

Универзитет Св. „Кирил и Методиј“ во Скопје  
Факултет за електротехника и информациски технологии  
Институт за телекомуникации

Докторска дисертација

# КООПЕРАТИВНИ КОМУНИКАЦИИ ПРЕКУ БЕЗЖИЧНИ РЕЛЕЈНИ КАНАЛИ

Ментор:

проф. д-р Зоран Хаци-Велков

Кандидат:

Јован Стошиќ

декемврти 2014

Посветено на мојот син Иван и сопруга Светлана

# Содржина

Листа на акроними	1
1 Вовед	4
1.1 Предности и недостатоци на кооперативните релејни комуникации . . . . .	6
1.2 Карактеризација на релејните јазли во кооперативните системи . . . . .	7
1.2.1 Однесување на релејните јазли . . . . .	7
1.2.2 Методи за обработка на податоците во релето . . . . .	8
1.3 Метрики на перформансите на кооперативните релејни канали . . . . .	11
1.3.1 Капацитет . . . . .	11
1.3.2 Веројатност на испад и капацитетен испад . . . . .	12
1.3.3 Средна веројатност на грешка . . . . .	13
1.3.4 Компромис меѓу добивките во диверзитет и мултиплексирање . . . . .	13
1.4 Карактеризација на фединг каналите . . . . .	14
1.4.1 Главни карактеристики на фединг каналите . . . . .	15
1.5 Моделирање на фединг каналите . . . . .	16
1.5.1 Повеќепатен фединг . . . . .	16
1.6 Краток преглед на докторската дисертација . . . . .	17
2 Капацитет на кооперативните релејни канали	19
2.1 Горна пресечна граница на капацитетот . . . . .	20
2.2 Декодирај-и-проследи релеен канал . . . . .	24
2.2.1 Каскаден релеен канал . . . . .	25
2.2.2 Кохерентен каскаден релеен канал . . . . .	27
2.2.3 Декодирај-и-проследи релеен канал . . . . .	28
2.3 Компримирај-и-проследи релеен канал . . . . .	32
2.4 Гаусов релеен канал . . . . .	39
2.4.1 Горна пресечна граница и капацитет за DF, DT и каскаден Гаусов RC	39
2.4.2 Гаусов канал со компримирај-и-проследи . . . . .	44
2.4.3 Гаусов релеен канал со фреквентна распределба во дестинацијата .	46
2.4.4 Линеарен Гаусов RC со фреквентна распределба во дестинацијата .	51
2.4.5 Гаусов релеен канал со засили-и-проследи . . . . .	52
2.4.6 Капацитет на AF каскаден релеен канал . . . . .	54
3 Перформанси на МИМО релеен канал со две делници и две антени по јазол	56
3.1 Релеен канал со една антена по јазол . . . . .	56
3.2 Приемен и предавателен диверзитет . . . . .	59
3.3 Модел на каналот . . . . .	61
3.3.1 2x1x1 МИМО канал со две делници . . . . .	61
3.3.2 Раздвојување за 2x2 OSTBC за 2x1 систем . . . . .	63
3.3.3 2x2x1 и 2x2x2 МИМО системи со две делници . . . . .	64
3.3.4 Раздвојување за 2x2 OSTBC за 2x2 систем . . . . .	65
3.4 Веројатност на испад . . . . .	67
3.5 Нумерички и симулацијски резултати . . . . .	70

4	Перформанси на МИМО релеен канал со повеќе антени по јазол	74
4.1	Модел на каналот . . . . .	75
4.2	Веројатност на грешка . . . . .	77
4.2.1	Апроксимација на ЕР за произволен однос сигнал-шум . . . . .	77
4.2.2	Апроксимација на ЕР за голем однос сигнал-шум . . . . .	80
4.2.3	Раздвојување на OSTBC кодовите од повисок ред . . . . .	81
4.2.4	Нумерички и симулацијски резултати . . . . .	83
4.3	Веројатност на испад . . . . .	89
4.4	МИМО релеен канал: Вклучување на директна патека во анализата . . . . .	92
4.4.1	Едноставен израз за PDF за МИМО RC без директна патека . . . . .	92
4.4.2	PDF на односот сигнал-шум на AF МИМО RC со директна патека .	93
4.4.3	OP на AF МИМО релеен канал со директна патека . . . . .	95
5	Веројатност на испад во релеен канал со повеќе делници	98
5.1	Модел на каналот . . . . .	98
5.2	Нумерички и симулацијски резултати . . . . .	100
6	МИМО релеен канал од информациско-теоретски аспект	106
6.1	Точка-точка МИМО канал . . . . .	106
6.1.1	Капацитет на точка-точка канал со една антена по јазол . . . . .	107
6.1.2	Капацитет на точка-точка МИМО канал . . . . .	108
6.1.3	Капацитет на точка-точка МИМО со OSTBC . . . . .	110
6.1.4	Веројатност на капацитетен испад . . . . .	112
6.2	Ергодичен капацитет . . . . .	117
6.2.1	Каскаден AF МИМО релеен канал . . . . .	117
6.2.2	AF МИМО релеен канал со директна патека . . . . .	120
6.3	Веројатност на капацитетен испад . . . . .	122
6.3.1	Каскаден AF МИМО релеен канал . . . . .	122
6.3.2	AF МИМО релеен канал со директна патека . . . . .	126
7	Заклучок	129
8	Додатоци	132
8.1	Релеен канал на Сато . . . . .	132
8.2	Капацитет на CF за RC со сума по модул 2 . . . . .	133
8.3	CUB за релеен канал со сума по модул 2 . . . . .	135
8.4	CUB за Гаусов релеен канал . . . . .	136
8.5	Капацитет на деградиран Гаусов RC . . . . .	137
8.6	Моментален капацитет на точка-точка МИМО канал . . . . .	142
9	Објавени трудови од темата на докторската дисертација	145
	Литература	146

# Листа на акроними

AF Amplify and Forward

AWGN Additive White Gaussian Noise

BEP Bit Error Probability

BMC Block Markov Coding

BPSK Binary Phase Shift Keying

CDF Cumulative Distribution Function

CDMA Code Division Multiple Access

CF Compress and Forward

CSI Channel State Information

CUB Cutset Upper Bound

DCF Decouple-and-Forward

DF Decode and Forward

DMC Discrete Memoryless Channel

DMRC Discrete Memoryless Relay Channel

DMT Diversity Multiplexing Tradeoff

DT Direct Transmission

EF Estimate and Forward

EP Error Probability

EVCM Equivalent Virtual Cahnnel Matrix

FG Fixed Gain

i.i.d. Independent and Identically Distributed

LAN Local Area Networks

LF Linear-Process and Forward

LLN Law of Large Numbers

LOS line-of-sight

LTE Long-Term Evolution

MGF Moment Generating Function

MIMO Multiple Input Multiple Output

MISO Multiple-Input Single-Output

MRC Maximum Ratio Combining

nLF Nonlinear Process and Forward

NNC Noisy Network Coding

OC Outage Capacity

OP Outage Probability

OSTBC Orthogonal Space-Time Block Coding

PDF Probability Density Function

PF Purge and Forward

QoS Quality of Service

RB Random Binning

RC Relay Channel

RFD Receiver Frequency Division

SIMO Single-Input Multiple-Output

SISO Single Input - Single Output

SNR Signal-to-Noise Ratio

SSR Service Sustainability Rate

VG Variable Gain

# Апстракт

Кооперативните комуникации претставуваат важна област на истражување во безжичните комуникации. Тие ги користат својствата на безжичниот канал за да се зголеми ефикасноста и робусноста на телекомуникацискиот систем. Соседните безжични јазли (т.н. партнери или релеја) меѓусебно си помагаат во процесот на комуникацијата преку отстапување на дел од ресурсите за пренос на податоците испратени од партнерот. Ваквата комуникација е возможна поради дифузната природа на радиоканалот, и затоа сигналот испратен од изворот, освен до дестинацијата, може да стаса и до релето (т.н. дифузен канал точка - повеќе точки). Посредството на релето при комуникацијата меѓу изворот и дестинацијата оформува систем со виртуелен просторен диверзитет, со што се подобруваат перформансите на комуникацијата извор-дестинација. При координирано праќање на информација од изворот и релето кон дестинацијата се формира еквивалентен повеќепристапен канал (т.н. релеен канал) чиј капацитет е поголем од директниот канал извор-дестинација. Добивката од кооперацija може дополнително да се зголеми ако изворот, дестинацијата и релето располагаат со повеќе антени, при што дополнителната добивка се должи на појавата на просторниот диверзитет низ фединг канал.

