\gamma = \overline{\gamma} \cdot \frac{A^2 \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2 \ \|\mathbf{H}\|_F^4}{A^2 \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2 \ \|\mathbf{H}\|_F^2 + 1} \qquad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\overline{\gamma}} \cdot \frac{A^2 \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2 \ \|\mathbf{H}\|_F^2 + 1}{A^2 \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2 \ \|\mathbf{H}\|_F^4} = \frac{1}{\overline{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2} + \frac{1}{\overline{\gamma} \cdot A^2 \cdot \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2 \ \|\mathbf{H}\|_F^4} =$$

$$= \frac{1}{\overline{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2} + \frac{1}{\overline{\gamma} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{b} \ \|\mathbf{H}\|_F^2} \right)^2 \cdot \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2 \ \|\mathbf{H}\|_F^4} = \frac{1}{\overline{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2} + \frac{1}{\overline{\gamma} \cdot \frac{1}{b \cdot \cancel{\|\mathbf{H}\|_F^4}} \cdot \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2 \ \cancel{\|\mathbf{H}\|_F^4}} =$$

$$= \frac{1}{\overline{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2} + \frac{b}{\overline{\gamma} \cdot \|\mathbf{G}\|_{\mathrm{F}}^2} = \frac{1}{\gamma_{31}} + \frac{b}{\gamma_{32}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma_{31}} + \frac{\cancelto{1}{b}}{\gamma_{32}} \qquad \gamma = \frac{1}{\frac{1}{\gamma_{31}} + \frac{1}{\gamma_{32}}} = \frac{\gamma_{31}\gamma_{32}}{\gamma_{31} + \gamma_{32}} \tag{6.56}$$

Изразот (6.56) може да се претстави преку фробенуосовите норми на делницата од изворот до релето ($\|H\|_F^2$) и делницата од релето до дестинацијата ($\|G\|_F^2$):

$$\gamma = \frac{1}{\frac{1}{\gamma_{31}} + \frac{1}{\gamma_{32}}} = \frac{\gamma_{31}\gamma_{32}}{\gamma_{31} + \gamma_{32}} =$$

$$= \frac{\left( \frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T} \right)^2 \|H\|_F^2 \cdot \|G\|_F^2}{\frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T} \left( \|H\|_F^2 + \|G\|_F^2 \right)} = \frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T} \cdot \frac{\|H\|_F^2 \cdot \|G\|_F^2}{\|H\|_F^2 + \|G\|_F^2} \tag{6.57}$$

МИМО релејниот канал со OSTBC и засили-и-проследи реле може да го претставиме со еквивалентен точка-точка МИМО систем чиј ергодичен капацитет е даден со:

$$C_{AF} = E_H \left\{ \frac{K}{L} \cdot \log_2 (1 + \gamma) \right\} = E_H \left\{ \frac{K}{L} \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{\gamma_{32} \cdot \gamma_{21}}{\gamma_{32} + \gamma_{21} + 1} \right) \right\} \approx \tag{6.58}$$

$$\approx E_H \left\{ \frac{K}{L} \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{\gamma_{32} \cdot \gamma_{21}}{\gamma_{32} + \gamma_{21}} \right) \right\} = E_H \left\{ \frac{K}{L} \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T} \cdot \frac{\|H\|_F^2 \cdot \|G\|_F^2}{\|H\|_F^2 + \|G\|_F^2} \right) \right\} \tag{6.59}$$

Од изразот (6.59) е јасно дека капацитетот на МИМО релејниот канал со OSTBC кој во релето користи метода на засили-и-проследи не може да биде поголем од капацитетот на точка-точка МИМО каналот со OSTBC:

$$C_{AF} \leq \frac{K}{L} \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T} \cdot \|H\|_F^2 \right) \tag{6.60}$$

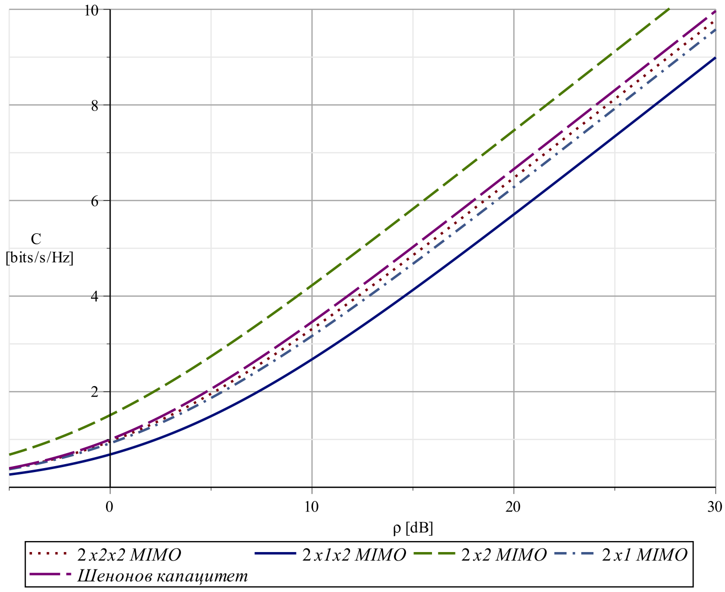
затоа што $\frac{\|H\|_F^2 \cdot \|G\|_F^2}{\|H\|_F^2 + \|G\|_F^2} < \|H\|_F^2$.

Од друга страна за МИМО релејниот канал со засили-и-проследи реле може да ја користиме едноставната апроксимација (4.55) согласно која моменталниот крај-крај сигнал-шум на AF МИМО релејниот канал ја следи гама функцијата на густина на веројатност со параметар на размер $\theta = \frac{\overline{\gamma}}{b+1}$ и параметар на облик $m$:

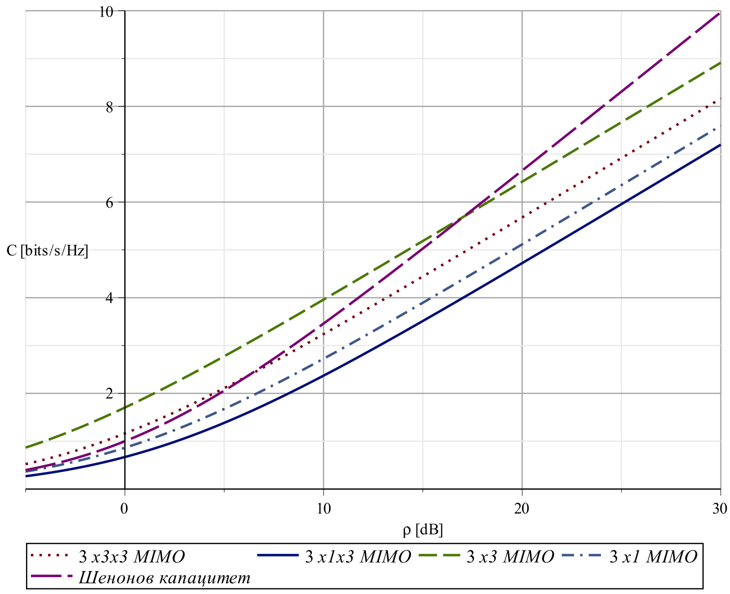
$$f(\gamma) = \frac{(b+1)^m}{\overline{\gamma}^m \cdot \Gamma(m)} \ \gamma^{m-1} e^{-\frac{(b+1)\gamma}{\overline{\gamma}}}. \tag{6.61}$$

Каде $\overline{\gamma}$ е средниот SNR по симбол за произволен OSTBC код 4.47:

$$\overline{\gamma} = \rho \cdot c = \rho \cdot \frac{L}{N_T \cdot K} \tag{6.62}$$




**Слика 6.7:** Шенонов капацитет во споредба со ергодичниот капацитет на 2x2/2x1 точка-точка МИМО и 2x2x2/2x1x2 AF МИМО RC со 222 OSTBC

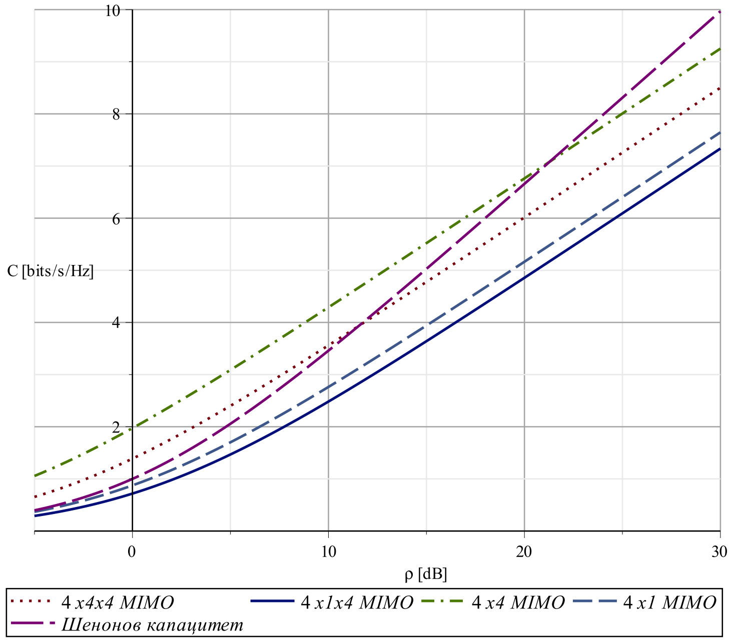



**Слика 6.8:** Шенонов капацитет во споредба со ергодичниот капацитет на 3x3/3x1 точка-точка МИМО и 3x3x3/3x1x3 AF МИМО RC со 334 OSTBC

каде $\rho = P_T/N_0$ е вкупнот SNR по временски интервал, $L$ е бројот на временски интервали во кој се пренесува OSTBC блокот, $N_T$ е бројот на предавателни антени во изворот и $K$ е бројот на симболи различни од нула кои се пренесуваат по антена за период од $L$ временски интервали. Изразот 6.61 може да се користат за $N$x*1*x$N$ систем со користење на замените: $m = N_T$ и $b = c$ и за $N$x$N$x$N$ систем со користење на замените: $m = N_T \cdot N_R = N^2$ и $b = 1$.

Доколку (6.61) се замени во (6.58) се добива апроксимацијата на ергодичниот капацитет на каскаден МИМО релеен канал со засили-и-проследи:

$$C_{AF} \approx \frac{K}{L \cdot \Gamma(m) \cdot \ln(2)} \cdot G_{3,2}^{1,3}\left( \frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T \cdot (b+1)} \bigg|_{1,0}^{1-m,1,1} \right) \tag{6.63}$$




**Слика 6.9:** Шенонов капацитет во споредба со ергодичниот капацитет на 4x4/4x1 точка-точка МИМО и 4x4x4/4x1x4 МИМО релеен канал со 434 OSTBC

Изразот 6.63 може да се користат за $N$x$1$x$N$ систем со користење на замените: $m = N_T$ и $b = c$ и за $N$x$N$x$N$ систем со користење на замените: $m = N_T \cdot N_R = N^2$ и $b = 1$.

На сликите 6.7,6.8 и 6.9 е дадена споредбата на апроксимација на капацитетот на МИМО релеен канал со засили-и-проследи (6.63) со Шенoновиот капацитет и горната граница дадена со (6.60) за двете разгледувани конфигурации на системот користен во глава (4) (Nx1xN и NxNxN) кога тој користи 222, 334 и 434 OSTBC.

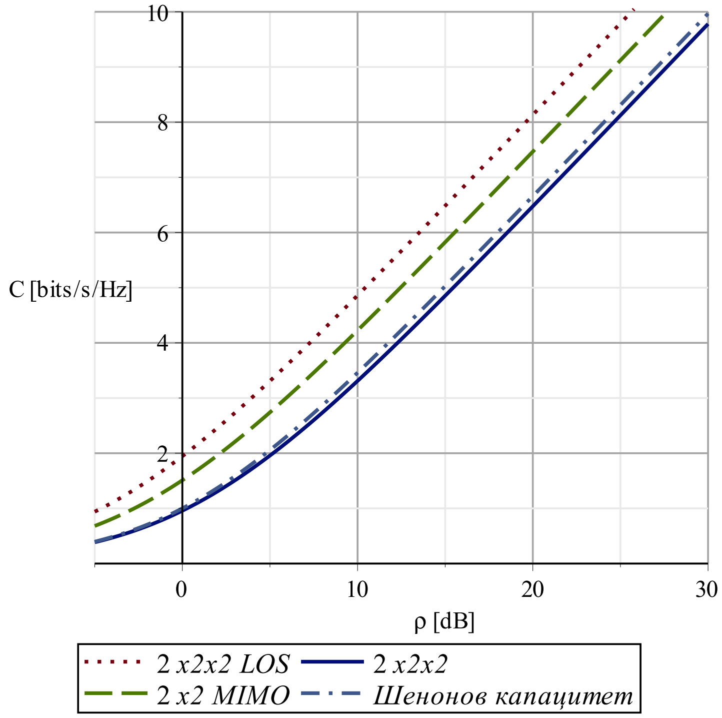
Од сликите 6.7,6.8 и 6.9 може да се види дека апроксимацијата (6.63) не ја надминува горната граница (6.60), и дека истата се приближува до горната граница на достигливиот капацитет со зголемување на бројот на антени. Од сликите исто така може да се забележи дека ергодичниот капацитет за $N$x$1$x$N$ системот е занемарливо помал од капацитетот на соодветниот $N$x$1$ точка-точка канал и дека разликата се зголемува со зголемување на односот сигнал-шум и намалување на бројот на антени.

## 6.2.2 AF МИМО релеен канал со директна патека

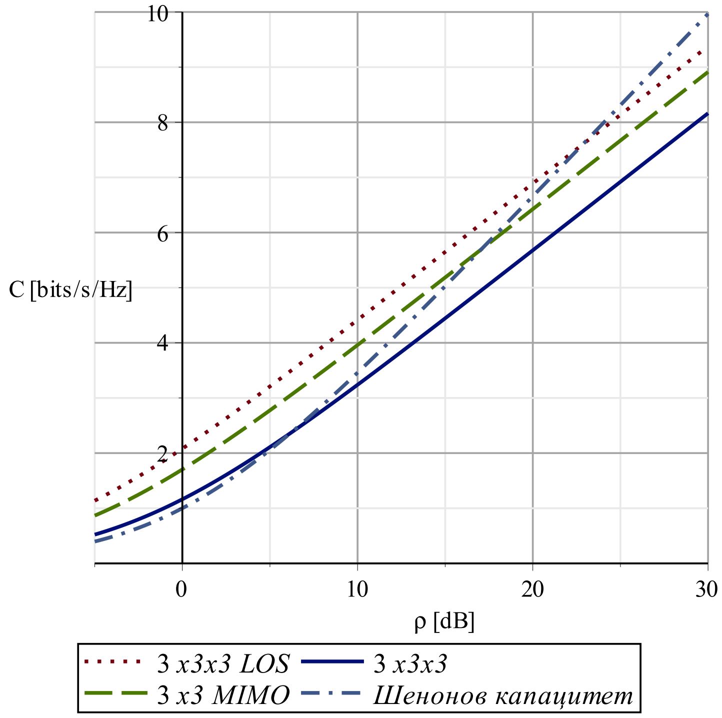
Доколку изразот за функцијата на густината на веројатност (4.72) за системот со директна патека до дестинацијата се замени во изразот за ергодичен капацитет на МИМО со OSTBC (6.58) се добива:

$$C_{AF} = \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \int_0^{\infty} \frac{\gamma^{2m+k-1}\,(b+1)^{2m+k}}{\Gamma\,(2m+k) \cdot \overline{\gamma}^{2m+k}} \cdot e^{-\frac{(b+1)\cdot\gamma}{\overline{\gamma}}} \cdot \frac{K}{L} \cdot \log_2(1+\gamma)\, d\gamma \tag{6.64}$$

Без да се загуби општоста на нумеричката анализа на МИМО релејните канали со директна патека ќе ја опфати само $N$x$N$x$N$ системската конфигурација ($m = N_T{\cdot}N_R = N^2$ и $b = 1$). Сепак, изразот (6.64) може да се користи за пресметка на ергодичниот капацитет на $N$x$1$x$N$ системската конфигурација доколку се избере: $m = N_T$ и $b = c = L/(N \cdot K)$. Доколку се спореди ергодичниот капацитет на МИМО каналот со директна патека (6.64) со ергодичниот капацитет на каскадниот МИМО RC даден со (6.63) се добиваат резултатите прикажани на сликите: 6.10, 6.11 и 6.12.