Во докторската дисертација се анализирани перформансите на кооперативните релејни канали од информациско-теоретски и од комуникациско-теоретска перспектива. Анализирани се релејните канали со една влезна и една излезна антена, како и релејните канали со повеќе влезни и повеќе излезни антени (МИМО). За релејните канали со една влезна и една излезна антена, анализирана е горната граница на капацитетот, како и границите на достижените информациски брзини за основните релејни техники.

За МИМО релејните канали, анализирани се системи со две делници со посебен осврт кон МИМО системите со блоковско ортогонално просторно-временско кодирање (ОСТВС) во фединг канал. Претпоставено е дека релето користи посебен тип на засили-и-проследи релејна техника, наречена раздвои-и-проследи, при што релето и дестинацијата имаат целосни информации за статусот на каналот. Во засили-и-проследи релето, влезниот сигнал се раздвојува, засилува и проследува кон дестинацијата. За таквата конфигурација, се изведени прецизна и груба апроксимација за веројатноста за грешка за произволен однос сигнал-шум. За големи вредности на односот сигнал-шум прецизната апроксимација е упростена во едноставен асимптотски израз. Добиените апроксимации за веројатноста за грешка се споредени со веројатноста за грешка добиена со употреба на методот на момент-генерирачка функција и веројатноста за грешка добиена со Монте Карло симулации. Исто така, изведени се прецизни и груби апроксимации за веројатноста на испад за разгледуваниот засили-и-проследи МИМО релеен канал. Апроксимациите на веројатноста на испад се споредени со точните резултати добиени со нумеричка интеграција базирана на момент-генерирачка функција и веројатноста на испад добиена со Монте Карло симулации. Освен тоа, изведени се во затворена форма апроксимации на веројатноста на испад на засили-и-проследи МИМО релејниот канал со директна патека до дестинацијата. На крајот се изведени изрази за ергодичен капацитет и капацитетен испад на засили-и-проследи МИМО релејниот канал со и без директна патека до дестинацијата. Каналите со директна патека покажуваат значително подобрени перформанси од каналите без директна патека во поглед на ергодичниот капацитет и капацитетниот испад.

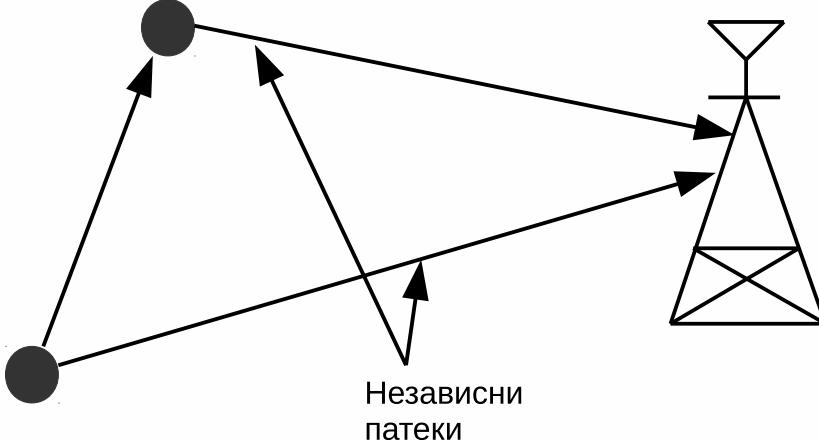
# 1 Вовед

Технологијата со повеќе влезови и излези (анг. MIMO - Multiple Input Multiple Output) стандардно се применува во современите телекомуникациски системи бидејќи таа нуди значителни подобрувања на перформансите во смисол на нивниот капацитет и издржливост, кои се постигнуваат преку искористување на повеќепатното простирање во безжичниот медиум. МИМО системите со 2 до 4 антени во моментов се користат во безжичните LAN (Local Area Networks) мрежи (802.11n, 802.11ac) или се развиваат за безжичните системи како 3GPP-LTE и LTE-advanced.

Делумно поттикнато од МИМО концептот, корисничката кооперација неодамна се јави како дополнителен развоен концепт во безжичните комуникации, наречен кооперативен диверзитет, кој има потенцијал да направи револуција во комуникациските системи од следната генерација со нудење на дополнителен капацитет и подобрувања од аспект на стабилност со мало дополнително процесирање на сигнали и мали дополнителни трошоци [1]. Некои кооперативни (т.е. релејни) техники се веќе дел од LTE-Advanced стандардот [2]. Соседните безжични јазли (кои исто така се нарекуваат релеи или партнери) го помагаат меѓусебниот процес на комуникација со доделување на дел од нивните ресурси за пренос на дел (или сите) информации од партнера. Со правилно координирање на различни просторно дистрибуирани јазли во единствен безжичен систем, може ефективно да се синтетизира виртуелно антенско поле за постигнување на просторен диверзитет, слично како во МИМО системите. Комбинацијата од МИМО и кооперативните релејни канали ги искористува бенефициите од диверзитет и добивките од мултиплексирање карактеристични за МИМО системите и добивките за надминување на засенувањето (shadowing), намалување на непотребно високата предавателна моќност и намалување на интерференцијата кој се карактеристични за радио-релејните системи.

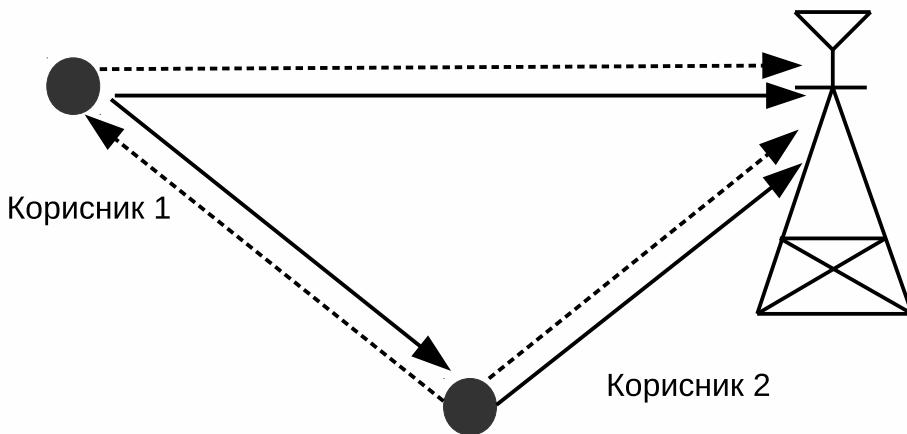
Мобилниот безжичен канал е под силно влијание на фединг, што предизвикува слабеењето на сигналот значително да варира во текот на преносот. Користењето на независни копии од сигналот создава *диверзитет* што ефективно се справува со штетните ефекти на федингот. На пример, може да се создаде просторен диверзитет со испраќање на сигналите од различни локации, со што се овозможува да пристигнат во дестинацијата независно заслабнати верзии од сигналот. Кооперативните комуникации го создаваат овој диверзитет на нов и интересен начин. За иницијално објаснување на идеата за кооперативни комуникации ќе ја разгледуваме сликата 1.1. Оваа слика покажува две мобилни станици кои комуницираат со иста дестинација. Секоја од станиците има една антена и не може да генерира просторен диверзитет. Сепак можно е едната мобилна станица да ги прими податоците од другата и да ги испрати кон дестинацијата заедно со сопствените податоци. Бидејќи патеките од двете станици се независни тие се под влијание на независен фединг што во дестинацијата создава просторен диверзитет. На сликите користиме икони кои претставуваат базни станици и мобилни станици заради впечатлива графичка презентација. Сепак, идејата за кооперативност е генерална, и е дури повеќе свойствена за ад-хок безжичните мрежи и безжичните сензорски мрежи отколку за клеточните мрежи.

Во кооперативните безжични комуникации, ќе разгледуваме клеточни или ад-хок безжични мрежи, каде безжичните станици се нарекуваат корисници. Корисниците можат да го зголемат квалитетот на услуга (мерен на физичко ниво со веројатност на грешка или веројатност на испад) со користење на кооперативни постапки. Во кооперативниот



**Слика 1.1:** Кооперативни комуникации

комуникациски систем, секој безжичен корисник се претпоставува дека испраќа податоци но исто така се однесува како кооперативен агент за другиот корисник (слика 1.2).



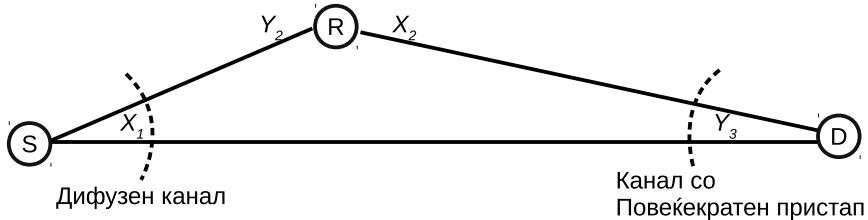
**Слика 1.2:** Во кооперативните комуникации секоја мобилна станица е корисник и реле

Кооперацијата води кон интересни компромиси од аспект на брзината на пренесување на податоците и моќноста за испраќање. Од аспект на моќноста на испраќање може да се тврди дека од една страна повеќе моќност ќе биде потребна за секој корисник, кога тој работи во кооперативен режим, бидејќи тој испраќа за двета корисници. Од друга страна, моќноста кај двета корисници ќе се намали заради добивката во диверзитет (види глава 1.3). Од аспект на овој компромис, се очекува да дојде до вкупна редукција на предавателната моќност, доколку другите параметри од интерес останат непроменети.

Слични прашања се поставуваат за брзината на пренесување на податоците во системот. Со оглед на тоа што во кооперативните комуникации секој корисник ги испраќа неговите податоци како и податоците од неговиот партнер на прв поглед изгледа дека тоа ќе предизвика намалување на брзината на пренесување на податоците во системот. Сепак, спектралната ефикасност на секој корисник се подобрува бидејќи со кооперативните комуникации може да се зголемат брзините на каналните кодови.

Базичните идеи за кооперативните комуникации се дадени во исклучително важниот

трудот [3] каде се анализирани информациско-теоретските својства на релејниот канал. Во овој труд се анализирани капацитетот на мрежа со три јазли која се состои од извор  $S$ , реле  $R$  и дестинација  $D$ . Претпоставено е дека сите јазли работат во ист опсег, така што системот може да се подели во дифузен дел гледано од аспект на изворот и канал со повеќекратен пристап гледано од аспект на дестинацијата (слика 1.3).



Слика 1.3: Релеен канал

Многу од идеите кои подоцна се јавија во литературата се базираат на [3]. Сепак, во неколку аспекти кооперативните комуникации се разликуваат од релејниот канал. Прво, последните истражувања се базираат на концептот на диверзитет во федин канал додека во [3] воглавно се анализира канал со додавачки бел Гаусов шум (анг. AWGN - Additive White Gaussian Noise). Второ, во релејниот канал, основна цел на релето е да му помогне на главниот канал, додека во кооперативните системи вкупните системски ресурси се фиксирали и корисниците се однесуваат и како извори на информация и како релеи. Во продолжението на ова глава ќе ги карактеризираме релејните јазли и основните кооперативни постапи односно методите за обработка на податоците во релето.

## 1.1 Предности и недостатоци на кооперативните релејни комуникации

Главните предности од користење на поддржувачки или кооперативни релеи во системот се:

- Добивка во перформанси која се должи на добивката во надминување на слабеењето, добивката во диверзитет и добивка од мултиплексирање. Овие добивки резултираат во намалување на предавателните моќности, поголем капацитет или подобро покривање. Диверзитетот кој се мери врз основ на градиентот на кривата на веројатноста на грешка за голем однос сигнал-шум (анг. SNR - Signal-to-Noise Ratio) за системите со кооперацијата изнесува 2 што одговара на диверзитетот што се обезбедува од стандардните дво-антенски предавателни или приемни постапки. Кооперативните комуникации обезбедуваат подобрувања во веројатноста на грешка дури и кога квалитетот на каналот меѓу корисниците е полош од каналот до дестинацијата.
- Балансиран квалитет на сервис. Во традиционалните телекомуникациски системи корисниците кои се наоѓаат во области со слабо покривање добиваат по slab квалитет на сервис (QoS - Quality of Service). Релјните системи дозволуваат да се избалансира овој недостаток односно на овие корисници да им се даде скоро ист квалитет на сервис.
- Имплементација без постоење на инфраструктура. Користењето на релеи дозволува имплементација на систем кој има минимална инфраструктура пред

имплементацијата. На пример, во области после ненадејна временска катастрофа, можат да се користат релеи за да се овозможат комуникации дури и во случај кога клеточниот систем не функционира.

- Во споредба со решенијата кои користат само клеточен пристап за обезбедување на одредено QoS ниво, користењето на релеи резултира во решенија со намалени севкупни трошоци.

Кооперативните комуникации, како што беа претходно описаны, претпоставуваат дека дестинацијата може да ги раздвои сигналите испратени од изворот и од партнерот (релето). Тоа се остварува со ортогонално испраќање на двета дела така што тие можат да се издвојат. Наједноставен начин на издвојување е во време, т.е. корисничките податоци и податоците од релето да се испраќаат во временски интервали кои не се преклопуваат. Во [1], се користи методата со повеќекратен пристап со распределба на кодови (анг. CDMA - Code Division Multiple Access) кои обезбедуваат ортогоналност при паралелниот пренос на информациите од двета партнери. Освен тоа возможно е издвојувањето да се оствари во фреквентен домен.

Традиционалните релејни канали работат во полу-дуплексен режим, каде комуникацијата во делницата од изворот до дестинацијата и во делницата од релето до дестинацијата е ортогонална што се обезбедува со користење на фреквентана или временска распределба. Од друга страна, во дуплексниот режим на работа изворот и релето може да делат заеднички временски или фреквентен домен, така што релето може истовремено да предава и прима. Полу-дуплексниот режим има лоша спектраната ефикасност поради што има двојно помал капацитет од системите кои работат во дуплексен режим. Сепак, дуплексниот режим е тежок за имплементација во пракса заради интерференцијата која се јавува во приемната антена како резултат на сигналот од предавателната антена на тој јазол.