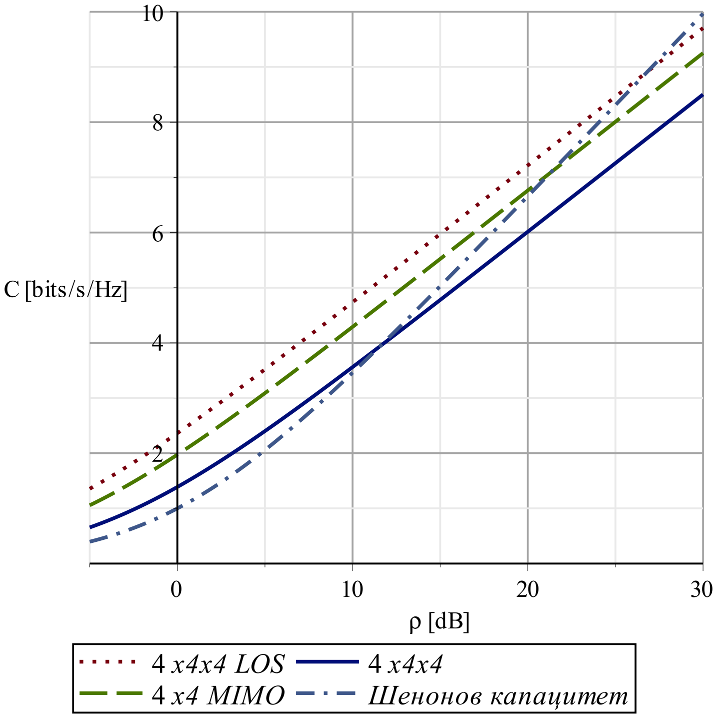



**Слика 6.10:** Ергодичен капацитет за 2x2x2 MIMO релеен канал со и без директна патека




**Слика 6.11:** Ергодичен капацитет за 3x3x3 МИМО релеен канал со и без директна патека

Од сликите 6.10, 6.11 и 6.12 може да се забележи дека ергодичиот капацитет на $N$x$N$x$N$ МИМО релејните канали со дирекнта патека го надминува ергодичниот капацитет на соодветните каскадни релејни МИМО системи. Освен тоа тие покажуваат поголем капацитет и од точка-точка МИМО системите со соодветен број на антени. МИМО релејните канали со директна патека го надминуваат шеноновиот капацитет за практични




**Слика 6.12:** Ергодичен капацитет за 4x4x4 МИМО релеен канал со и без директна патека

вредности на односот сигнал-шум. Системот кој користи по две антени во јазлите го надминува Шеноновиот капацитет за сите вредности на односот сигнал-шум, а другите системи имаат помал капацитет од Шеноновиот капацитет само за случај на големи вредности на односот сигнал-шум. Со зголемување на бројот на антени се поместува пресечната точка во десно, односно капацитетот на МИМО релејните канали со повеќе антени паѓа под Шеноновиот капацитет за поголеми вредности на односот сигнал-шум во споредба со МИМО релејните канали кои имаат помалку антени по јазол и иста брзина на кодот.

# 6.3 Веројатност на капацитетен испад

## 6.3.1 Каскаден AF МИМО релеен канал

За пресметка на капацитетот на испад на МИМО релејниот канал кој користи засили-и-проследи, релејниот канал ќе го третираме како точка-точка канал чиј крај-крај однос сигнал-шум е распределен согласно гама функцијата на густина на веројатност параметар на облик $\alpha = m$ и параметар на размер $\theta = \frac{\overline{\gamma}}{b+1}$ (4.55):

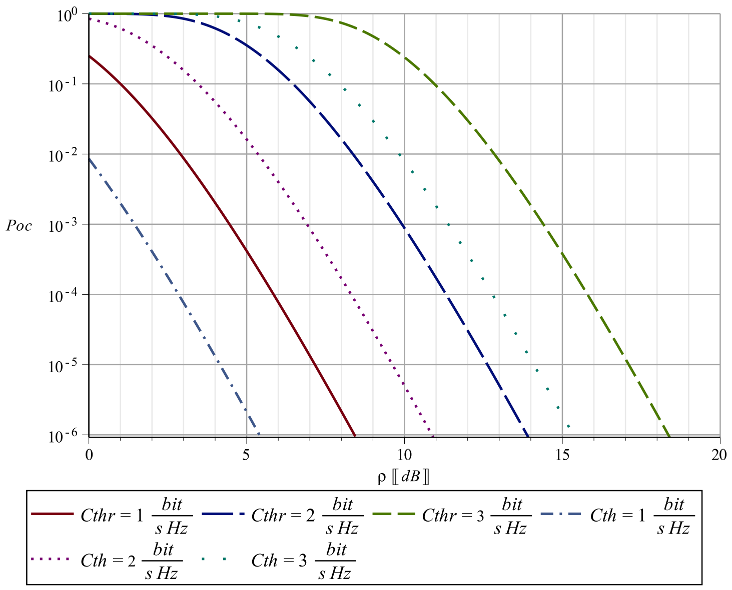
$$f_\Gamma(\gamma) = \frac{\gamma^{\alpha-1}}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{\gamma}{\theta}} = \frac{(b+1)^m}{\overline{\gamma}^m \cdot \Gamma(m)} \gamma^{m-1} e^{-\frac{(b+1)\gamma}{\overline{\gamma}}} \qquad \gamma > 0,\, m,\, \overline{\gamma} > 0 \tag{6.65}$$

Моменталниот капацитет е (6.43):

$$C = \frac{K}{L} \cdot \log_2(1+\gamma) \tag{6.66}$$

Ако го изразиме $\gamma$ од (6.66) се добива:

$$\gamma = 2^{\frac{LC}{K\cdot}} - 1 \qquad d\gamma = \left(e^{\frac{LC}{K\cdot}\cdot\ln(2)}\right)' dC = \frac{L}{K} \cdot \ln(2) \cdot 2^{\frac{LC}{K}} \tag{6.67}$$




**Слика 6.13:** Споредба на веројатностите на капацитетен испад за 3x3 и 3x3x3 МИМО со 334 OSTBC за фиксно $C_{th}$

Доколку со користење на (6.67) извршиме функционална трансформација на случајните променливи, функцијата за густина на веројатност на капацитетот е:

$$f_C(C) = f_\Gamma\left(2^{\frac{LC}{K}} - 1\right) \cdot \frac{d\gamma}{dC} = \frac{\gamma^{\alpha-1}}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)}\, e^{-\frac{\gamma}{\theta}}\Bigg|_{\gamma = 2^{\frac{LC}{K}}-1} \cdot \frac{L}{K} \cdot \ln(2) \cdot 2^{\frac{LC}{K}} =$$

$$= \frac{\left(2^{\frac{LC}{K}} - 1\right)^{\alpha-1}}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)}\, e^{-\frac{\left(2^{\frac{LC}{K}}-1\right)}{\theta}} \cdot \frac{L}{K} \cdot \ln(2) \cdot 2^{\frac{LC}{K}} \qquad (6.68)$$

Доколку (6.68) се замени во (6.27) се добива:

$$P_{oc} = 1 - \int_{C_{th}}^{\infty} \frac{\left(2^{\frac{LC}{K}} - 1\right)^{\alpha-1}}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)}\, e^{-\frac{\gamma}{\theta}} \cdot \frac{L}{K} \cdot \ln(2) \cdot 2^{\frac{LC}{K}} dC =$$

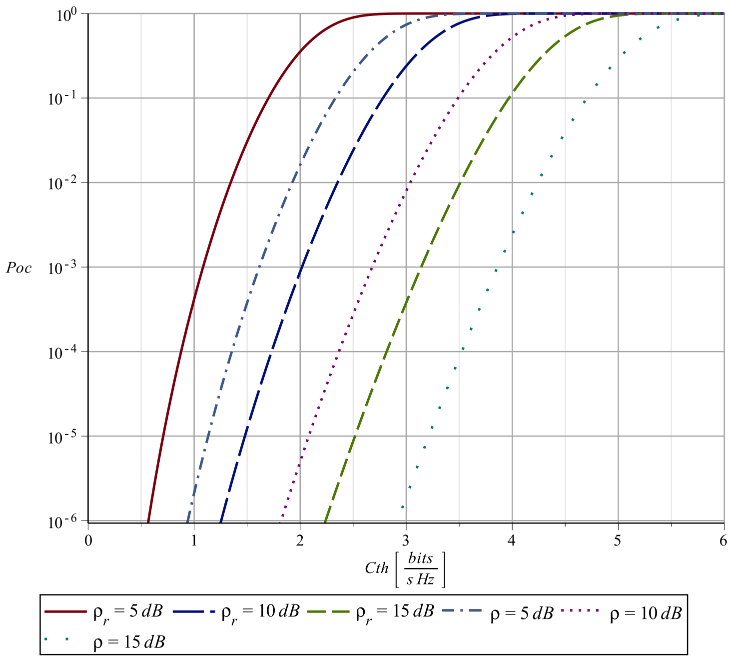
$$= 1 - \int_{C_{th}}^{\infty} \frac{\left(\frac{2^{\frac{LC}{K}}-1}{\theta}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, e^{-\left(\frac{2^{\frac{LC}{K}}-1}{\theta}\right)} \cdot d\left(\frac{2^{\frac{LC}{K}}-1}{\theta}\right) = \left| t_{th} = \frac{2^{\frac{LC_{th}}{K}}-1}{\theta} \right| =$$

$$= 1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{th}}^{\infty} t^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{t}{\theta}} \cdot dt = 1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha, t_{th}) =$$

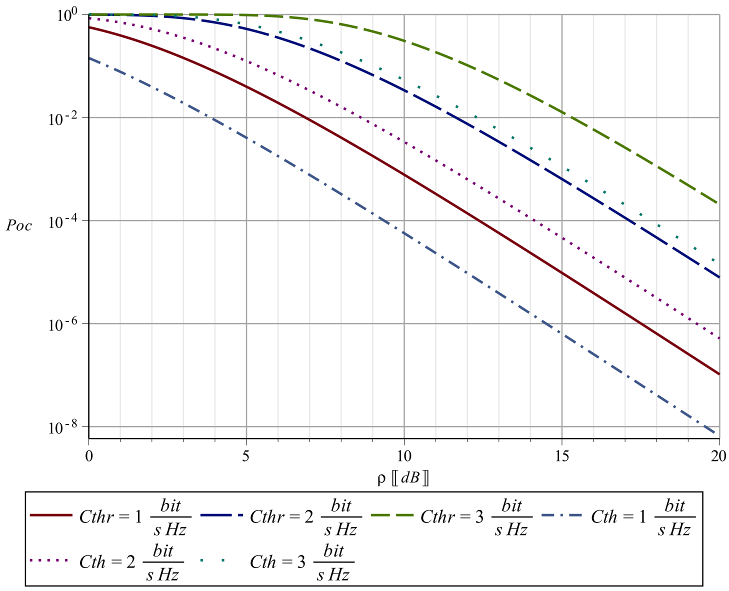
$$= 1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma\left(\alpha, \frac{2^{\frac{LC_{th}}{K}}-1}{\theta}\right) = 1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma\left(\alpha, \frac{2^{\frac{LC_{th}}{K}}-1}{\theta}\right) \qquad (6.69)$$

Доколку во (6.69) земеме дека параметарот на облик на гама функцијата е$\alpha = m$ и параметарот на размер е $\theta = \frac{\overline{\gamma}}{(b+1)} = \frac{L\cdot\rho}{N_T K\cdot(b+1)}$ ќе ја добиеме веројатноста на капацитетен испад за МИМО OSTBC RC со засили-и-проследи во рејлиев фединг:

$$P_{oc} = Pr(C \leq C_{th}) = 1 - \frac{1}{\Gamma(m)} \cdot \Gamma\left(m, \frac{\left(2^{\frac{L\cdot C_{th}}{K}} - 1\right)}{\rho \cdot L} \cdot N_T \cdot K \cdot (b+1)\right) \qquad (6.70)$$

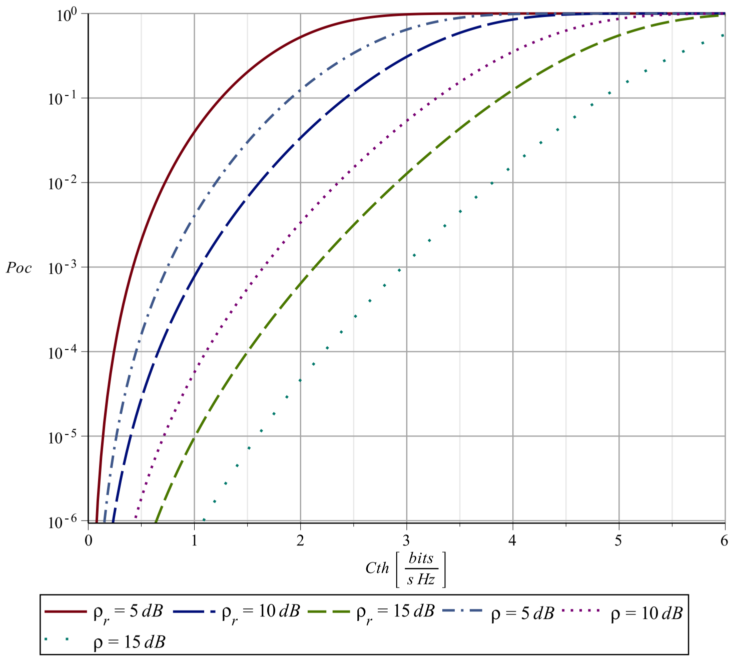



**Слика 6.14:** Споредба на веројатностите на капацитетен испад за 3x3 и 3x3x3 МИМО со 334 OSTBC за фиксно $\rho$




**Слика 6.15:** Споредба на веројатностите на капацитетен испад за 2x2 и 2x2x2 МИМО со 222 OSTBC за фиксно $C_{th}$

Без да се загуби општоста, нумеричката анализа на МИМО релејните канали со директна патека ќе ја опфати само $N$x$N$x$N$ системската конфигурација ($m = N_T \cdot N_R = N^2$ и $b = 1$). Сепак, изразот (6.70) може да се користи за пресметка на веројатноста за испад на $N$x*1*x$N$ системската конфигурација доколку се избере: $m = N_T$ и $b = c = L/(N \cdot K)$. На сликите 6.13 и 6.14 е дадена споредба на веројатностите на капацитетен испад за 3x3 и 3x3x3 МИМО со 334 OSTBC за различни вредности на границата на капацитетниот испад - $C_{th}$ и вкупниот среден однос сигнал-шум - $\rho$. Кривите опишани со полни или




**Слика 6.16:** Споредба на веројатностите на капацитетен испад за 2x2 и 2x2x2 МИМО со 222 OSTBC за фиксно $\rho$

испрекинати линии се однесуваат на релејниот канал[3], а кривите опишани со точки се однесуваат на точка-точка каналот. Може да се забележи дека релејниот канал покажува полоши перформанси во поглед на капацитетен испад во споредба со точка-точка каналот. Разликата во перформанси се зголемува со намалување на границата на капацитетниот испад - $C_{th}$ односно со зголемување на вкупниот среден однос сигнал-шум - $\rho$ . Со користење на (1.10) се добива дека релејниот 3x3x3 МИМО систем има ист диверзитет со 3x3 точка-точка МИМО каналот.