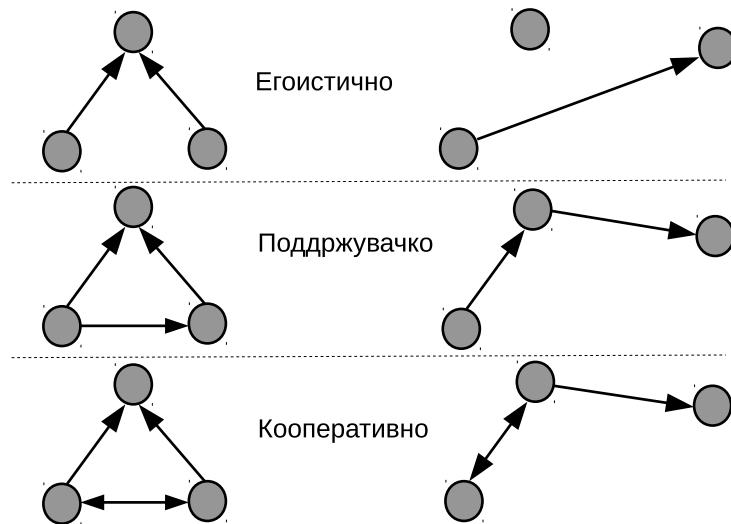
## 1.2 Карактеризација на релејните јазли во кооперативните системи

Во оваа глава ќе ги карактеризираме различните типови на однесувања на релејните јазли и како во нив се обработуваат информациите.

### 1.2.1 Однесување на релејните јазли

Јазлите кои се однесуваат како релеи или како кооперативни јазли играат централна улога во кооперативната мрежа. Нивното однесување има огромно влијание на перформансите на системот и согласно слика 1.4 може да се класифицираат во три основните типови: јазли кои се однесуваат egoистично, поддржувачки и кооперативно.

**Егоистично однесување (без помош):** Ова е најтипично однесување на јазлите во денешните безжични комуникациски системи. Во овој случај, секој јазол комуницира независно со базната станица доколку тој има податоци за испраќање или останува неактивен доколку тој нема податоци за пренос, иако тој може да му помогне на друг јазол кој има податоци за пренос. Другите јазли се сметаат за натпреварувачи, т.е. за да се зголемат ресурсите за еден јазол потребно е да се намалат ресурсите за другите јазли. Јазлите во ваквите безжични мрежи силно го чувствуваат влијанието на безжичниот канал во тоа што јазлите со добри услови на каналот постигнуваат поголеми брзини на пренесување, додека јазлите со полоши услови на каналот постигнуваат помали брзини за пренесување.



**Слика 1.4:** Типични форми на однесување на јазлите. Во симетричниот случај (лево), двета јазли може да бидат поддржувачи или соработници, во асиметричниот случај (десно), се избира подобрата опција

**Поддржувачко однесување (едностраница помош):** Вакво однесување е добро познато во ад-хок безжичните мрежи, каде податоците се испраќаат кон дестинацијата преку реле(и) кои немаат сопствени податоци за пренос. Поддржувачките релејни мрежи во последно време го наоѓаат својот пат во безжичните клеточни мрежи (на пример, LTE-Advanced (анг. Long-Term Evolution Advanced)). Во ова сценарио во дадениот момент нема добивка во перформанси за релето, бидејќи тоа само му помага на изворот, сепак, долгорочечно гледано, релето (доколку не е дел од планирана инфраструктура) може исто така да биде во ситуација да му е потребна помош и на тој начин да добие поддршка од другите релејни јазли.

**Кооперативно однесување (взајемна помош):** Вистинското кооперативно однесување се покажува од јазлите кои взајемно си помагаат, т.е. сите инволвиирани јазли имаат податоци за пренос и здружено се обидуваат да ги испратат. Системскиот дизајн кој ќе ја го следи концептот на кооперативност е сеуште далеку. Сепак, кооперативноста во општ случај ги намалува негативните ефекти на безжичниот канал така што дури и јазлите кои имаат лоши услови на каналот постигнуваат задоволителни брзини на пренесување на податоци.

Идните безжични мрежи веројатно ќе бидат изградени од јазли кои ќе ги покажуваат трите типа на однесување. Во општ случај може да се каже дека колку мрежата има повисоко ниво на коопреативност ќе има толку подобри перформанси но исто толку ќе биде покомплицирана за имплементација и одржување.

## 1.2.2 Методи за обработка на податоците во релето

Во литературата може да се најдат низа на различни методи за обработка на податоците во релето. Генерално тие можат да се поделат во две групи : транспарентни и регенеративни методи.

**Транспарентни релејни методи:** Во фамилијата на транспарентни (не-регенеративни) методи, релето не ја модифицира примената информација. Во релето се вршат само многу едноставни операции, како на пример, засилување и промена на фаза. Со оглед на тоа

што не се вршат дигитални операции врз сигналот, сигналот се прима во еден фреквентен опсег, се засилува и препраќа во друг фреквентен опсег. Пример на методи кои припаѓаат на оваа фамилија на релејни методи се:

*Засили-и-проследи:* Методата засили-и-проследи (анг. AF - Amplify and Forward) е една од наједноставните и најпопуларните релејни методи, сигналот примен од релето се засилува, фреквентно или временски поместува и препраќа. При тоа, во ошт случај може да се користат променлив или фиксен (статистички усреднет) фактор на засилување.

Дестинацијата ги комбинира податоците испратени од корисникот и неговиот партнери и одлучува во врска со испратената порака. Покрај тоа што шумот се засилува во релето, дестинацијата добива две независно ослабнати верзии на сигналот и може да донесе подобра одлука при детекцијата на пораката. Оваа метода детално е анализирана во [4].

*Линеарно процесирање и проследување* (анг. LF - Linear-Process and Forward): Овој релеен метод користи едноставни линеарни операции, кои се вршат врз сигналот во аналоген домен. Пример на таква линеарна операција е фазно поместување, што на пример може да се користи за имплементација на дистрибуирано формирање на сноп (анг. beamforming).

*Нелинеарно процесирање и проследување* (анг. n-LF Nonlinear Process and Forward): Овој релеен метод врши одредени нелинеарни операции на приемниот аналоген сигнал пред да се проследи. Пример за ова е нелинеарно засилување на применот сигнал така што се минимизира крај-крај веројатноста на грешка [5].

Важно прашање при дизјанот на транспарентните релејни методи е изборот на факторот на засилување во релето, каде во најопшти случај на располагање се следниве постапки:

*Променливо засилување* (анг. VG - Variable Gain) : Оваа постапка се разликува од постапката со фиксно засилување во тоа што засилувањето се прилагодува на моменталните промени во каналот. За оваа постапка е неопходно релето да има информации за моменталната состојба на каналот (CSI) од изворот до релето за да го контролира засилувањето така ја фиксира моќноста на проследениот сигнал. Ако слабеењето на каналот од изворот до релето е големо тогаш релето избира голем фактор на засилување, а ако слабеењето на каналот од изворот до релето е мало тогаш релето ќе користи помал фактор на засилување. На пример, се избира засилувањето да биде инверзно пропорционално на моменталната моќност на федингот на делницата од изворот до релето:

$$A^2 = \frac{E_R}{E_I \cdot \alpha_1^2 + N_0}. \quad (1.1)$$

каде  $E_R$  е моќноста на испратениот сигнал на излез од релето,  $E_I$  е моќноста на испретениот сигнал во изворот,  $N_0$  е додавачки бел гаусов шум на влезот на релето, а  $\alpha_1$  е амплитудата на федингот на делницата од изворот до релето (види глава 1.5).