На сликите 6.15 и 6.16 е дадена споредба на веројатностите на капацитетен испад за 2x2 и 2x2x2 МИМО со 222 OSTBC за различни вредности на границата на капацитетниот испад - $C_{th}$ и вкупниот среден однос сигнал-шум - $\rho$. Може да се забележи дека релејниот канал покажува исто така полоши перформанси во поглед на капацитетен испад во споредба со точка-точка каналот. Исто така, разликата во перформански се зголемува со намалување на границата на капацитетниот испад - $C_{th}$ односно со зголемување на вкупниот однос сигнал-шум - $\rho$ . За мал однос сигнал-шум се забележува дека перформансите на релејниот канал се приближуваат на перформансите на точка-точка каналот. Со користење на (1.10) се добива дека релејниот 2x2x2 МИМО систем има иста добивка на диверзитет како 2x2 точка-точка МИМО каналот.

Ако се споредат 2x2x2 и 3x3x3 системот, и покрај тоа што 3x3x3 системот користи нецела брзина на кодот тој покажува значително подобри перформанси од 2x2x2 системот. На пример за $C_{th} = 1b/s/Hz$ и $\rho = 5dB$ веројатноста дека моменталниот капацитет ќе биде помал од прагот $C_{th}$ за 2x2x2 системот изнесува 0,039, а за 3x3x3 изнесува $4 \cdot 10^{-4}$ што значи дека во овој случај 3x3x3 системот покажува подобри перформански за скоро две редни големини. Освен тоа со користење на (1.10) се покажува дека добивката на диверзитет на 3x3x3 системот е $d = 9$ што е повеќе од двојно поголема од добивката на диверзитет на 2x2x2 релјниот систем ($d = 4$).

[3]Нивниот вкупен среден однос сигнал-шум е дополнително обележан со индекс „$r$“

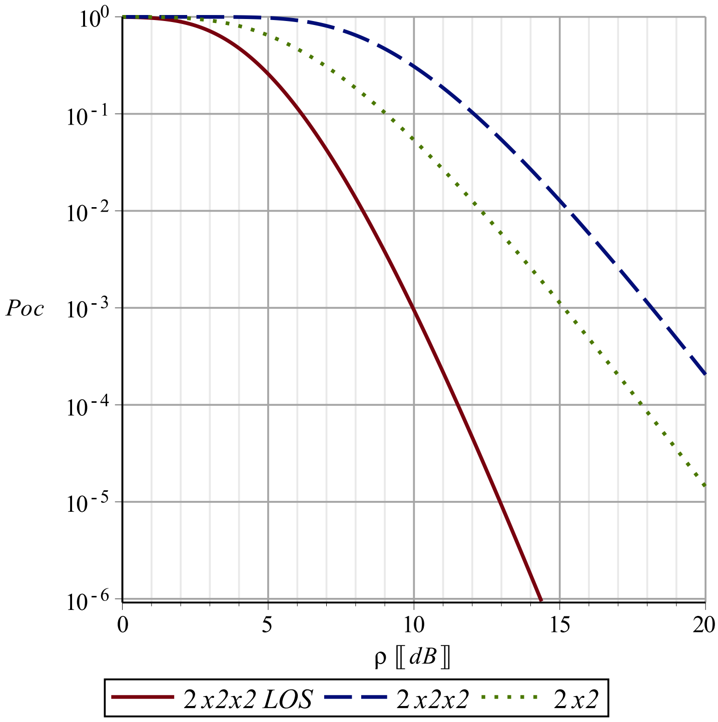
### 6.3.2 AF МИМО релеен канал со директна патека

За пресметка на капацитетот на испад на МИМО релејниот канал со директна патека до дестинацијата (види слика 4.12) каде релето користи засили-и-проследи ќе земеме дека крај-крај односот сигнал-шум е распределен согласно функцијата на густина на веројатност дадена со 4.72 :

$$f(\gamma) = \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \frac{\gamma^{2m+k-1}}{\Gamma(2m+k) \cdot \theta_l^{2m+k}} \cdot e^{-\frac{\gamma}{\theta_l}} \tag{6.71}$$

Каде параметарот на облик е даден со $\theta_l = \frac{\overline{\gamma}}{b+1}$. Моменталниот капацитет е (6.43):

$$C = \frac{K}{L} \cdot \log_2(1+\gamma) \tag{6.72}$$




**Слика 6.17:** Веројатност за капацитетен испад за 2x2x2 МИМО релеен канал со и без директна патека за $C_{th} = 3bit/s/Hz$

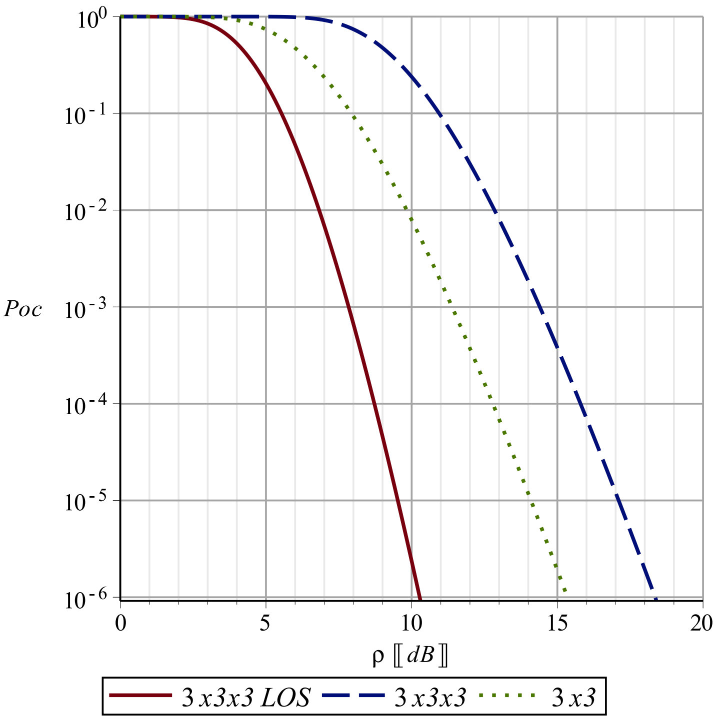
Ако го изразиме $\gamma$ од (6.72) се добива:

$$\gamma = 2^{\frac{LC}{K\cdot}} - 1 \qquad d\gamma = \left(e^{\frac{LC}{K\cdot}\cdot \ln(2)}\right)' dC = \frac{L}{K} \cdot \ln(2) \cdot 2^{\frac{LC}{K}} \tag{6.73}$$

Доколку со користење на (6.73) извршиме функционална трансформација на случајните променливи, функцијата за густина на веројатност на капацитетот е:

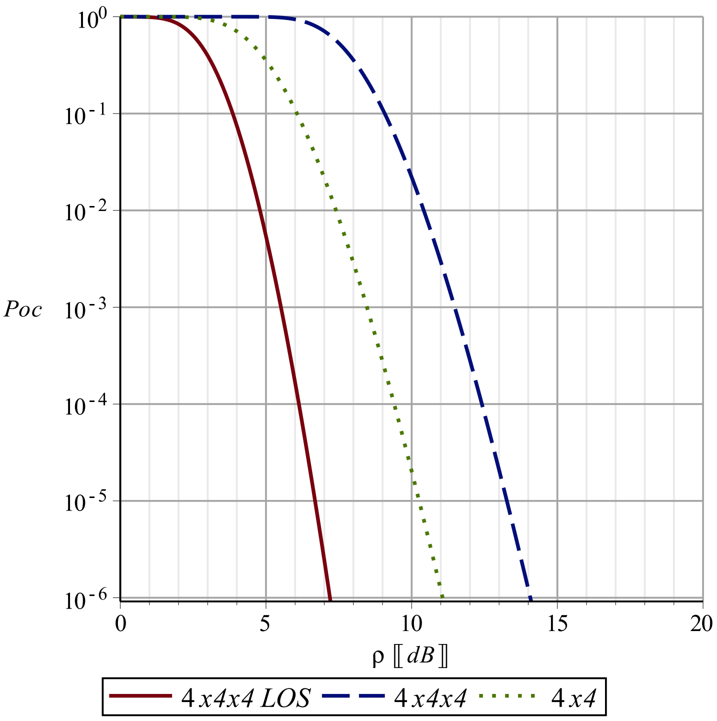
$$f_C(C) = f_\Gamma\left(2^{\frac{LC}{K}} - 1\right) \cdot \frac{d\gamma}{dC} =$$

$$= \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \frac{\gamma^{2m+k-1}}{\Gamma(2m+k) \cdot \theta_l^{2m+k}} \cdot e^{-\frac{\gamma}{\theta_l}} \Bigg|_{\gamma = 2^{\frac{LC}{K}}-1} \cdot \frac{L}{K} \cdot \ln(2) \cdot 2^{\frac{LC}{K}} =$$




**Слика 6.18:** Веројатност за капацитетен испад за 3x3x3 МИМО релеен канал со и без директна патека за $C_{th} = 3bit/s/Hz$

$$= \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \frac{\left(2^{\frac{LC}{K}} - 1\right)^{2m+k-1}}{\Gamma(2m+k) \cdot \theta_l^{2m+k}} \cdot e^{-\frac{\gamma}{\theta_l}} \cdot \frac{L}{K} \cdot \ln(2) \cdot 2^{\frac{LC}{K}} \tag{6.74}$$




**Слика 6.19:** Веројатност за капацитетен испад за 4x4x4 МИМО релеен канал со и без директна патека за $C_{th} = 3bit/s/Hz$

Доколку во изразот (6.27) се замени (6.74) и заради едноставност параметарот за облик го означиме $\alpha = 2m + k$, за веројатноста на испад на системот се добива:

$$P_{oc} = 1 - \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \int_{C_{th}}^{\infty} \frac{\left(2^{\frac{LC}{K}} - 1\right)^{\alpha-1}}{\theta_l^{\alpha} \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{2^{\frac{LC}{K}}-1}{\theta_l}} \cdot \frac{L}{K} \cdot \ln(2) \cdot 2^{\frac{LC}{K}} dC =$$

$$= 1 - \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \int_{C_{th}}^{\infty} \frac{\left(\frac{2^{\frac{LC}{K}}-1}{\theta_l}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\left(\frac{2^{\frac{LC}{K}}-1}{\theta_l}\right)} \cdot d\left(\frac{2^{\frac{LC}{K}} - 1}{\theta_l}\right) =$$

$$= \left| t_{th} = \frac{2^{\frac{LC_{th}}{K}} - 1}{\theta_l} \right| = 1 - \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{th}}^{\infty} t^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{t}{\theta_l}} \cdot dt =$$

$$= 1 - \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha, t_{th}) =$$

$$= 1 - \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma\left(\alpha, \frac{2^{\frac{LC_{th}}{K}} - 1}{\theta_l}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \frac{1}{\Gamma(2m+k)} \Gamma\left(2m+k, \frac{2^{\frac{LC_{th}}{K}} - 1}{\overline{\gamma}} \cdot (b+1)\right) \quad (6.75)$$

Без да се загуби општоста нумеричката анализа на релејните AF МИМО системи со диреккнта патека ќе ја опфати само $N$x$N$x$N$ системската конфигурација ($m = N_T \cdot N_R = N^2$ и $b = 1$). Сепак, изразот 6.75 може да се користи за пресметка на веројатноста на испад на $N$x*1*x$N$ системската конфигурација доколку се избере: $m = N_T$ и $b = c = L/(N \cdot K)$.

На сликите 6.17, 6.18 и 6.19 е прикажана споредба на веројатноста на капацитетен испад за 2x2x2, 3x3x3 и 4x4x4 AF МИМО релејните канали со директна патека (6.75), каскадните AF МИМО релејни канали 6.70 и соодветните точка-точка МИМО системи 6.49.
На сликите 6.17, 6.18 и 6.19 може да се забележи дека МИМО релејниот канал со директна патека има значително подобри перформанси на капацитетен испад од каскадниот МИМО релеен канал и од соодветниот точка-точка МИМО систем. Освен тоа МИМО релејнот систем со директна патека покажува и поголема добивка од диверзитет.

# 7 Заклучок

Во докторската дисертација се анализирани перформансите на неколку видови кооперативни релејни системи во фединг канали со примена на теоријата на комуникации и теоријата на информации. Конкретно:

- Спроведена е информациско-теоретска анализа на кооперативните системи со 3 јазли. Со примена на сопствен оригинален приод, изведени се познатите изрази за долната граница на капацитет за Гаусов релеен канал со декодирај-и-проследи реле, Гаусов релеен канал со компримирај-и-проследи реле, Гаусов релеен канал со фреквентна распределба во дестинацијата и Гаусов релеен канал со засили-и-проследи реле. Иако крајните изрази се познати во литературата, во оваа дисертација тие се постапно изведени на начин кој подоцна едноставно се пресликува во соодветна комуникациско-теоретската анализа.

- За МИМО релејните канали, извршена е анализа на перформансите на релеен систем со две делници со две антени по јазол кој користи ортогонално просторно-временско кодирање и има целосни информации за каналот во релето и дестинацијата во услови на Рејлиев фединг при што во релето е користена засили-и-проследи постапка. За ваков систем, изведени се аналитички изрази за веројатноста за испад, кои се потврдени преку нумерички анализи и симулации. Освен тоа за овој систем направена е споредба на веројатноста за битска грешка со веројатноста за битска грешка на системот кој користи фиксно засилување.

- Изведени се аналитички апроксимации на веројатностите за грешка и испад за засили-и-проследи МИМО релеен канал со повеќе антени по јазол кој користи ортогонално просторно-временско кодирање и има целосни информации за каналот во релето и дестинацијата во услови на Рејлиев фединг. Со помош на нумеричка интеграција на момент-генерирачка функција и симулации покажано е дека добиените апроксимации на веројатноста за грешка и испад се многу точни. Моделот на каналот е проширен со воведување на директна патека до дестинацијата и за тој случај се изведени апроксимативни изрази за веројатноста на испад во затворена форма. Резултатите од апроксимациите за проширениот модел се споредени со резултатите добиени за системите без директна патека.

- Анализирани се релејните канали со повеќе делници за кои беа одредени веројатностите за испад во случај на засили-и-проследи релејна постапка со променливо и фиксно засилување за Рејлиев, Накагами, Рајсов и Веибул фединг.

- Изведени се изрази во затворена форма за ергодичниот капацитет и капацитетниот испад за засили-и-проследи МИМО релеен канал кој користи ортогонално просторно-временско кодирање со и без директна патека до дестинацијата во услови на Рејлиев фединг. Со користење на овие изрази се споредени нивните перформанси со перформансите на соодветните точка-точка МИМО канали.

Капацитетот на релејниот канал во општ случај не е познат и затоа, во првиот дел од дисертацијата се анализирани границите на капацитетот за декодирај-и-проследи, засили-и-проследи и компримирај-и-проследи релејните постапки. Особено внимание е посветено на анализа на границите на капацитетот за овие релејни постапки за Гаусов дуплексен и полудуплексен релеен канал.

Во продолжение се анализирани веројатноста за испад и веројатноста за грешка на три типа на засили-и-проследи МИМО релејни канали (2x1x1, 2x2x1 и 2x2x2) со засили-и-проследи релеи со променливо засилување во Рејлиев фединг. Перформансите на релејните канали со две делници и две антени се споредени со перформансите на релејните канали со две делници и една антена во јазлите и точка-точа каналите со две антени. Додека предноста од користење на 2x1x1 системот е занемарлива, перформансите за 2x2x1 и 2x2x2 системите се подобри од 1x1x1 системот за 16dB и 25dB при веројатност на испад од $10^{-3}$. Во оваа глава се претставени два пристапи за теоретска анализа на веројатноста на испад. Првиот пристап е со користење на нумеричка интеграција на момент-генерирачка функција и вториот со израз во затворена форма. Двата пристапи даваат идентични резултати.

Исто така, споредена е битската веројатност на грешка за разгледуваните системски конфигурации со битската веројатност на грешка на релејниот канал кој користи по една антена во јазлите и променливо засилување во релето и соодветните конфигурации на регенеративните декодирај-и-проследи релејни канали. Добивката во перформанси на релејниот канал со повеќе од една антена по јазол во споредба со засили-и-проследи релејниот канал кој користи по една антена во јазлите варира од 16 до 23 dB на битска веројатност за грешка од $10^{-4}$ зависно од бројот на антени користени во дестинацијата. Сепак, за 2x1x1 засили-и-проследи релејниот канал добивката е само 3dB на битска веројатност за грешка од $10^{-4}$. Битската веројатност за грешка на разгледуваните релејните канали со две антени е незначително помала од битската веројатност за грешка на соодветните декодирај-и-проследи релејни канали (0-2dB). Разликата во перформанси се зголемува со зголемување на бројот на антени во релето и дестинацијата. Имајќи ги во предвид супериорните перформанси во споредба со релејните канали со една антена во јазлите, помалата сложеност и незначително послабите перформанси во споредба со соодветните декодирај-и-проследи релејни канали, покажано е дека користењето на засили-и-проследи релеен канал со две антени во изворот, релето и дестинацијата може да биде многу корисно во идните безжични комуникациски системи.

Исто така, анализирана е веројатноста за појава на грешка на засили-и-проследи релеен канал со две делници и повеќе антени по јазол кој користи ортогонално просторно-временско кодирање. За тие системи изведени се генерализирани изрази во затворена форма за многу прецизна апроксимациија на веројатноста на грешка. Освен тоа, изведени се генерализирани асимптотски изрази за веројатноста на грешка за голем однос сигнал-шум. Покажано е дека резултатите добиени со апроксимациите многу точно ги следат точните резултати добиени со симулација и нумеричка интеграција на соодветните интеграли за произволен однос сигнал-шум. Исто така добиените резултати се споредени со слични резултати добиени во литературата со што се потврдува големата точност на апроксимациите.

За разгледуваните засили-и-проследи МИМО релејни канали најден е многу едноставен израз во затворена форма за груба апроксимација на веројатноста за грешка. Покажано е дека резултатите добиени со овој израз добро се усогласени со точните вредности добиени со симулација, нумеричка интеграција и прецизните апроксимации. Усогласеноста на резултатите добиени со прецизната и грубата апроксимација е подобра за помали вредности на односот сигнал-шум.

Исто така е анализирана веројатноста на испад на засили-и-проследи МИМО релеен канал со две делници. За овој тип на канал се изведени генерализирани изрази во затворена форма за прецизна и груба апроксимација на веројатноста за испад. Покажано е дека резултатите добиени со овие апроксимации блиску ги следат точните резултати.

Со користење на истиот пристап за добивање на грубите апроксимации за веројатноста на грешка и испад, изведен е едноставен израз во затворена форма за функцијата на густината на веројатноста на крај-крај односот сигнал-шум за засили-и-проследи МИМО релејниот канал со директна патека до дестинацијата. Со користење на овој израз се анализирани перформансите на засили-и-проследи МИМО релејниот канал со директна патека и се споредени со перформансите на каскадниот систем т.е. системот без директна патека до дестинацијата. Засили-и-проследи МИМО релејните канали со директна патека имаат значително подобри перформанси во споредба со засили-и-проследи МИМО релејните канали без директна патека (неколку редни големини), како што можеше да се очекува од спроведената информациско-теоретската анализа. Исто така, системите со дирекна патека имаат поголема добивка од диверзитет во споредба со системите без директна патека. Разликата во добивка од диверзитет се намалува со зголемување на бројот на антени.

Во продолжението е анализирана веројатноста за испад на релеен канал со повеќе делници кој користи релеи со фиксно и променливо засилување. Анализата е спроведена со комбинација на аналитички, нумерички и симулациски методи. Заради комплексноста на изразот за крај-крај односот-сигнал шум, веројатноста за испад за системот со повеќе делници во Рејлиев, Накагами, Рајсов и Веибул фединг може да се определи само со комбинирање на аналитичките резултати со нумерички интеграциски техники, освен во случај на систем со две делници. Покрај нивната помала комплексност, системите со повеќе делници кои користат релеи со фиксно засилување типично имаат подобри перформанси во споредба со системите со променливо засилување. Разликата во перформанси помеѓу овие два система значително се зголемува со зголемување на бројот на делници, за сите разгледувани видови на фединг и без оглед на изборот на средниот однос сигнал-шум по делница. Зголемувањето на прагот на односот сигнал-шум дополнително ја зголемува разликата во преформанси.

Покрај тоа што ортогоналното просторно-временско кодирање ја зголемува добивката од диверзитет, неговата употреба прави компромис помеѓу капацитетот и комплексноста за кодирање и декодирање. Употребата на повеќе антени во изворот и дестинацијата се покажува дека многу ја зголемува спектралната ефикасност на безжичните системи. Имајќи го ова во предвид, изведени се изрази во затворена форма за ергодичниот капацитет и веројатноста на капацитетен испад за засили-и-проследи МИМО релеен канал во Рејлиев фединг. Се покажува дека ергодичниот капацитет на засили-и-проследи МИМО релејниот канал се приближува до ергодичниот капацитет на точка-точка МИМО каналот со зголемување на бројот на антени. Засили-и-проследи МИМО релејниот канал има полоши перформанси на капацитетен испад во споредба на точка-точка МИМО каналите. Разликата на перформанси е незначителна за мал однос сигнал-шум но таа се зголемува со зголемување на односот сигнал-шум. Споредбата на засили-и-проследи МИМО релејните канали со различен број на антени во изворот, релето и дестинацијата покажува дека зголемувањето на бројот на антени резултира во зголемување на ергодичниот капацитет, подобрување на перформансите на капацитетен испад и зголемувањето на добивката од диверзитет.

Освен тоа, анализиран е ергодичиот капацитет на засили-и-проследи МИМО релејните канали со директна патека и истиот е спореден со ергодичниот капацитет на каскадните засили-и-проследи МИМО релејни канали. Засили-и-проследи МИМО релејните канали со директна патека го надминуваат ергодичниот капацитет на соодветните МИМО релејни канали без директна патека. Освен тоа, тие покажуваат поголем капацитет од точка-точка МИМО каналот со соодветен број на антени. Исто така, засили-и-проследи МИМО релејните канали со директна патека го надминуваат Шеноновиот капацитет за вредности на односот сигнал-шум кои се од практичен интерес.

# 8 Додатоци

## 8.1 Релеен канал на Сато

Пресметка на отпимална функција на густина на веројатност за релејниот канал на Сато (види слика 2.69):

$p\left(y_3|x_1x_2\right)$

| $y_3\|x_1x_2$ | $y_{30}$ | $y_{31}$ | $y_{32}$ |
|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0.5 | 0.5 |
| 20 | 0 | 0.5 | 0.5 |
| 01 | 0.5 | 0.5 | 0 |
| 11 | 0.5 | 0.5 | 0 |
| 21 | 0 | 0 | 1 |

$p\left(y_3, x_1, x_2\right)$

| $y_3\|x_1x_2$ | $y_{30}$ | $y_{31}$ | $y_{32}$ | $p(x_1x_2)$ |
|---|---|---|---|---|
| 00 | $a$ | 0 | 0 | $a$ |
| 10 | 0 | $0.5b$ | $0.5b$ | $b$ |
| 20 | 0 | $0.5b$ | $0.5b$ | $b$ |
| 01 | $0.5b$ | $0.5b$ | 0 | $b$ |
| 11 | $0.5b$ | $0.5b$ | 0 | $b$ |
| 21 | 0 | 0 | $a$ | $a$ |
| $p\left(y_3\right)$ | $a+b$ | $2b$ | $a+b$ | |

(8.1)

$$I(X_1, X_2; Y_3) = H(Y_3) - H(Y_3|X_1X_2) = -2\left(a+b\right)\cdot\log_2\left(a+b\right) - \left(2b\right)\cdot\log_2\left(2b\right) - 4b \quad (8.2)$$

$$2a + 4b = 1 \rightarrow a = \frac{1-4\cdot b}{2}$$

$$-2\left(\frac{1-4\cdot b}{2}+b\right)\cdot\log_2\left(\frac{1-4\cdot b}{2}+b\right) - \left(2b\right)\cdot\log_2\left(2b\right) - 4b =$$

$$= -2\left(\frac{1-4\cdot b+2b}{2}\right)\cdot\log_2\left(\frac{1-4\cdot b+2b}{2}\right) - \left(2b\right)\cdot\log_2\left(2b\right) - 4b =$$

$$= -2\left(\frac{1-2\cdot b}{2}\right)\cdot\log_2\left(\frac{1-2\cdot b}{2}\right) - \left(2b\right)\cdot\log_2\left(2b\right) - 4b$$

$$I\left(X_1, X_2; Y_3\right) = -\left(1-2\cdot b\right)\cdot\log_2\left(\frac{1-2\cdot b}{2}\right) - \left(2b\right)\cdot\log_2\left(2b\right) - 4b \quad (8.3)$$

$$I\left(X_1; Y_2|X_2\right) = \log_2\left(3\right) = 1.58496$$

Со пресметка на извод од (8.3) се добива:

$$\frac{d}{dp}\left(I\left(X_1X_2; Y_3\right)\right) = 0 \rightarrow b = \frac{1}{8}\,; \qquad a = \frac{1-4\cdot 1/18}{2} = \frac{7}{18}$$

Со оглед на тоа што се работи за деградиран DMRC капацитетот на каналот е (2.69):

$$C = \max_{p(x_1,x_2)}\left\{\min\left\{I\left(X_1X_2; Y_3\right), I\left(X_1; Y_2|X_2\right)\right\}\right\} = 1.1699 \text{ bits}$$

$p(y_3, x_1, x_2)$

| $y_3\|x_1x_2$ | $y_{30}$ | $y_{31}$ | $y_{32}$ | $p(x_1x_2)$ |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 7/18 | 0 | 0 | 7/18 |
| 10 | 0 | 1/36 | 1/36 | 1/18 |
| 20 | 0 | 1/36 | 1/36 | 1/18 |
| 01 | 1/36 | 1/36 | 0 | 1/18 |
| 11 | 1/36 | 1/36 | 0 | 1/18 |
| 21 | 0 | 0 | 7/18 | 7/18 |
| $p(y_3)$ | 4/9 | 1/9 | 4/9 | |

(8.4)

## 8.2 Капацитет на CF за RC со сума по модул 2

Во доказот се зема $\hat{Y}_2 = Y_2 \oplus V$ каде $V \sim Bern(\alpha)$ е независна од $(X_1, Z_2, Z_3)$ и $\alpha = H^{-1}(1 - C_0)$, во долната граница за компримирај-и-проследи (2.99), т.е.:

$$f(V;\alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{доколку } V = 0, \\ 1-\alpha & \text{доколку } V = 1. \end{cases} \tag{8.5}$$

$$Y_3' = X_1 \oplus Z_3, \qquad Y_2 = Z_2 \oplus Z_3 \qquad Z_2 \sim Bern(p) \text{ и } Z_3 \sim Bern(1/2) \tag{8.6}$$

$$C \geq \max_{p(x_1)p(\hat{y}_2|y_2)} \min\left\{ I(X_1; Y_3') - I\left(Y_2; \hat{Y}_2 | X_1 Y_3'\right) + C_0, I\left(X_1; \hat{Y}_2, Y_3'\right) \right\} \tag{8.7}$$

$$I(X_2, Y_3'') = H(Y_3'') - H(Y_3''|X_2) = 1 \qquad C_0 = \max_{p(x_2)} \{I(X_2; Y_3'')\} = 1 \tag{8.8}$$

$$I(X_1, Y_3') = H(Y_3') - H(Y_3'|X_1) \stackrel{(a)}{=} H\left(\frac{1}{2}\right) - H(Z_3) = 0 \tag{8.9}$$

$$\hat{Y}_2 = Y_2 \oplus V \qquad V \sim Bern(\alpha). \tag{8.10}$$

За да се добие изразот за ентропија во (a) потребно е да се пресмета PMF за $Y_3'$:

$p(Y_3'|X_1 Z_3)$

| $X_1, Z_3 \| X_1 \oplus Z_3$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 00 | 1 | 0 |
| 01 | 0 | 1 |
| 10 | 0 | 1 |
| 11 | 1 | 0 |

$p(Y_3', X_1, Z_3)$

| $X_1, Z_3 \| X_1 \oplus Z_3$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 00 | $\frac{p_1}{2}$ | 0 |
| 01 | 0 | $\frac{p_1}{2}$ |
| 10 | 0 | $\frac{(1-p_1)}{2}$ |
| 11 | $\frac{(1-p_1)}{2}$ | 0 |
| $p(Y_3')$ | 1/2 | 1/2 |

| $X_1, Z_3, X_1 \oplus Z_3$ |
|---|
| 000 |
| 011 |
| 101 |
| 110 |

(8.11)

Да ја пресметаме PMF на случајната променлива $Y_2 = Z_2 \oplus Z_3$ ако се познати PMF-те на случајните променливи $Z_2$ и $Z_3$:

$p(Y_2|Z_2, Z_3)$

| $Z_2, Z_3 \| Y_2$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 00 | 1 | 0 |
| 01 | 0 | 1 |
| 10 | 0 | 1 |
| 11 | 1 | 0 |

$p(Y_2, Z_2, Z_3)$

| $Z_2, Z_3 \| Y_2$ | 0 | 1 | $p(Z_2 Z_3)$ |
|---|---|---|---|
| 00 | $\frac{p}{2}$ | 0 | $\frac{p}{2}$ |
| 01 | 0 | $\frac{p}{2}$ | $\frac{p}{2}$ |
| 10 | 0 | $\frac{1-p}{2}$ | $\frac{1-p}{2}$ |
| 11 | $\frac{1-p}{2}$ | 0 | $\frac{1-p}{2}$ |
| $p(Y_2)$ | 1/2 | 1/2 | |

(8.12)

Да ја пресметаме PMF за $(Z_2 \oplus Z_3 \oplus V)$ ако се познати PMF-те на случајните променливи $Z_2$, $Z_3$ и $V$:

$p\left(V \oplus Z_2 \oplus Z_3 | V, Z_2, Z_3\right)$

| $V, Z_2, Z_3 \vert V \oplus Z_2 \oplus Z_3$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 000 | 1 | 0 |
| 001 | 0 | 1 |
| 010 | 0 | 1 |
| 011 | 1 | 0 |
| 100 | 0 | 1 |
| 101 | 1 | 0 |
| 110 | 1 | 0 |
| 111 | 0 | 1 |

$p\left(V,\ Z_2,\ Z_3, V \oplus Z_2 \oplus Z_3\right)$

| $V, Z_2, Z_3 \vert V \oplus Z_2 \oplus Z_3$ | 0 | 1 | $p\left(V, Z_2, Z_3\right)$ |
|---|---|---|---|
| 000 | $\frac{\alpha p}{2}$ | 0 | $\frac{\alpha p}{2}$ |
| 001 | 0 | $\frac{\alpha p}{2}$ | $\frac{\alpha p}{2}$ |
| 010 | 0 | $\frac{\alpha(1-p)}{2}$ | $\frac{\alpha(1-p)}{2}$ |
| 011 | $\frac{\alpha(1-p)}{2}$ | 0 | $\frac{\alpha(1-p)}{2}$ |
| 100 | 0 | $\frac{(1-\alpha)p}{2}$ | $\frac{(1-\alpha)p}{2}$ |
| 101 | $\frac{(1-\alpha)p}{2}$ | 0 | $\frac{(1-\alpha)p}{2}$ |
| 110 | $\frac{(1-\alpha)(1-p)}{2}$ | 0 | $\frac{(1-\alpha)(1-p)}{2}$ |
| 111 | 0 | $\frac{(1-\alpha)(1-p)}{2}$ | $\frac{(1-\alpha)(1-p)}{2}$ |
| $p\left(V \oplus Z_2 \oplus Z_3\right)$ | 1/2 | 1/2 | |

(8.13)

Од (8.12) следи дека $Y_2 \sim Bern\left(1/2\right)$. Имајќи го ова во предвид како и (8.13) втората здружена информација од првиот член од минимизацијата во (8.7) е:

$$
\begin{aligned}
I\left(Y_2; \hat{Y}_2 | X_1 Y_3'\right) &= H\left(\hat{Y}_2 | X_1, Y_3'\right) - H\left(\hat{Y}_2 | X_1, Y_3', Y_2\right) = \\
&= H\left(Y_2 \oplus V | X_1, Y_3'\right) - H\left(Y_2 \oplus V | X_1, Y_3', Y_2\right) = \\
&= H\left(Z_2 \oplus Z_3 \oplus V | X_1, Y_3'\right) - H\left(V | X_1, Y_3'\right) = H\left(1/2\right) - H\left(V\right) = 1 - H\left(\alpha\right)
\end{aligned}
\tag{8.14}
$$

Ако се заменат (8.8) и (8.9) во (8.14) за првиот член од изразот за минимизација во (8.7) добиваме:

$$
I\left(X_1; Y_3'\right) - I\left(Y_2; \hat{Y}_2 | X_1 Y_3'\right) + C_0 = 0 - 1 + H\left(\alpha\right) + 1 = H\left(\alpha\right) \tag{8.15}
$$

Ако се земат во предвид (8.6) и (8.10) за вториот член од изразот за минимизација во (8.7) добиваме:

$$
\begin{aligned}
I\left(X_1; \hat{Y}_2, Y_3'\right) &= H\left(\hat{Y}_2, Y_3'\right) - H\left(\hat{Y}_2, Y_3' | X_1\right) = \\
&= H\left(\hat{Y}_2\right) + H\left(\hat{Y}_2 | Y_3'\right) - H\left(\hat{Y}_2 | X_1\right) - H\left(\hat{Y}_2 | Y_3' X_1\right) = \\
&= H\left(Y_2 \oplus V\right) + H\left(Y_2 \oplus V | Y_3'\right) - H\left(Y_2 \oplus V | X_1\right) - H\left(Y_2 \oplus V | Y_3' X_1\right) = \\
&= H\left(Z_2 \oplus Z_3 \oplus V\right) + H\left(Z_2 \oplus Z_3 \oplus V | Y_3'\right) - H\left(Z_2 \oplus Z_3 \oplus V | X_1\right) - H\left(Z_2 \oplus Z_3 \oplus V | X_1 \oplus Z_3, X_1\right)
\end{aligned}
\tag{8.16}
$$

Ако се замени (8.13) во (8.16)се добива:

$$
I\left(X_1; \hat{Y}_2, Y_3'\right) = H\left(1/2\right) + \cancel{H\left(1/2\right)} - \cancel{H\left(1/2\right)} - H\left(Z_2 \oplus V\right) = 1 - H\left(Z_2 \oplus V\right) \tag{8.17}
$$

Да ја пресметаме здружената функција на распределба веројатност за $(Z_2 \oplus V)$ која е потребна за пресметка на ентропијата во вториот член од (8.17):

$p\left(V, Z_2 | V \oplus Z_2\right)$

| $V, Z_2 \vert V \oplus Z_2$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 00 | 1 | 0 |
| 01 | 0 | 1 |
| 10 | 0 | 1 |
| 11 | 1 | 0 |

$p\left(V, Z_2, V \oplus Z_2\right)$

| $V, Z_2 \vert V \oplus Z_2$ | 0 | 1 | $p\left(V, Z_2\right)$ |
|---|---|---|---|
| 00 | $\alpha p$ | 0 | $\alpha p$ |
| 01 | 0 | $\alpha(1-p)$ | $\alpha(1-p)$ |
| 10 | 0 | $(1-\alpha)\, p$ | $(1-\alpha)\, p$ |
| 11 | $(1-\alpha)\,(1-p)$ | 0 | $(1-\alpha)\,(1-p)$ |
| $p\left(V \oplus Z_2\right)$ | $1-\alpha \cdot \overline{p}-\overline{\alpha} \cdot p$ $=1-\alpha * p$ | $\alpha \cdot \overline{p}+\overline{\alpha} \cdot p$ $=\alpha * p$ | |

(8.18)

каде:

$$\alpha * p=\alpha\,(1-p)+(1-\alpha)\, p. \tag{8.19}$$

Ако се замени (8.18) во (8.17)се добива:

$$I\left(X_1 ; \hat{Y}_2, Y_3^{\prime}\right)=1-H\,(\alpha * p) \tag{8.20}$$

Ако се замени (8.15) и (8.20) во (8.7)се добива:

$$C \geq \max \min \left\{H\,(\alpha)\,, 1-H\,(\alpha * p)\right\} \stackrel{(b)}{=} 1-H\,(\alpha * p) \tag{8.21}$$

$$C \geq 1-H\left(p * H^{-1}\left(1-C_0\right)\right) \qquad \text{бидејќи } \alpha=H^{-1}\left(1-C_0\right) \tag{8.22}$$

каде еднаквоста (b) важи за сите вредности на $\alpha \in(0: 1)$ и $p \in(0: 1)$.

## 8.3 CUB за релеен канал со сума по модул 2

Согласно изразот (2.89) горната пресечна граница за SFD канал е:

$$C \leq \max_{p(x_1)} \min \left\{I\left(X_1 ; Y_3^{\prime}\right)+C_0,\ I\left(X_1 ; Y_2, Y_3^{\prime}\right)\right\} \tag{8.23}$$

Од изразот (8.11) во глава (8.2) следи дека $p\left(Y_3^{\prime}\right)=Bern\,(1/2)$ и согласно (8.9) $I\left(X_1 ; Y_3^{\prime}\right)=0$. Пресметка на $C_0$ е едноставна зошто се работи за директен канал без шум:

$$C_0=\max_{p(x_2)} I\left(X_2, Y_3^{\prime\prime}\right)=H\left(Y_3^{\prime\prime}\right)-H\left(Y_3^{\prime\prime} | X_2\right)=1 \tag{8.24}$$

За да го пресметаме на вториот член од минимизацијата во (8.23) потребно е да се најде веројатноста на настанување на случајната променлива $Y_2$:

$p\left(Y_2 | Z_2 Z_3\right)$

| $Z_2, Z_3 \vert Y_2=Z_2 \oplus Z_3$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 00 | 1 | 0 |
| 01 | 0 | 1 |
| 10 | 0 | 1 |
| 11 | 1 | 0 |

$p\left(Y_2, Z_2, Z_3\right)$

| $Z_2, Z_3 \vert Y_2=Z_2 \oplus Z_3$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 00 | $p/2$ | 0 |
| 01 | 0 | $p/2$ |
| 10 | 0 | $(1-p)\,/2$ |
| 11 | $(1-p)\,/2$ | 0 |
| $p\left(Z_2 \oplus Z_3\right)$ | $1/2$ | $1/2$ |

(8.25)

од изразот (8.25) следи дека $p\left(Y_2\right)=Bern\,(1/2)$ и затоа:

$$\begin{aligned} I\left(X_1 ; Y_2, Y_3^{\prime}\right)&=H\left(Y_2, Y_3^{\prime}\right)-H\left(Y_2, Y_3^{\prime} | X_1\right)=\cancelto{1}{H\left(Y_2\right)}+\cancelto{1}{H\left(Y_3^{\prime}\right)}-\cancelto{1}{H\left(Y_3^{\prime} | X_1\right)}-H\left(Y_2 | X_1, Y_3^{\prime}\right)= \\ &=1-H\left(Z_2 \oplus Z_3 | X_1, X_1 \oplus Z_3\right)=1-H\left(Z_2\right)=1-H\,(p) \end{aligned} \tag{8.26}$$

Ако се замени (8.9),(8.24) и (8.26) во (8.23) се добива:

$$C \leq \max_{p(x_1)} \min \left\{I\left(X_1 ; Y_3^{\prime}\right)+C_0, I\left(X_1 ; Y_2, Y_3^{\prime}\right)\right\}=\max_{p(x_1)} \min \left\{0+C_0, 1-H\,(p)\right\}=\min \left\{C_0, 1-H\,(p)\right\} \tag{8.27}$$

## 8.4 CUB за Гаусов релеен канал

Горната пресечната граница за Гаусов RC е:

$$C \leq \sup_{F(x_1x_2):E\left(X_1^2\right)\leq P, E\left(X_2^2\right)\leq P} \min\left\{I\left(X_1X_2;Y_3\right)I\left(X_1;Y_2,Y_3|X_2\right)\right\} \tag{8.28}$$

Ќе извршиме максимизација со воспоставување на горната граница на десната страна од изразот, а потоа ќе покажеме дека тоа се постигнува ако здружена $p\left(X_1,X_2\right)$ е здружена гаусова функција на густина на веројатност.
Прво ќе започнеме со *првиот член* од парот за мнимизација. Да претпоставиме без да се изгуби општоста дека $E\left(X_1\right)=E\left(X_2\right)=0$ и $Z_2\sim\mathcal{N}\left(0,1\right)$ и $Z_3\sim\mathcal{N}\left(0,1\right)$. Земаме дека:

$$Y_3=g_{31}X_1+g_{32}X_2+Z_3, \qquad Y_2=g_{21}X_1+Z_2 \tag{8.29}$$

$$I\left(X_1,X_2;Y_3\right)=h\left(Y_3\right)-h\left(Y_3|X_1X_2\right)=h\left(Y_3\right)-\frac{1}{2}\log\left(2\pi e\right)\leq\frac{1}{2}\log\left(E\left(Y_3^2\right)\right)\leq \tag{8.30}$$

$$\leq\frac{1}{2}\log\left(1+g_{31}^2E\left[X_1^2\right]+g_{32}^2E\left[X_2^2\right]+2g_{31}g_{32}E\left[X_1X_2\right]\right)\leq \tag{8.31}$$

$$\leq\frac{1}{2}\cdot\log\left(1+\gamma_{31}+\gamma_{32}+2\rho\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}}\right)=C\left(\gamma_{32}+\gamma_{32}+\underbrace{2\rho\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}}}_{(a)}\right) \tag{8.32}$$

каде:

$$\rho=E\left(X_1X_2\right)/\sqrt{E\left(X_1^2\right)E\left(X_2^2\right)} \tag{8.33}$$

е корелационен коефициент. Со замена на (8.33) во (8.32) за изразот $(a)$ се добива:

$$a=2\cdot\rho\cdot\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}}=2\cdot\frac{E\left(X_1X_2\right)}{\sqrt{E\left(X_1^2\right)E\left(X_2^2\right)}}\sqrt{g_{31}^2g_{32}^2P^2}=2\cdot\frac{E\left(X_1X_2\right)}{\sqrt{P^2}}\cdot g_{31}g_{32}\sqrt{P^2}=2\cdot g_{31}g_{32}E\left(X_1X_2\right) \tag{8.34}$$

со што се докажува точноста на низата на нееднаквости: (8.31)-(8.32).
Понатаму ќе го анализираме *вториот член* од парот за минимизација:

$$I\left(X_1;Y_2,Y_3|X_2\right)=h\left(Y_2,Y_3|X_2\right)-h\left(Y_2Y_3|X_1X_2\right)=h\left(Y_2Y_3|X_2\right)-h\left(Z_2Z_3\right)= \tag{8.35}$$

$$=h\left(Y_3|X_2\right)+h\left(Y_2|X_2Y_3\right)-h\left(Z_2\right)-h\left(Z_2\right)\leq E_{x_2}\left[h\left(Y_3|x_2\right)\right]+E_{x_2,y_3}\left[h\left(Y_2|y_3x_2\right)\right]-\log\left(2\pi e\right)\leq \tag{8.36}$$

$$\leq E\left[\frac{1}{2}\log Var\left(Y_3|x_2\right)\right]+E\left[\frac{1}{2}\log Var\left(Y_2|y_3x_2\right)\right]\leq \tag{8.37}$$

$$\leq\frac{1}{2}\log E\left[Var\left(Y_3|x_2\right)\right]+\frac{1}{2}\log\left(E\left[Var\left(Y_2|y_3x_2\right)\right]\right)\leq \tag{8.38}$$

$$\leq\frac{1}{2}\log E\left[Var\left(g_{31}X_1+g_{32}X_2+Z_3|X_2\right)\right]+\frac{1}{2}\log E\left[Var\left(Y_2|Y_3X_2\right)\right]= \tag{8.39}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\log\left(g_{31}^2E_{x_1}\left[X_1^2\right]-g_{31}^2E_{X_1X_2}^2\left(X_1X_2\right)/E\left[X_2^2\right]+1\right)+ \tag{8.40}$$

$$+\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\left(g_{21}^2+g_{31}^2\right)\left(E\left(X_1^2\right)-E^2\left(X_1X_2\right)/E\left(X_2^2\right)\right)}{1+g_{31}^2\left(E\left(X_1^2\right)-E^2\left(X_1X_2\right)/E\left(X_2^2\right)\right)}\right)= \tag{8.41}$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(1+\left(g_{21}^2+g_{31}^2\right)\left(E\left(X_1^2\right)-E^2\left(X_1X_2\right)/E\left(X_2^2\right)\right)\right)= \tag{8.42}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(1+\left(g_{21}^2+g_{31}^2\right)\cdot E\left(X_1^2\right)\cdot\left(1-E^2\left(X_1X_2\right)/E\left(X_1^2\right)\cdot E\left(X_2^2\right)\right)\right)\leq \tag{8.43}$$

$$\leq \frac{1}{2}\log\left(1+\left(1-\rho^2\right)\left(\gamma_{21}+\gamma_{31}\right)\right)=C\left(\left(1-\rho^2\right)\left(\gamma_{21}+\gamma_{31}\right)\right) \tag{8.44}$$