*Фиксно засилување* (анг. FG - Fixed Gain) : За разлика од постапката со променливо засилување на релето кое користи постапка со фиксно засилување не му е потребно да има информации за моменталната состојба на каналот од изворот до релето туку користи константен фактор на засилување. Ваквите релеи се нарекуваат „слепи“ релеи. Како резултат на користењето на константен фактор на засилување сигналот на излез од „слепото“ реле има променлива моќност на излезот. За разлика од „слепите“ релеи често се користат т.н. „полу-слепи“ релеи. Во овој случај, јазелот го фиксира факторот на засилување во даден временски интервал, на вредност која зависи од статистиката на на каналот. На пример, фактор на засилување може да се избере да биде обратно пропорционален на средната вредност на моќноста на федингот во делницата од изворот до релето [2, eq.(2.17)]:

$$A^2 = \frac{E_R}{E_I \cdot E[\alpha_1^2] + N_0}. \quad (1.2)$$

каде  $E[X]$  означува средна вредност од случајната променлива  $X$ . Сепак, почесто се зема релето да зрачи во просек со иста моќност како моќноста што се добива со користење на факторот на засилување во 1.1 кој се користи во релето со променливо засилување [6]:

$$A^2 = E \left[ \frac{E_R}{E_I \alpha_1^2 + N_0} \right] \quad (1.3)$$

**Регенеративни релејни методи:** Во случај на регенеративните релејни протоколи, во релето се менува информацијата што се пренесува или обликот на сигналот. Оваа постапка подразбира дигитални операции во основен опсег. Сепак, за сметка на комплексноста во повеќето случаи регенеративните методи постигнуваат подобри перформанси од транспарентните методи. Најопшта поделба на регенеративните методи е:

**Естимирај-и-проследи** (анг. EF - Estimate and Forward) : Врз примениот сигнал во релето се врши квантанизација, а врз основ на квантанизираниот сигнал се врши естимација на оригиналниот сигнал. Оваа естимација од сигналот потоа се проследува кон дестинацијата. На пример, EF релето го естимира модулираниот симбол и ја препраќа неговата естимација со користење на друг тип на модулација.

**Компримирај-и-проследи** (анг. CF - Compress and Forward): Ова постапка е слична на EF постапката со таа разлика што релето препраќа кон дестинацијата компримирана верзија од детектираната низа на информациони бити. За имплементација на оваа постапка е неопходно користење на изворно кодирање на примероците од сигналот. Се покажува дека методата компримирај-и-проследи достигнува најголем капацитет на каналот кога каналот од изворот до релето е послаб од каналот до дестинацијата (види глава 2.3).

**Декодирај-и-проследи** (анг. DF - Decode and Forward) : Релето во оваа постапка го прима и детектира сигналот, го декодира и повторно кодира и проследува кон дестинацијата. Всушност се работи за постапка што е најблиска до начинот на функционирање на класичниот релеен канал. Денес, постојат многу различни типови на DF постапки затоа што тие во најголем број на случаи обезбедуваат најдобри перформанси во поглед на веројатноста на грешка, веројатноста на испад и капацитет на каналот.

Пример на DF метода може да се најде во трудовите [1] [7]. Се работи за едноставна CDMA имплементација на DF релејната постапка. Во овој случај два корисника се упаруваат за да кооперираат меѓу себе. Секој корисник има сопствен CDMA код  $c_1(t)$  и  $c_2(t)$ . Корисничките податоци се  $b_i^{(n)}$  каде  $i = 1, 2$  се корисничките индекси и  $n$  го означува временскиот индекс на информациони бити. Факторите  $a_{i,j}$  ги обележуваат моменталните амплитуди на сигналот. Секој сигнален период се состои од три бит-интервали. Сигналите испратени од корисниците се:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \left[ a_{11} b_1^{(1)} c_1(t), a_{12} \cdot b_1^{(2)} c_1(t), a_{13} b_1^{(2)} c_1(t) + a_{14} \hat{b}_2^{(2)} c_2(t) \right] \\ X_2(t) &= \left[ a_{21} b_2^{(1)} c_2(t), a_{22} \cdot b_2^{(2)} c_2(t), a_{23} \cdot \hat{b}_1^{(2)} c_1(t) + a_{24} b_2^{(2)} c_2(t) \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

каде  $X_1$  е сигналот испратен од првиот и  $X_2$  сигналот испратен од вториот корисник.

Со други зборови, во првиот и вториот интервал секој корисник ги практика сопствените податоци. Секој корисник потоа го детектира вториот бит од другиот корисник (секоја естимација на битот од другиот корисник се обележува со  $\hat{b}_i$ ). Во третиот интевал, двата корисници практикат линеарна комбинација од нивниот сопствен втор бит и вториот бит од партнерот. Предавателните моќности за првиот, вториот и третиот интервал може да се променливи и може да се оптимизираат согласно условите на линкот до дестинацијата и условите на линкот меѓу корисниците. На тој начин се обезбедува прилагодување кон каналните услови.

Моќностите се алоцираат преку коефициентите  $a_{i,j}$  така што се исполнити ограничувањето на средната моќност. Грубо речено, кога каналот меѓу корисниците е добар, повеќе моќност ќе се алоцира на кооперација, додека ако е лош кооперацијата се намалува. Ваквата постапка има предност заради својата едноставност и прилагодливост кон каналните услови.

*Исчисти-и-проследи* (анг. PF - Purge and Forward): Модерните телекомуникациски системи обично се дизјуираат да бидат со минимална инерференција без оглед на вредноста на шумот. Овој дизајн исто така се однесува на кооперативните системи каде PF постапката ја елиминира интерференција помеѓу различни релејни сигнали.

## 1.3 Метрики на перформансите на кооперативните релејни канали

Во оваа глава накратко ќе ги опишеме метриките со кои се описуваат перформансите на кооперативните системи: (1) веројатност за испад (OP - Outage Probability) и капацитетен испад (анг. OC - Outage Capacity), (2) капацитет (3) средна веројатност на грешка и (4) компромис меѓу добивката од диверзитет и добивката од мултиплексирање (анг. DMT - Diversity Multiplexing Trade-off).

### 1.3.1 Капацитет

Клод Шенон [8] докажа дека може да се постигнуваат информациски брзини на пренесување преволно близки до капацитетот на каналот со произволно мала веројатност на грешка (анг. EP - Error Probability) доколку се овозможат доволен број на користења на каналот. Со други зборови веројатноста на грешка тежнее кон нула доколку  $n \rightarrow \infty$ , така што се усредни влијанието на шумот.

Максималната брзина за доверливи комуникации се нарекува капацитет  $C$  на каналот. Доколку на влезот на дестинацијата моќноста на сигналот е  $P$ , а спектралната густина на шумот е  $N_0/2$ , капацитетот на каналот со додавачки бел гаусов шум е [9]:

$$C = W \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{P}{W \cdot N_0} \right) \text{ bits/s} \quad (1.5)$$

каде  $W$  е пропустниот опсег на теснopoјасниот филтер. Безжичниот канал влијае врз сигналите што минуваат низ него, а со тоа влијае на моќноста и капацитетот на каналот. Додека детермнистичкиот ефект на слабењето на патот само ја менува употребливата моќност на сигналот во изразот (1.5), случајноста која ја предизвикува безжичниот канал го менува капацитетот бидејќи корисната моќност на сигналот ефективно се менува во текот на праќањето на еден коден збор. Зависно од типот на промените на каналот, се разликуваат ергодичен и неергодичен фединг канал.