Изразот (8.37) следи од фактот дека гаусовата респределба ја максимизира диференцијалната ентропија [9, the.(8.6.5)], а изразот (8.38) следи од неравенството на Јансен [9, eq.(2.76)]. Изразот (8.40) се добива на следниов начин:

$$h\left(Y_3|X_2\right)=h\left(g_{31}X_1+g_{32}X_2+Z_3|X_2\right)\leq\frac{1}{2}\log\left(2\pi e\right)E_{x_2}\left(Var\left(Y_3|x_2\right)\right) \tag{8.45}$$

$$\begin{aligned} E_{x_2}\left(Var\left(Y_3|x_2\right)\right) &= E_{x_2}\left(Var(g_{31}X_1+g_{32}X_2+Z_3|X_2\right)=E_{x_2}\left\{var\left[g_{31}X_1|x_2\right]\right\}+1=\\ &= E_{x_2}\left[E_{x_1}\left[\left(g_{31}X_1\right)^2|x_2\right]-E_{x_2}E_{x_1}^2\left[g_{31}X_1|x_2\right]\right]+1\\ &= E_{x_1}\left[g_{31}^2X_1^2\right]-g_{31}^2E_{x_2}E_{x_1}^2\left[X_1|x_2\right]+1 \end{aligned} \tag{8.46}$$

Со користење на Шварцовото неравенство [30, eq.(14.5.13)] се добива:

$$E_{x_1x_2}^2\left(X_1X_2\right)=E_{x_2}^2\left[X_2\cdot E_{x_1}\left[X_1|x_2\right]\right]\leq E\left[X_2^2\right]\cdot E_{x_2}\left[E_{x_1}^2\left[X_1|x_2\right]\right]\Rightarrow \tag{8.47}$$

$$\boxed{E_{x_2}\left[E_{x_1}^2\left[X_1|x_2\right]\right]\geq E_{x_1x_2}^2\left(X_1X_2\right)/E\left[X_2^2\right]} \tag{8.48}$$

Доколку се замени (8.48) во (8.46) се добива:

$$E\left(Var\left(Y_3|X_2\right)\right)\leq g_{31}^2E_{x_1}\left[X_1^2\right]-g_{31}^2E_{X_1X_2}^2\left(X_1X_2\right)/E\left[X_2^2\right]+1 \tag{8.49}$$

Доколку (8.49) се замени во (8.45) ќе се добие:

$$h\left(Y_3|X_2\right)\leq\frac{1}{2}\cdot\log\left(2\pi e\right)\left(1+g_{31}^2E_{x_1}\left[X_1^2\right]-g_{31}^2\left[E_{X_1X_2}\left(X_1X_2\right)\right]^2/E\left[X_2^2\right]\right) \tag{8.50}$$

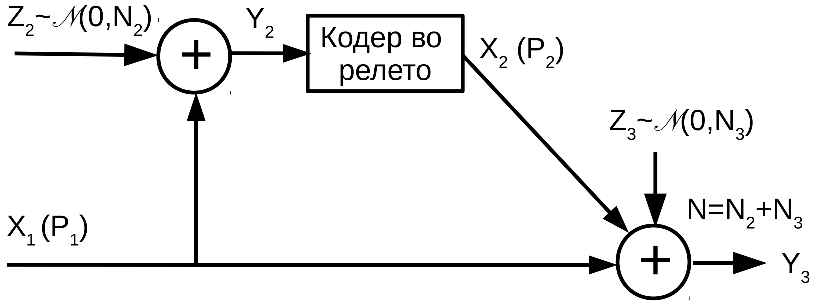
Изразот (8.41) е превземен од [14, app.(16A)].

## 8.5 Капацитет на деградиран Гаусов RC

Да претпоставиме дека релето ги процесира податоците со користење на DF методата (види глава 2.2.3) и дека средната моќност на предавателниот сигналот $x_1$ во изворот е со моќност $P_1$. Преносот е под влијание на Гаусов шум. Оштетената верзија од испратениот сигнал $y_2$ се прима во релето $R$ кое е физички поблиску до изворот $S$ во споредба со одалеченоста на изворот од дестинацијта $D$. Во оваа глава ќе покажеме како може релето $R$ правилно да го употреби примениот сигнал $y_2$ за да прати сигнал $x_2$ со моќност $P_2$ кој ќе и помогне на дестинацијата $D$ правилно да го реконструира испратениот сигнал од изворот.

Прво ќе дефинираме модел во дискрето време за деградиран релеен канал во присуство на Гаусов шум прикажан на слика 8.1.
Да земеме $Z_2 = (z_{21}, ..., z_{2n})$ да биде низа на i.i.d. ортогонални случајни променливи со средна вредност нула и варијанса $N_2$, и да земеме $Z_3 = (z_{31}, ..., z_{3n})$ да бидат i.i.d ортогонални случани променливи независни од $Z_2$ со средна вредност нула и варијанса $N_3$. Да дефинираме $N = N_2+N_3$. Во $i$-то испраќање реалните броеви $x_{1i}$ и $x_{2i}$ се испратени од изворот и релето и :

$$y_{2i}=x_{1i}+z_{2i},\quad y_{3i}=x_{2i}+y_{2i}+z_{3i} \tag{8.51}$$




**Слика 8.1:** Деградиран Гаусов релеен канал

се примени во релето и дестинацијата соодветно. Ако се земе во предвид дефиницијата (2.11) јасно е дека се работи за деградиран канал бидејќи доколку се знае $y_2$ тогаш сигналот на влез од дестинацијата $D$ не зависи од $x_1$.
Да земеме дека ограничувањата на предавателната моќност по испратена порака во изворот и релето се:

$$E\left[x_1^n\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2\left(w\right) \leq P_1 \quad w \in \{1, 2, ...M\} \tag{8.52}$$

$$E\left[x_2^n\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2\left(y_{21}, y_{22}, ..., y_{2i-1}\right) \leq P_2 \quad \left(y_{21}, ...y_{2n}\right) \in \Re^n \tag{8.53}$$

каде $n$ е должината на блокот, а $x_1^n = (x_{11}, ..., x_{1n})$ и $x_2^n = (x_{21}, ..., x_{2n})$ се испратените сигнали низи од изворот и релето соодвентно.
Кодот кој се користи за анализата на овој канал е даден во глаава 2.2.3.

**Теорема 8.1.**

Капацитетот $C^*$ на Гаусов деградиран RC е [3, eq.(58)]:

$$C^* = \max_{0\leq\alpha\leq 1} \min\left\{C\left(\frac{P_1 + P_2 + 2\cdot\sqrt{\overline{\alpha}P_1P_2}}{N}\right),\ C\left(\frac{\alpha P_1}{N_2}\right)\right\} \tag{8.54}$$

каде $\overline{\alpha} = (1-\alpha)$ и:

$$C\left(X\right) = \frac{1}{2}\cdot\log\left(1+x\right) \quad x \geq 0 \tag{8.55}$$

**Доказ:** *Достигливоста на капацитетот во теоремата* 8.1. За $0 \leq \alpha \leq 1$ да земеме $X_2 \sim N\left(0, P_2\right)$, $X_{10} \sim N\left(0, \alpha P_1\right)$ и дека $X_{10}$, $X_2$ се независни. Да претпоставиме дека зависноста помеѓу $X_1$ и $X_2$ е дадена со:

$$X_1 = \sqrt{\overline{\alpha}\cdot\frac{P_1}{P_2}}X_2 + X_{10} \tag{8.56}$$

Тогаш врз база на теорема 2.3, треба да добиеме:

$$I\left(X_1, X_2; Y_3\right) = \log\left(\frac{P_1 + P_2 + 2\cdot\sqrt{\overline{\alpha}P_1P_2}}{N}\right), \quad I\left(X_1; Y_2|X_2\right) = \frac{1}{2}\cdot\log\left(1+\frac{\alpha P_1}{N}\right) \tag{8.57}$$

Претпоставката дека здружената PMF $p\left(x_1, x_2\right)$ всушност ја максимизира $\min\left\{I\left(X_1; Y_2|X_2\right), I\left(X_1, X_2; Y_3\right)\right\}$ ќе следи од доказот на реципроцитетот на теоремата.

Случајнтата кодна книга дефинирана како во глава 2.2.3 придружена на оваа здружена PMF се добива со случаен избор на:

$$\begin{aligned} \ddot{X}_1(w) \quad & \text{i.i.d.} \sim N_n(0, \alpha P_1 I) \quad w \in \left[1, 2^{nR}\right] \\ \ddot{X}_2(s) \quad & \text{i.i.d.} \sim N_n(0, P_2 I) \quad s \in \left[1, 2^{nR_2}\right] \end{aligned} \tag{8.58}$$

каде „ $\ddot{\cdot}$ “ означува дека се работи за случајно избрани вредности на променливите $X_1$ и $X_2$. $R_2$ е брзината на пренесување на податоци за делницата од $R$ до $D$ и дадена со тврдењето 8.1, а $N_n(0, I)$ означува нормална распределба со $n$ променливи со единечна матрица на коварианси - $I$.
Кодната книга е дадена со:

$$x_1^n(w|s) = \ddot{x}_1^n(w) + \sqrt{\frac{\overline{\alpha} P_1}{P_2}} x_2^n(s), \quad w \in \left[1, 2^{nR}\right] \quad s \in \left[1, 2^{nR_2}\right]. \tag{8.59}$$

Кодните зборови генерирани на ваков начин го задоволуваат ограничувањето на моќност 8.52 со голема веројатност и затоа вкупната средна веројатност на грешка може да се покаже дека е мала. Со тоа се покажува дека кодот дефиниран со кодната книга (8.59) го достигнува капацитетот даден со теоремата 8.1.

**Тврдење 8.1.**

Капацитетот на на каналот од релето до дестинацијата е [14, eq.(62)-(63)]:

$$R_2 = I(X_2; Y_3) = \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{\left(\sqrt{P_2} + \sqrt{\alpha P_1}\right)^2}{(\alpha P_1 + N)} \right) - \epsilon \tag{8.60}$$

**Доказ:** Се претпоставува дека зависноста меѓу случајните променливи $X_1$ и $X_2$ е дадена со следниов израз:

$$X_1 = \sqrt{\overline{\alpha} \cdot \frac{P_1}{P_2}} \cdot X_2 + X_{10} \tag{8.61}$$

Да го докажеме изразот (8.60):

$$\begin{aligned} R_2 = I(X_2; Y_3) = \frac{1}{2} \cdot \log(Var[X_2 + Y_2 + Z_3]) - \frac{1}{2} \cdot \log(Var[X_2 + Y_2 + Z_3] | X_2) = \\ = \frac{1}{2} \cdot \log(Var[X_2 + X_1 + Z_2 + Z_3]) - \frac{1}{2} \cdot \log(Var[X_1 + Z_2 + Z_3] | X_2) = \\ = \frac{1}{2} \cdot \log(Var[X_2 + X_1] + N) - \frac{1}{2} \cdot \log(E_{x_2}\{Var[X_1 | X_2]\} + N) \end{aligned} \tag{8.62}$$

Доколку се пресмета варијансата од првиот член на (8.62) се добива:

$$\begin{aligned} Var[X_2 + X_1] = P_2 + 2 \cdot E[X_1 X_2] + P_1 = P_2 + 2 \cdot E\left[\left(\sqrt{\overline{\alpha} \cdot \frac{P_1}{P_2}} \cdot X_2 + X_{10}\right) \cdot X_2\right] + P_1 = \\ = P_2 + 2 \cdot E\left[\sqrt{\overline{\alpha} \cdot \frac{P_1}{P_2}} \cdot X_2^2 + X_{10} X_2\right] + P_1 = P_2 + 2 \cdot \sqrt{\overline{\alpha} \cdot \frac{P_1}{P_2}} \cdot P_2 + 2 \cdot \cancelto{0}{E[X_{10} X_2]} + P_1 = \\ = P_2 + 2 \cdot \sqrt{\overline{\alpha} \cdot P_1 P_2} + P_1 = P_2 + 2 \cdot \sqrt{\overline{\alpha} \cdot P_1 P_2} + \overline{\alpha} P_1 + \alpha P_1 \end{aligned} \tag{8.63}$$

Ако се употреби Коши-Шварцовата нееднаквост [30, eq.(14.5.2)] за варијансата во вториот член од изразот (8.62) се добива:

$$E_{x_2}\left\{Var\left[X_1|X_2\right]\right\} = E\left[X_1^2\right] - \frac{E^2\left[X_1X_2\right]}{E\left[X_2^2\right]} = P_1 - \frac{E^2\left[\left(\sqrt{\overline{\alpha}\cdot\frac{P_1}{P_2}}\cdot X_2 + X_{10}\right)X_2\right]}{P_2} =$$

$$= P_1 - \frac{\overline{\alpha}\frac{P_1}{P_2}\cdot P_2^2}{P_2} = P_1 - \frac{\overline{\alpha}P_1\cdot P_2}{P_2} = P_1 - \overline{\alpha}P_1 = \alpha P_1 \tag{8.64}$$

Доколку се заменат (8.63) и (8.64) во (8.62) се добива:

$$R_2 = \frac{1}{2}\cdot\log\left(Var\left[X_2+X_1\right]+N\right) - \frac{1}{2}\cdot\log\left(\alpha P_1 + N\right) = \frac{1}{2}\cdot\log\frac{\left(Var\left[X_2+X_1\right]+N\right)}{\alpha P_1+N} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\log\frac{\left(P_2 + 2\cdot\sqrt{\overline{\alpha}\cdot P_1P_2} + \overline{\alpha}P_1 + \alpha P_1 + N\right)}{\alpha P_1 + N} = \frac{1}{2}\cdot\log\left(1 + \frac{\left(\sqrt{P_2}+\sqrt{\overline{\alpha}P_1}\right)^2}{\alpha P_1+N}\right) \tag{8.65}$$

Со што се докажува изразот 8.60.
*Реципроцитетот на теоремата* 8.1. Секој код за каналот специфицира здружена PMF на $W, X_1, X_2, Y_2, Y_3$.
Согласно (2.22) и (2.70) се добива:

$$nR \leq \sum_{i=1}^{n} I\left(X_{1i}; Y_{2i}, Y_{3i}|X_{2i}\right) + n\delta_n = \sum_{i=1}^{n} I\left(X_{1i}; Y_{2i}|X_{2i}\right) + n\delta_n \tag{8.66}$$

На тој начин:

$$nR \leq \sum_{i=1}^{n}\left[h\left(Y_{2i}|X_{2i}\right) - h\left(Y_{2i}|X_{2i}, X_{1i}\right)\right] + n\delta_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[h\left(Y_{2i}|X_{2i}\right) - h\left(X_{1i}+Z_{2i}|X_{2i}, X_{1i}\right)\right] + n\delta_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[h\left(Y_{2i}|X_{2i}\right) - \sum_{j=1}^{n} p\left(X_{1i}=x_{1j}\right)\cdot h\left(x_{1j}+Z_{2i}|X_{2i}, X_{1i}=x_{1j}\right)\right] + n\delta_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[h\left(Y_{2i}|X_{2i}\right) - h\left(Z_{2i}|X_{2i}\right)\right] + n\delta_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[h\left(Y_{2i}|X_{2i}\right) - h\left(Z_{2i}\right)\right] + n\delta_n = \sum_{i=1}^{n}\left[h\left(Y_{2i}|X_{2i}\right) - \frac{1}{2}\cdot\log\left(2\pi e\cdot N_2\right)\right] + n\delta_n = \tag{8.67}$$

За секое $i$:

$$h\left(Y_{2i}|X_{2i}\right) = E_{x_{2i}}\left[h(Y_{2i}|x_{2i}\right] \overset{(a)}{\leq}$$

$$\leq E_{x_{2i}}\left[\frac{1}{2}\log\left(2\pi e\right)\left(var\left(Y_{2i}|x_{2i}\right)\right)\right] \overset{(b)}{\leq} \frac{1}{2}\log\left(2\pi e\right)\left(E_{x_{2i}}\left[var\left(Y_{2i}|x_{2i}\right)\right]\right) \tag{8.68}$$

Каде (a) следи од [9, Theorem 8.6.5], а (b) следи од неравенството на Јансен [9, eq.(2.76)].
Ако се замени $Y_{2i} = X_{1i} + Z_{2i}$ се добива:

$$E_{x_{2i}}\left[var\left(Y_{2i}|x_{2i}\right)\right] = E_{x_{2i}}\left[E\left(\left(X_{1i}+Z_{2i}\right)^2|X_{2i}\right)\right] = \left|E\left[X_{1i}Z_{2i}\right]=0\right| =$$

$$= E\left[var\left(X_{1i}|X_{2i}\right)\right] + E\left[Z_{2i}^2\right] = A_i + N_2 \tag{8.69}$$

каде $E\left[var\left(X_{1i}|X_{2i}\right)\right]=A_i, \quad i=1..n$ .
Ако (8.68) и (8.69) заменат во (8.67) ќе добиеме:

$$R\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\log 2\pi e\left(A_i+N_2\right)-\frac{1}{2}\cdot\log\left(\left(2\pi e\right)N_2\right)+\delta_n=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{A_i}{N_2}+1\right)\overset{(c)}{\leq}\frac{1}{2}\cdot\log\left(1+\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}A_i}{N_2}\right)+\delta_n \tag{8.70}$$

каде (c) повторно следи од неравенството на Јансен. Сепак:

$$A_i=E_{x_{2i}}\left[var\left(X_{1i}|x_{2i}\right)\right]=E_{x_{2i}}\left(E_{X_{1i}}\left(X_{1i}^2|X_{2i}\right)-E_{X_{1i}}^2\left(X_{1i}|X_{2i}\right)\right)$$

$$=E_{X_{1i}}\left(X_{1i}^2\right)-E_{X_2}E_{X_1}^2\left(X_{1i}|X_{2i}\right) \tag{8.71}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}A_i\overset{(d)}{=}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(E\left(X_{1i}^2\right)-E\left(E^2\left(X_1|X_{2i}\right)\right)\right)\overset{(e)}{\leq}P_1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left[E^2\left(X_{1i}|X_{2i}\right)\right] \tag{8.72}$$

Еднаквоста $(d)$ се добива со замена на (8.71) во (8.72), а нееднаквоста (e) следи од ограничувањето на моќност на кодните зборови.
Ако земеме ((8.64)):

$$\overline{\alpha}P_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left[E^2\left(X_{1i}|X_{2i}\right)\right], \quad \alpha\in[0,1] \tag{8.73}$$

На тој начин од (8.70) ќе се добие:

$$R\leq\frac{1}{2}\cdot\log\left(1+\frac{P_1-\overline{\alpha}P1}{N_2}\right)+\delta_n=\frac{1}{2}\cdot\log\left(1+\frac{\alpha P_1}{N_2}\right)+\delta_n. \tag{8.74}$$

Следно, ако го земеме во предвид 2.19:

$$y_{2i}=x_{1i}+z_{2i} \qquad y_{3i}=x_{2i}+y_{2i}+z_{3i} \tag{8.75}$$

$$nR\leq\sum_{i=1}^{n}I\left(X_{1i},X_{2i};Y_{3i}\right)+n\delta_n\leq\sum_{i=1}^{n}\left[h\left(Y_{3i}\right)-h\left(Y_{3i}|X_{1i}X_{2i}\right)\right]+n\delta_n=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[h\left(X_{2i}+Y_{2i}+Z_{3i}\right)-h\left(X_{2i}+Y_{2i}+Z_{3i}|X_{1i}X_{2i}\right)\right]+n\delta_n=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[h\left(X_{2i}+Y_{2i}+Z_{3i}\right)-h\left(X_{2i}+X_{1i}+Z_{2i}+Z_{3i}|X_{1i}X_{2i}\right)\right]+n\delta_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[h\left(X_{2i}+Y_{2i}+Z_{3i}\right)-h\left(Z_{2i}+Z_{3i}\right)\right]+n\delta_n=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[h\left(X_{2i}+Y_{2i}+Z_{3i}\right)-\frac{1}{2}\log\left(2\pi e\right)\overbrace{\left(N_2+N_3\right)}^{N}\right]+n\delta_n=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[h\left(X_{2i}+X_{1i}+Z_{2i}+Z_{3i}\right)-\frac{1}{2}\log\left(2\pi e\right)N\right]+n\delta_n \tag{8.76}$$

за секое $i$,

$$h\left(X_{2i}+X_{1i}+Z_{2i}+Z_{3i}\right)\leq\frac{1}{2}\log\left(E\left(X_{1i}+X_{2i}\right)^2+N\right) \tag{8.77}$$

Оттука:

$$R \le \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \log 2\pi e \left( E\left(X_{1i} + X_{2i}\right)^2 + N \right) - \frac{1}{2} \log\left(2\pi e\right) N =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{E\left(X_{1i} + X_{2i}\right)^2}{N} \right) + \delta_n \le$$

$$\le \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E\left(X_{1i} + X_{2i}\right)^2}{N} \right) + \delta_n. \tag{8.78}$$

Сега се добива :

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E\left(X_{1i} + X_{2i}\right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left(X_{1i}^2\right) + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left(X_{1i} X_{2i}\right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left(X_{2i}^2\right) \le$$

$$\le P_1 + P_2 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} E_{2i}\left[X_{2i} \cdot E_{1i}\left[X_{1i} | X_{2i}\right]\right] \tag{8.79}$$

Со употреба на Коши-Шварцовата нееднаквост [30, eq.(14.5.2)] на секој член од сумата во (8.79) се добива:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E\left(X_{1i} + X_{2i}\right)^2 \le P_1 + P_2 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{E_{2i}\left[X_{2i}^2\right] \cdot E_{2i}\left\{E_{1i}^2\left[X_{1i} | X_{2i}\right]\right\}} \tag{8.80}$$

Од (8.73), ограничувањето на моќност (8.53) и Коши-Шварцовата нееднаквост се добива:

$$\left( \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{E\left[X_{2i}^2\right]}{n} \right)^{1/2} \left( \frac{E\left\{E^2\left[X_{1i} | X_{2i}\right]\right\}}{n} \right)^{1/2} \right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{E\left[X_{2i}^2\right]}{n} \right) \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{E\left\{E^2\left[X_{1i} | X_{2i}\right]\right\}}{n} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{E\left[X_{2i}^2\right]}{n}} \sqrt{\frac{E\left\{E^2\left[X_{1i} | X_{2i}\right]\right\}}{n}} \le \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left[X_{2i}^2\right] \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left\{E^2\left[X_{1i} | X_{2i}\right]\right\}} = \sqrt{P_2\left(\overline{\alpha} P_1\right)} \tag{8.81}$$

Во (8.81) максимумот се случува кога: $E\left\{E^2\left[X_{1i} | X_{2i}\right]\right\} = \overline{\alpha} \cdot P_1$ и $E\left[X_{2i}^2\right] = P_2$ за сите $i$. Ако (8.81) и (8.79) се заменат во (8.78) се добива:

$$R \le \frac{1}{2} \cdot \log \left( 1 + \frac{P_1 + P_2 + 2 \cdot \sqrt{\overline{\alpha} P_1 P_2}}{N} \right) + \delta_n \tag{8.82}$$

со што е докажана теоремата 8.1.

## 8.6 Моментален капацитет на точка-точка МИМО канал

Со користење на (6.3) и зависноста помеѓу здружената информација и ентропијата, (6.10) за дадено $\mathbf{H}$ може да се претстави како:

$$I\left(\mathbf{X}; \mathbf{Y}\right) = h\left(\mathbf{Y}\right) - h\left(\mathbf{Y} | \mathbf{X}\right) = h\left(\mathbf{Y}\right) - h\left(\mathbf{H} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N} | \mathbf{X}\right) =$$

$$= h\left(\mathbf{Y}\right) - h\left(\mathbf{N} | \mathbf{X}\right) = h\left(\mathbf{Y}\right) - h\left(\mathbf{N}\right) \tag{8.83}$$

каде $h(\cdots)$ во овој случај ја означува диференцијалната ентропија [9, ch.(8)] на континуална случајна променлива. Се претпоставува дека испратениот вектор $\mathbf{X}$ во изворот и векторот на шумот $\mathbf{N} \sim \mathscr{N}(0, \mathbf{K}_n)$ се независни. Изразот (8.83) го достигнува максимумот кога $\mathbf{Y}$ е Гаусова случајна променива, бидејќи Гаусовата распределба ја максимизира ентропијата за дадена варијанса [9]. Диференцијалната ентропија за реален гаусов вектор $\mathbf{Y} \in R_n$ со нулта средна вредност и матрица на коварианси $\mathbf{K}$ е еднаква на:

$$h(\mathbf{Y}) = \frac{1}{2} \cdot \log_2((2\pi \cdot e)^n \det(\mathbf{K})), \tag{8.84}$$

а за комплексен Гаусов вектор $\mathbf{Y} \in C_n$, диференцијалната ентропија е:

$$h(\mathbf{Y}) \leq \log_2 \det(\pi \cdot e \cdot \mathbf{K}) \tag{8.85}$$

со еднаквост само и само ако $\mathbf{Y}$ е циркуларно-симетричен комплексен Гаусов вектор со коваријанса $E\left[\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^H\right] = \mathbf{K}$ [68]. Ако се претпостави оптимална гаусова распределба за $\mathbf{X}$, коваријансата на примениот комплексен вектор $\mathbf{Y}$ е дадена со:

$$E\left[\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^H\right] = E\left[(\mathbf{H} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N}) \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N})^H\right]$$

$$\begin{aligned} E\left[(\mathbf{H} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N}) \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N})^H\right] &= E\left[(\mathbf{H} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N}) \cdot \left(\mathbf{X}^H \cdot \mathbf{H} + \mathbf{N}^H\right)\right] = \\ &= E\left[\mathbf{H} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^H \cdot \mathbf{H}^H\right] + E\left[\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^H\right] = \\ \mathbf{H} \cdot E\left[\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^H\right] \cdot \mathbf{H}^H + E\left[\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^H\right] &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{K}_x \cdot \mathbf{H}^H + \mathbf{K}_n = \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_n \end{aligned} \tag{8.86}$$

Во изразот (8.86) индексите $s$ и $n$ ги означуваат сигналот и шумот. Ако (8.86) се замени во (8.83) максималната здружена информација за МИМО каналот е:

$$C = h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{N}) = \log_2\left[det\left(\pi e\left(\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_n\right)\right)\right] - \log_2 \det\left(\pi e \cdot \mathbf{K}_n\right) = \log\left[\det\left(\left(\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_n\right) \cdot \mathbf{K}_n^{-1}\right)\right]$$

$$= \log\left[\det\left(\mathbf{H} \cdot \mathbf{K}_x \cdot \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{K}_n^{-1} + \mathbf{K}_n \cdot \mathbf{K}_n^{-1}\right)\right] = \log\left[\det\left(\mathbf{H} \cdot \mathbf{K}_x \cdot \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{K}_n^{-1} + \mathbf{I}_{N_R}\right)\right] \tag{8.87}$$

каде $\mathbf{I}_{N_R}$ е единечна матрица со димензија $N_R$x$N_R$. Кога изворот не го познава каналот, оптимално е рамномерно да се распредели расположивата моќност $P_T$ помеѓу предавателните антени во изворот, т.е. во тој случај коваријанса на векторот на симболи испратени во изворот $\mathbf{X}$ е дадена со: $\mathbf{K}_x = \frac{P_T}{N_T} \cdot \mathbf{I}_{N_T}$. Дополнително, ако се претпостави дека шумот во антените не е корелиран, матрицата на коваријанси на шумот е: $\mathbf{K}_n = N_0 \mathbf{I}_{N_R}$, тогаш за изразот (8.87) се добива:

$$C = \log_2\left[det\left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{P_T}{N_T \cdot N_0} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^H\right)\right] \tag{8.88}$$

каде $N_0$ е варијанса на шумот.

Капацитетот на МИМО каналот е можно да се анализа со дијагонализација на продуктот на матрици $\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^H$ во (8.88) со декомпозиција на сопствени вредности (анг. eigen values) или со декомпозиција на сингуларни вредности.

Ако се користи декомпозиција на сингуларни вредности и ако се земе $\rho = P_T/N_0$ изразот (8.88) се сведува на:

$$C = \log_2\left[det\left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{\rho}{N_T} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{\Sigma^H} \cdot \mathbf{U}^H\right)\right] = \log_2\left[det\left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{\rho}{N_T} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma^2} \cdot \mathbf{U}^H\right)\right] \tag{8.89}$$

каде $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ се унитарни матрици на левите и десните сингуларни вектори, и $\Sigma$ е дијагонална матрица која ги содржи сингуларните вредности на главната дијагонала. Сите елементи на дијагоналата се нулти освен првите $r$ елементи. Бројот на ненулти сингуларни вредности $r$ е еднаков на рангот на каналната матрица:

$$r = rank\left(\mathbf{H}\right) \leq \min\left(N_T, N_R\right) \tag{8.90}$$

Изразот 8.89 може дополнително да се упрости доколку се употреби теоремата за детерминанти на Силвестер:

$$\det(\mathbf{I}_{AB} + A \cdot B) = \det(\mathbf{I}_{BA} + B \cdot A). \tag{8.91}$$

Доколку (8.91) се замени во (8.89) ќе се добие:

$$C = \log_2\left[det\left(\mathbf{I}_{N_T} + \frac{\rho}{N_T} \cdot \mathbf{U}^H \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma^2}\right)\right]. \tag{8.92}$$

После дијагонализацијата на матрицата $\mathbf{H}{\cdot}\mathbf{H}^H$, изразите за капацитет на МИМО каналот содржат само унитарни и дијагонални матрици. Со тоа, полесно е да се забележи дека вкупниот капацитет на МИМО каналот се состои од сума на паралелни AWGN SISO под-канали. Бројот на паралелни под-канали зависи од рангот на каналната матрица. Доколку во (8.92) се употреби (8.90) и земе во предвид фактот дека детерминантата на унитарна матрица е еднаква на 1 се добива:

$$C = \log_2\left[det\left(\mathbf{I}_{N_T} + \frac{\rho}{N_T} \cdot \Sigma^2\right)\right] =$$

$$\log_2\left[\left(1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \sigma_1^2\right) \cdot \left(1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \sigma_2^2\right) ... \left(1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \sigma_r^2\right)\right] = \sum_{i=1}^{r} \log_2\left(1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \sigma_i^2\right) \tag{8.93}$$

каде $\Sigma$ е реална матрица, а $\sigma_i^2$ се квадратите на сингуларните вредности.

Ако се користи декомпозиција на сопствени вредности и ако се земе $\rho = P_T/N_0$ изразот (8.88) се сведува на:

$$C = \log_2\left[det\left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{\rho}{N_T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{E}^{-1}\right)\right] \tag{8.94}$$

каде $\mathbf{E}$ е матрица на сопствените вектори со ортогонални колони и $\Lambda$ е дијагонална матрица која ги содржи сопствените вредности во главната дијагонала.