Каналните карактеристики кои се претпоставуваат во контекст на Шеноновиот капацитет се однесуваат на *ергодичен канал*. Каналот е ергодичен доколку усреднувањето по време е еднакво на усреднувањето по ансамбл. Во попрактична смисла, тоа значи дека каналот се менува доволно често во текот на преностот така што се поминуваат сите фединг состојби. Ергодичниот канал може да ја поддржи следнава максимална брзина на пренос со сигурност:

$$C = E [\log_2 (1 + \gamma)] \quad \text{bit/Hz/s} \quad (1.6)$$

каде  $\gamma$  е моменталниот однос сигнал-шум а операторот  $E [...]$  означува средна вредност по случајната променлива  $\gamma$ .

Во трудовите [10] и [1] е покажано дека со користење на кооперативни релејни методи значително се подобрува брзината на пренесување на податоци за секој корисник на кооперативната мрежа но и на вкупниот капацитет (сумата од брзините на двата корисника за кооперативната релејна постапка прикажана на слика 1.4). Добивката е од особено значење во асиметричниот случај каде еден од корисниците има многу лоши канални услови. Резултатите добиени во овие трудови поттикнаа бран на истражувања за развој на практични постапки кои ќе можат да ги постигнат теоретските добивки на брзина на пренесување на податоци. Во [10] покажано е дека зголемувањето на вкупниот капацитет (сумата од брзините на двата корисника) резултира во зголемување на областа на покривање и дека едноставно изворно кодирање базирано на повторување на испратените кодни симболи со користење CDMA значително го зголемува регионот на достигливи брзини на пренесување во споредба со регионот за случајот без кооперација, со зголемување на квалитетот на каналот помеѓу корисниците.

### 1.3.2 Веројатност на испад и капацитетен испад

Друга стандардна метрика на перформансите на кооперативните релејните канали е веројатноста на испад ( $P_{out}$ ) која се дефинира како веројатност дека моменталниот однос сигнал-шум ( $\gamma$ ) ќе падне под одреден праг  $\gamma_{th}$ , т.е.:

$$P_{out} = Pr(\gamma \leq \gamma_{th}) = \int_0^{\gamma_{th}} p_{\gamma}(\gamma) d\gamma \quad (1.7)$$

што всушност претставува кумулативна функција на веројатност (анг. CDF - Cumulative Distribution Function) од  $\gamma$  пресметана за  $\gamma = \gamma_{th}$ .

Шеноновата теоријата на информации не е погодна за анализа на комуникациските сценарија каде средните канални услови се менуваат од коден збор до коден збор. Затоа е воведен концептот на веројатност на капацитетен испад.

Во случај на *неергодичен канал* каналот не се менува доволно брзо за да ги помине сите состојби на каналот во текот на комуникацијата. Со други зборови, процесот е неергодичен доколку примероците помагаат да се претпостават вредностите кои се многу далеку во време од разгледуваниот примерок, т.е. кога случајниот процес е чувствителен на почетната состојба. Практични вакви ситуации се јавуваат кога каналот е со многу спор фединг и/или со постоење на силни долготрајни засенувања.

Концептот на средни вредности не е многу корисен за неергодичните канали. Од тие причини, неергодичниот канал не ја поддржува максималната брзина за пренос (1.5) со сигруност тикку за одредена брзина за пренесување  $R$  ќе го достигне прагот на капацитет  $C_{th}$  со веројатност  $P_{oc} = Pr(R \leq C_{th})$ , што се нарекува веројатност на капацитетен испад (види глава (1.8)). Во глава 6.1.4 се покажува дека за Рејлиев фединг веројатноста на капацитетен испад е:

$$P_{oc} = Pr(R \leq C_{th}) = 1 - e^{-\frac{2^{C_{th}-1}}{\bar{\gamma}}} \quad (1.8)$$

каде  $\bar{\gamma}$  е средниот однос сигнал-шум. Од изразот (1.8) следи дека веројатноста на капацитетен испад се намалува експоненцијално со порастот на средниот однос сигнал-шум.

Добивката во капацитет заради кооперација може да се илустрира со разгледување на кооперативното сценарио од слика 1.4 за едноставна постапка на кооперација: Двата корисника ги праќаат своите податоци кон дестинацијата, а со тоа и помеѓу себе. Доколку корисникот успее да ја декодира информацијата од партнерот, тој ја проследува кон дестинацијата, а доколку не успее да ја декодира информацијата од партнерот, тој продолжува со испраќање на сопствената информација. Согласно [11] добивките

во веројатноста на капацитетен испад се значителни. Добивката во веројатноста на капацитетен испад може лесно да се припише на фактот дека веројатноста на испад на директниот и кооперативниот релеен линк е многу помала од веројатноста на испад само на директниот линк. Покомплексните топологии и постапки за кооперација го следат сличниот тренд и коопрацијата генерално е во состојба да даде значителни подобрувања во веројатноста на испад.

### 1.3.3 Средна веројатност на грешка

Метрика која без сомнеж е најтешка за пресметка е средната битска веројатност на грешка (анг. BEP - Bit Error Probability). Од друга страна, оваа метрика најмногу кажува за природата на однесување на системот и најчесто се илустрира во трудовите кои ги анализираат перформансите на системот. Од тие причини, од примарен интерес е да се има метод за нејзина пресметка кој ќе го намали степенот на тежина.

Примарна причина за тежината на пресметка на средниот BEP лежи во фактот дека условната BEP во општи случај е нелинеарна функција до моменталниот однос сигнал-шум. Причината за нелинеарноста е функција од методите за модулација и детекција кои се употребуваат во системот.

Основниот израз за пресметка на BEP е:

$$P_b(E) \triangleq \int_0^{\infty} P_b(E|\gamma) \cdot p_{\gamma}(\gamma) d\gamma \quad (1.9)$$

каде  $P(E|\gamma)$  е условната BEP, а  $p_{\gamma}(\gamma)$  е функцијата на густина на веројатност (анг. PDF - Probability Density Function) на моменталниот однос сигнал-шум.

### 1.3.4 Компромис меѓу добивките во диверзитет и мултиплексирање

Компромисот помеѓу диверзитетот и мултиплексирањето е воведен во [12, ch.(9)]. Тој кажува колку бргу веројатноста на испад се намалува, односно брzinата за пренос се зголемува со зголемување на средниот однос сигнал-шум. Бидејќи концептот на испад не е применлив за ергодични канали, од аспект на Теоријата на информации, DMT е применлив само за не-ергодичните канали. Сепак подолу ќе биде покажано дека DMT е исто така применлива за реалните системи кои функционираат при постоење на спор или брз фединг, што му овозможува на системскиот инженер да направи компромис помеѓу доверливоста и брzinата на пренос.

Добивката во диверзитет е [13, eq.(5.2)]:

$$d = - \lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} \frac{\log P_{out}(C_{th}, \bar{\gamma})}{\log(\bar{\gamma})} \quad (1.10)$$

каде  $P_{out}(C_{th}, \bar{\gamma})$  е веројатноста на капацитетен испад дефиниранана со (1.8),  $\bar{\gamma}$  е средниот однос сигнал-шум,  $C_{th}$  е долната граница на потребната брзина за пренесување на податоци и  $d$  е добивката во диверзитет. Имајќи ја во предвид дефиницијата (1.10) добивката во диверзитет ја дефинира градиентот на функцијата за веројатност на капацитетен испад во зависност од  $\bar{\gamma}$  за големи вредности на односот сигнал-шум прикажана на логаритамска скала на двете оски. Доколку  $d = 0$  тогаш со прираст на  $\bar{\gamma}$  не се остварува намалување во веројатноста на испад, т.е. добивката што може да се добие од зголемување на  $\bar{\gamma}$  се користи на друго место (најверојатно за зголемување на брzinата на пренесување на податоци). Согласно [11] некооперативниот случај има диверзитет  $d = 1$  додека кооперативната постапка може да постигне двоен диверзитет

т.е.  $d = 2$ . Јасно е дека пострм градиент води кон поголема добивака со зголемување на односот сигнал-шум.

Согласно [13, eq.(5.18)] добивката од мултиплексирање (или бројот на степени на слобода) е:

$$r = \lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} \frac{R(\bar{\gamma})}{\log(\bar{\gamma})}. \quad (1.11)$$

За асимптотски висок  $\bar{\gamma}$ , степенот на мултиплексирање е еднаков на градиентот на зависноста на брзината на пренесување т.е. ергодичниот капацитет од средниот однос сигнал-шум. Ако  $r = 0$  тогаш со зголемување на  $\bar{\gamma}$  не се зголемува брзината на пренесување, т.е. добивката која потенцијално може да се добие од зголемување на  $\bar{\gamma}$  се користи на друго место (најверојатно за да се намали веројатноста на испад).

Ако брзината за пренесување ја изразиме преку добивката од мултиплексирање во (1.11) и ја замениме во (1.10) ќе се добие:

$$d = - \lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} \frac{\log P_{out}(r \cdot \log(\bar{\gamma}), \bar{\gamma})}{\log(\bar{\gamma})} \quad (1.12)$$

Од изразот (1.12) јасно е дека со зголемување добивката од мултиплексирање се намалува добивката од диверзитет т.е. се намалува сигурноста во достигнувањето на тие брзини.

На пример, за МИМО канал во Рейлиев фединг со достапни информации за каналот (анг. CSI - Channel State Information) во дестинацијата максималната добивка од мултиплексирање изнесува  $r \leq \min(N_T, N_R)$  каде  $r$  е рангот на каналната матрица  $H$ .

Слични аргументи можат да се користат за да се изведе DMT за реалните системи кои оперираат преку спор или брз фединг, каде за спор фединг,  $P_{out}$  во информациско-теоретска смисла треба да се замени со  $P_{out}$  на реалниот систем [2, ch.(1.5.3)], а за брз фединг со средната веројатност на грешка  $P_e$ .

На пример, средната битска веројатност за грешка за бинарна фазна модулација (анг. BPSK - Binary Phase Shift Keying) во рејлиев фединг е:

$$P_e = \frac{1}{2} \cdot \left( 1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma} + 1}} \right) \quad (1.13)$$

За голем однос сигнал-шум изразот (1.13) може да се апроксимира со:

$$P_{ea} = \frac{1}{4\bar{\gamma}}. \quad (1.14)$$

Ако се употреби изразот (1.10) ќе се добие дека за BPSK во рејлиев фединг се добива  $d = 1$ .

## 1.4 Карактеризација на фединг каналите

Простирањето на радио брановите во безжичниот канал е комплексен феномен карактеризиран со различни ефекти како на пример повеќепатното простирање и засенување. Прецизен математички опис на овој феномен е или непознат или премногу комплексен за решлива анализа на комуникацискиот систем. Сепак, значителни напори се посветени на статистичко моделирање на овие различни ефекти. Резултатот е множество на релативно едноставни и точни статистички модели за фединг канали кои зависат од конкретната околина на простирање и конкретното комуникациско сценарио.

### 1.4.1 Главни карактеристики на фединг каналите

**Флуктуација на анвелопата и фазата:** доколку за време на преносот сигналот е под влијание на фединг, неговата анвелопа и фаза флуктуира со тек на време. За кохерентните модулации, ефектот на федингот врз фазата може сериозно да ги деградира перформансите доколку не се превземат мерки за компензација на ефектот во дестинацијата. Најчесто, анализата на системите кои користат кохерентна модуација претпоставува дека флуктуацијата на фазата поради фединг идеално се корегира во дестинацијата што резултира во „идеална“ кохерентна демодулација. За некохерентната модулација, во дестинацијата не е потребна информацијата за фазата и затоа флуктуацијата на фазата поради фединг не влијае врз перформансите на системот. Оттука, за анализата на перформансите за кохерентните и некохерентните модулации преку канали кои се под влијание на фединг потребно е познавање само на статистиката на анвелопата на федингот. Освен тоа, за така-наречениот спор фединг, каде федингот е константен за време на симболниот интервал, случајниот процес на анвелопата на федингот може да се претстави со случајна променлива за време на тој симболен интервал.

**Спор и брз фединг:** Разликата помеѓу спор и брз фединг е важна за математичко моделирање на фединг каналите и за евалуација на перформансите на комуникацискиот систем кој функционира по овие канали. Оваа идеја е врзана со *кохерентното време*  $T_c$  на каналот, кој го мери временскиот период во кој фединг процесот е корелиран (или еквивалетно, временски интервал после кој корелационата функција на два примероци од одзивот на каналот земени при иста фреквенција но различни временски моменти падне под одреден праг). Кохерентното време е во инверзна-пропорционална врска со Доплеровото раширување  $f_d$ :

$$T_c \simeq \frac{1}{f_d} \quad (1.15)$$

За каналот се вели дека е спор доколку времетраењето на симболот  $T_s$  е помало од кохерентното време  $T_c$ , а во спротивно се смета дека е брз. Во спор фединг дадено слабеење на сигналот поради фединг ќе влијае на повеќе последователни симболи, што води кон моментален наплив на грешки, додека во брз фединг слабеењето се менува од симбол до симбол.

**Фреквентно-рамен и фреквентно-селективен фединг:** Фреквентната селективност е исто така важна карактеристика на фединг каналите. Доколку сите спектрални компоненти од предавателниот сигнал се под еднакво влијание, федингот се вели дека е фреквентно-неселективен или фреквентно-рамен. Ова е на пример случај за теснopoјасните системи, во кои опсегот на испратениот сигнал е многу помал од кохерентниот пропусен опсег  $f_c$ . Оваа метрика го мери фреквентниот опсег во кој фединг процесот е корелиран и е дефиниран како фреквентен опсег во кој корелационата функција на два примероци од импулсниот одзив на каналот земени во исто време но различни фреквенции падне под дадена вредност. Дополнително, кохерентниот опсег е во инверзна-пропорционална врска со максималното време на раширување  $\tau_{max}$ :

$$f_c \simeq \frac{1}{\tau_{max}} \quad (1.16)$$

Од друга страна, доколку фреквентните компоненти на предавателниот сигнал се афектирани од различни амплитудни и фазни флуктуации, федингот се вели дека е фреквентно-селективен. Ова се однесува на широкопојасните системи во кои пропусниот опсег на испратениот сигнал е поголем од кохерентниот опсег на каналот.