Ако се користи истиот пристап како во случајот на декомпозиција на сингуларни вредности, изразот 8.94 може да се сведе на:

$$C = \log_2\left[det\left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{\rho}{N_T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{E}^{-1}\right)\right] = \log_2\left[det\left(\mathbf{I}_{N_T} + \frac{\rho}{N_T} \cdot \mathbf{E}^{-1} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{\Lambda}\right)\right] =$$

$$= \log_2\left[\left(1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \lambda_1\right) \cdot \left(1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \lambda_2\right) ... \left(1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \lambda_r\right)\right] = \sum_{i=1}^{r} \log_2\left(1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \lambda_i\right) \tag{8.95}$$

каде $\lambda_i$ се сопствените вредности содржани во главната дијагонала на матрицата$\Lambda$.

# 9 Објавени трудови од темата на докторската дисертација

**Меѓународни конференции:**

[1] J. Stosic, and Z. Hadzi-Velkov, "Outage Probability of Multi-hop Relay Systems in Various Fading Channels," *Proc. 1st Conference on Information and Communication Technologies' Innovations (ICT Innovations 2009)*, Ohrid, Macedonia, 27-30 September 2009 (paper slected fo publication in *ICT Inovations 2009*, Springer, 2010)

[2] J. Stosic, and Z. Hadzi-Velkov, "Performance analysis of dual-hop MIMO systems", *Proc. 2nd Conference on Information and Communication Technologies' Innovations (ICT Innovations 2010)*, Ohrid, Macedonia, 12-15 September 2010 (paper slected fo publication in *ICT Inovations 2010*, Springer, 2011, pp. 123-132).

[3] J. Stosic, and Z. Hadzi-Velkov, "Performance analysis of dual-hop dual-antennas MIMO systems in Rayleigh fading," *Proc. 2nd International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems (ICUMT 2010)*, Moscow, Russia, 18-20 October 2010.

[4] J. Stosic, and Z. Hadzi-Velkov, "Outage probability approximations for dual-hop Amplify-and-Forward MIMO relay systems in Rayleigh fading", Proc. 11th International Conference on Telecommunication in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services (TELSIKS 2013), Nis, Serbia, 16-19 October 2013.

[5] J. Stosic, and Z. Hadzi-Velkov, "Approximate Performance Analysis of Dual-hop Decouple-and-Forward MIMO Relaying," *Proc. 11th International Conference on Electronics, Telecommunications, Automation and Informatics (ETAI 2013)*, Ohrid, Macedonia, 26-28 September 2013.

**Списанија:**

[1] J. Stosic, Z. Hadzi-Velkov, "Simple tight approximations of the error performance for dual-hop MIMO relay systems in Rayleigh fading," *AEÜ - International Journal of Electronics and Communications,* vol. 67, no. 10, pp. 854-960, October 2013 (Impact Factor: 0.695).

# Литература


[1] A. Sendonaris, E. Erkip, B. Aazhang, “User Cooperation Diversity Part I and Part II,” *IEEE Transactions on Communications,* vol. 51, no. 11, pp. 1927-48, 2003.

[2] M. Dohler, Y. Li, *Cooperative Communications: Hardware, Channel and PHY*, Wiley, 2010.

[3] T. M. Cover, A. E. Gamal, “Capacity Theorem for the relay channels,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-25, no. 5, September 1979.

[4] J. N. Laneman, G. W. Wornell, and D. N. C. Tse, “An Efficient Protocol for Realizing Cooperative Diversity in Wireless Networks,” *IEEE International Symposium on Information Theory*, pp. 294, June 2001.

[5] I. A. Faycal, M. Medard, “Optimal uncoded regeneration for binary antipodal signaling,” *IEEE International Conference on Communications*, vol. 2, pp. 742– 746, June 20–24, 2004.

[6] M. O. Hasna, M. S. Alouini, “A Performance Study of Dual-Hop Transmissions With Fixed Gain Relays,” IEEE Transactions On Wireless Communications, Vol.3, no. 6, 2004.

[7] A. Nosratinia, T. E. Hunter, “A. Hedayat Cooperative Communication in Wireless Networks,” *IEEE Communications Magazine*, Oct. 2004.

[8] C. E. Shannon, “A mathematical theory of communication,” Bell Syst. Tech. J., vol. 27, pp. 379-423, July 1948.

[9] T. M. Cover, J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*, Second Edition, John Wiley & Sons, 2006.

[10] A. Sendonaris, E. Erkip, B. Aazhang, “*Increasing uplink capacity via user cooperation diversity*,” IEEE International Symposium on Information Theory, 1998.

[11] T. E. Hunter, S. Sanayei, A. Nosratinia, *“Outage analysis of coded cooperation,”* IEEE Transactions on Information Theory, vol. 52, pp. 375–391, Feb. 2006.

[12] D. Tse and P. Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communication,* pp. 383– 424, Cambridge University Press, 2005.

[13] G. Kramer, I. Maric, and R. D. Yates, *Cooperative Communications (Foundations and Trends in Networking*), Hanover MA: Now Publishers Inc., 2006.

[14] A. E. Gamal, Y-H. Kim, *Network Information Theory*, Cambridge University Press, 2011.

[15] P. Revesz, Z. W. Birnbaum, E. Lukacs, *The Laws of Large Numbers - A volume in Probability and Mathematical Statistics: A Series of Monographs and Textbooks,* Elsevier, 1967

[16] J. N. Laneman, D. N. C. Tse, “Cooperative Diversity in Wireless Networks Efficient Protocols and Outage Behavior,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 50, no. 12, December 2004

[17] S. M. Alamouti, "A Simple Transmit Diversity Technique for Wireless Communications," *IEEE Journal on Select Areas in Communications*, vol. 16, no. 8, October 1998.

[18] J. Stosic, Z. Hadzi-Velkov, "Performance analysis of dual-hop MIMO systems", *Proc. 2nd Conference on Information and Communication Technologies' Innovations (ICT Innovations 2010)*, Ohrid, Macedonia, 12-15 September 2010.

[19] J. Stosic, Z. Hadzi-Velkov, "Performance analysis of dual-hop dual-antennas MIMO systems in Rayleigh fading," *Proc. 2nd International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems (ICUMT 2010)*, Moscow, Russia, 18-20 October 2010.

[20] I-H. Lee, D. Kim, "Decouple-and-Forward Relaying for Dual-Hop Alamouti Transmissions," *IEEE Communications Letters,* No.2, 2008.

[21] J. N. Laneman, G. W. Wornell, "Energy efficient antenna sharing and relaying for wireless networks," *Proc. IEEE Wireless Communications Networking Conf.*, Chicago, IL, Oct. 2000.

[22] P. Anghel and M. Kaveh, "Analysis of two-hop transmission over Rayleigh fading channels," *Proc. IEEE Int. Symp. Advances in Wireless Communications*, Victoria, BC, Canada, Sept. 2002, pp. 155–156.

[23] V. Emamian, P. Anghel, and M. Kaveh, "Outage probability of a multi- user spatial diversity system in a wireless networks," *Proc. IEEE Vehicular Technology Conf.*, Vancouver, BC, Canada, Sept. 2002, pp. 573–576.

[24] M. O. Hasna, M. S. Alouini, "Application of the harmonic mean statistics to the end-to-end performance of transmission systems with relays," *Proc. IEEE Global Communications Conf.,* Taipei, Taiwan, Nov. 2002, pp. 1310–1314.

[25] T. M. Cover, C. S. K. Leung, "An achievable rate region for mutiple-access channel with Feedback," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-27, no. 3, May 1981.

[26] F. M. J. Willems, "Informationtheoretical Results for the Discrete Memoryless Multiple Access Channel. Doctor in de Wetenschap- pen Proefschrift", *Katholieke Universiteit Leuven*, Leuven, Belgium, Oct. 1992.

[27] A. D. Wyner, "On source coding with side information at the decoder," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-21, pp. 294-300, May 1975.

[28] D. Slepian, J. K. Wolf, "Noiseless coding of correlated information sources," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. IT-19, pp. 471–480, 1973.

[29] E. C. van der Meulen, "Three-terminal communication channels," *Adv. Appl. Prob.*, vol. 3, pp. 120-154, 1971.

[30] V. Krishnan, *Probability and Random Processes*, Wiley, 2006.

[31] L. R. Ford, D. R. Fulkerson, *Flows in Networks, Princeton*, NJ: Princeton Univ. Press, 1962.

[32] A. E. Gamal, N. Hassanpour, J. Mammen, "Relay Networks with Delays," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-53, no. 10, October 2007.

[33] I. H. Lee, D. Kim, "Decouple-and-Forward Relaying for Dual-Hop Alamouti Transmissions," *IEEE Communications Letters*, vol. 12, no. 2, February 2008.

[34] I. H. Lee, D. Kim, "End-to-End BER Analysis for Dual-Hop OSTBC Transmissions over Rayleigh Fading Channels," *IEEE Transactions On Communications*, vol. 56, no. 3, March 2008

[35] M. K. Simon, M. S. Alouini, *Digital Communication over Fading Channels*, Second Edition. New York: Wiley, 2005.

[36] J. Proakis, *Digital Communications*, 4 edition, McGraw-Hill, August 2000.

[37] B. Sklar, *Digital Communications: Fundamentals and Applications*, Second Edition, Prentice Hall, January 2001.

[38] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 6th edition, Academic Press, 2000.

[39] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 9th edition, New York: Dover, 1970.

[40] Z. Yi, I-M. Kim, Approximate BER Expressions of Distributed Alamouti's Code in Dissimilar Cooperative Networks with Blind Relays, *IEEE Transactions on Communications,* no. 12, 2009.

[41] S. Chen, W. Wang, X. Zhang, Z. Sun, "Performance Analysis of OSTBC Transmission in Amplify-and-Forward Cooperative Relay Networks," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, no.1, 2010.

[42] I-H. Lee, D. Kim, "End-to-End BER Analysis for Dual-Hop OSTBC Transmissions over Rayleigh Fading Channels," *IEEE Transactions on Communications*, no. 3, 2008.

[43] T. Q. Duong, H. J. Zepernick, T. A. Tsiftsis, "Amplify-and-Forward MIMO Relaying with OSTBC over Nakagami-m Fading Channels," IEEE International Conference on Communications, 2010;

[44] I-H. Lee, D. Kim, "Achieving Maximum Spatial Diversity with Decouple-and-Forward Relaying in Dual-Hop OSTBC Transmissions," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, no. 3, 2010.

[45] L. Yang, Q. T. Zhang "Performance Analysis of MIMO Relay Wireless Networks With Orthogonal STBC," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, no. 7, pp. 3668-74, 2010.

[46] Y. Chen, G. Wu, W. Lin, Q. Li, S. Li, "Outage Probability of Space-Time Coded Decouple-and-Forward Relaying over Nakagami-m Fading Channels," *International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing,* 2009.

[47] A. Abdaoui, M. H. Ahmed, "On the Performance Analysis of a MIMO-Relaying Scheme With Space-Time Block Codes," IEEE Transactions On Vehicular Technology, no. 7, 2010.

[48] P. Dharmawansa, M. R. McKay, R. K. Mallik, Analytical Performance of Amplify-and-Forward MIMO Relaying with Orthogonal Space-Time Block Codes, *IEEE Transactions on Communications*, no. 7, 2010.

[49] B. K. Chalise, L. Vandendorpe, "Outage Probability Analysis of a MIMO Relay Channel with Orthogonal Space-Time Block Codes," *IEEE Communications Letters*, no. 4, 2008.

[50] H. Jafarkhani, *Space Time Coding Theory and Practice*, Cambridge University Press, 2005.

[51] V. Tarokh, H. Jafarkhani, A. R. Calderbank, "Space-time block coding for wireless communications: Performance results," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, no.3, pp. 451-60, 1999.

[52] M. O. Hasna, M. S. Alouini M.S, "Outage Probability of Multihop Transmission Over Nakagami Fading Channels," IEEE Communications Letters, vol. 7, no. 5, May 2003.

[53] M. O. Hasna, M. S. Alouini, "End-to-End Performance of Transmission Systems With Relays Over Rayleigh-Fading Channels," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, no. 6, 2003.

[54] A. P. Prudnikov, A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integrals and Series Volume 4: Direct Laplace Transforms*, Gordon And Breach Science Publishers, 1992.

[55] Y. Zhao, R. Adve, T. J. Lim "Symbol error rate of selection amplify-and-forward relay systems," IEEE Communications Letters, no. 11, 2006.

[56] P. A. Anghel, M. Kaveh, "On the Performance of Distributed Space-Time Coding Systems with One and Two Non-Regenerative Relays," *IEEE Transactions On Wireless Communications*, vol. 3, 2006.

[57] A. Jeffrey, H. H. Dai, *Handbook of Mathematical Formulas and Integrals*, Fourth Ehdition, Academic Press, 2008.

[58] B. Vucetic, J. Yuan, *Space-Time Coding*, John Wiley & Sons, 2003.

[59] V. Tarokh, H. Jafarkhani, A. R. Calderbank, "Space-time block codes from orthogonal designs," *IEEE Transactions On Information Theory*, vol. 5, pp. 1456-67, 1999.

[60] J. Stosic, Z. Hadzi-Velkov, "Simple tight approximations of the error performance for dual-hop MIMO relay systems in Rayleigh fading," *AEÜ - International Journal of Electronics and Communications,* vol. 67, no. 10, pp. 854-960, October 2013.

[61] J. Stosic, Z. Hadzi-Velkov, "Outage probability approximations for dual-hop Amplify-and-Forward MIMO relay systems in Rayleigh fading", Proc. 11th International Conference on Telecommunication in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services (TELSIKS 2013), Nis, Serbia, 16-19 October 2013.

[62] J. Stosic, and Z. Hadzi-Velkov, "Approximate Performance Analysis of Dual-hop Decouple-and-Forward MIMO Relaying," *Proc. 11th International Conference on Electronics, Telecommunications, Automation and Informatics (ETAI 2013)*, Ohrid, Macedonia, 26-28 September 2013.

[63] P. G. Moschopoulos, "The Distribution of the Sum of Independent Gamma Random Variables," *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 1985.

[64] J. Stosic, Z. Hadzi-Velkov, "Outage Probability of Multi-hop Relay Systems in Various Fading Channels," *Proc. 1st Conference on Information and Communication Technologies' Innovations (ICT Innovations 2009)*, 27-30 September 2009.

[65] M. O. Hasna, M. S. Alouini, "Optimal Power Allocation for Relayed Transmissions Over Rayleigh-Fading Channels," *IEEE Transactions On Wireless Communications*, vol. 3, no. 6, November 2004

[66] I. E. Telatar, "Capacity of Multi-Antenna Gaussian Channels," *Eropean Transactions on Telecommunications*, 1999.

[67] G. J. Foschini, M. J. Gans, “On Limits of Wireless Communications in Fading Environments when Using Multiple Antennas”, *Wireless Personal Communications*, vol. 6, pp. 311-335, March 1998.

[68] I. Telatar, ”Capacity of multi-antenna gaussian channels,” *AT&T Technical Memorandum*, 1995.

[69] A. A. P. Guimaraes, C. C. Cavalcante, An Upper-Bound on the Ergodic Capacity of Rayleigh-Fading MIMO Channels using Majorization Theory, *XXX Brazilian Symposium on Telecommunications,* Brasilia, 2012.