## 1.5 Моделирање на фединг каналите

Кога федингот влијае врз теснopoјасните системи, амплитудата на носителот на приемниот сигнал е модулирана од амплитудата на федингот  $\alpha$ , каде  $\alpha$  е случајна променлива со средна квадратна вредност  $\Omega = E[\alpha^2]$  и функција на густина на веројатност  $p_\alpha(\alpha)$ , што зависи од природата на средината за пропагација на радио сигналите. Откако сигналот ќе помине низ фединг каналот тој е под влијание на додавачки Гаусов шум (AWGN) при што се претпоставува дека тој е статистички независен од амплитудата на федингот  $\alpha$ , и е карактеризиран со едно-странична спектрална густина на моќност  $N_0[\text{W/Hz}]$ . Еквивалентно, приемната моментална моќност е модулирана со моќноста на федингот  $\alpha^2$ . На овој начин дефинираме моментален однос сигнал-шум по симбол:

$$\gamma = \alpha^2 \frac{E_s}{N_0}, \quad (1.17)$$

и среден однос сигнал-шум:

$$\bar{\gamma} = \Omega \cdot \frac{E_s}{N_0}, \quad (1.18)$$

каде  $E_s$  е енергијата на симболот. Перформансите на системите кои ќе бидат анализирани во оваа дисертација во општ случај ќе бидат функција од средниот однос сигнал-шум по симбол  $\bar{\gamma}$ . Исто така, во анализите и симулациите, без да се изгуби општоста, за средната квадратна вредност на моќноста на каналот ќе земаме  $\Omega = 1$ .

Функцијата на густината на веројатност во зависност од  $\gamma$  се добива со функционална трансформација на случајните променливи со користење на (1.17) и (1.18):

$$p_\gamma(\gamma) = \left. \frac{p_\alpha(\alpha)}{d\gamma/d\alpha} \right|_{\alpha=\sqrt{\frac{\gamma\cdot\Omega}{\bar{\gamma}}}} = \frac{p_\alpha\left(\sqrt{\frac{\gamma\cdot\Omega}{\bar{\gamma}}}\right)}{2 \cdot \sqrt{\frac{\gamma\cdot\bar{\gamma}}{\Omega}}} \quad (1.19)$$

Функцијата за генерирање на моменти (анг. MGF - Moment Generating Function) :

$$M_\gamma(s) = \int_0^\infty p_\gamma(\gamma) \cdot e^{s\cdot\gamma} d\gamma, \quad (1.20)$$

е уште една важна статистичка карактеристика на фединг каналите.

### 1.5.1 Повеќепатен фединг

Повеќепатниот фединг е резултат на конструктивна или деструктивна комбинација на случајно задоцнетите, рефлектираните, расејаните и дифрактирани компоненти на сигналот. Овој тип на фединг е релеативно брз и е причина за краткотрајните варијации на сигналот. Зависно од природата на пропагацијата средина за простирање на радио брановите, постојат различни модели кои го опишуваат статистичкото однесување на анвелопата на повеќепатниот фединг. Во оваа дисертација за опис на статистичкото однесување на анвелопата на федингот најчесто ќе се користи Рейлиевата распределба<sup>1</sup>. Оваа распределба многу често се користи за моделирање на повеќепатниот фединг во случај кога нема директна видливост (анг. LOS - Line-of-Sight). Во овој случај амплитудата на фединг каналот ( $\alpha$ ) е распределена согласно:

$$p_\alpha(\alpha) = \frac{2 \cdot \alpha}{\Omega} \cdot e^{-\frac{\alpha^2}{\Omega}}, \quad \alpha \geq 0 \quad (1.21)$$

<sup>1</sup>Освен во глава (5) каде ќе се коирстат и PDF-те на Рајс, Накагами и Веибул.

ако се следи (1.19), моменталниот SNR по симбол  $-\gamma$  е дистрибуиран согласно експоненцијалната PDF:

$$p(\gamma) = \frac{1}{\bar{\gamma}} \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right), \quad \gamma \geq 0 \quad (1.22)$$

Ако се замени (1.22) во (1.20) ќе се добие MGF-от за овој модел на фединг:

$$M_\gamma(s) = (1 - s \cdot \bar{\gamma})^{-1} \quad (1.23)$$

Рејлиевиот фединг покрај тоа што е погоден во случај кога нема директна видливост помеѓу изворот и дестинацијата погоден е и за пропагација на рефлектираните и прекршените патеки низ тропосверата, јоносферата, и брод-брод поморските радио линкови.

## 1.6 Краток преглед на докторската дисертација

Во глава 2 ќе биде спроведена анализа од информациско-теоретски аспект на придобивките од користење на кооперативните релејни комуникации. Имено ќе биде анализирана комуникација преку општи мрежи со повеќе делници [14]. Ќе биде анализиран релеен канал (анг. RC - Relay Channel) со три јазли, кој е модел за точка-точка комуникацијата со помош на реле. Капацитетот на релејниот канал во генерален аспект не е познат и затоа ќе ја анализираме горната граница на капацитетот т.н. горна пресечна граница (анг. CUB - Cutset Upper Bound) ((2.12)) како и границите на капацитетот за основните релејни постапки (DF, AF, CF). Освен тоа, ќе бидат анализирани изразите за границите на овие релејни постапки за дуплесен RC и полудуплесен RC со фреквентна распределба во изворот и дестинацијата. Посебено внимание ќе се посвети на анализата на границите на капацитетот на овие на сите разгледувани релејни постапки во случај на Гаусов релеен канал.

Во глава 3 ќе ја анализираме веројатноста на грешка и веројатноста за испад за релеен канал со две делници со повеќе влезови и повеќе излези кој користи Аламути кодирање [17] и варијанта на засили-и-проследи постапка наречена раздвои-и-проследи (анг. DCF - Decouple-and-Forward) во рамен Рејлиев фединг [20]. Веројатноста на грешка на МИМО релејниот канал со две делници со променливо засилување (VG) ќе биде спореден со веројатноста на грешка на релејниот канал со две делници и една антена во јазлите и веројатноста на грешка на МИМО релејните канали со две делници кои користата DF постапка во релето. Ќе биде покажано дека DCF МИМО релејните канали постигнуваат значително подобри перформанси на грешка во споредба со системите со една антена и споредливи перформанси со DF МИМО системите. За овие системи веројатност на испад (OP) се споредува со OP на системите со две делници и една антена и точка-точка системите со две антени. Се покажува значително подобрување на OP перформансите во споредба со перформансите на системите со две делници и една антена и споредливи перформанси со точка-точка системите.

Во глава 4 ќе прикажеме многу точни апроксимации за веројатноста на грешка за односи сигнал-шум кои се од практичен интерес за засили-и-проследи (AF) релеен канал со информации за статусот на каналот во релето и дестинацијата, кои користат повеќе антени во јазлите и ортогонално просторно-временско блоковско кодирање (анг. OSTBC - Orthogonal Space-Time Block Coding) кодирање преку рамен фединг. Дополнително за големи вредности на односот сигнал-шум ќе ја упростиме прецизната апроксимација во едноставна асимптотска апроксимација. Двете апроксимации ќе ги споредиме со точните вредности добени со нумеричка интеграција и со резултатите добиени со Монте Карло

симулации. Во продолжението на главата ќе презентираме груба апроксимација на веројатноста за грешка за претходно анализираниот систем. Грубата апроксимација на веројатноста за грешка ќе ја споредиме со претходно добиените точните вредности со Монте Карло симулации, нумеричка интеграција на соодветните MGF-и и резултатите добиени со прецизната апроксимација.

Освен тоа во оваа глава ќе презентираме прецизна и груба апроксимација на веројатноста за испад (OP) за целиот однос сигнал-шум кој е од практичен интерес за AF релејните канали со информации за каналот достапни во релето и дестинацијата, кои користат повеќе антени во јазлите и OSTBC пренос преку рамен Рејлиев фединг. Резултатите за веројатноста на испад добиени со овие апроксимации ќе бидат споредени со точните резултати за веројатноста на испад добиени со нумеричка инверзија на лапласовата трансформација на функцијата за генерирање на моменти и со резултатите добиени со Монте Карло симулации.

Во продолжение на главата 4 ќе ги анализираме перформансите на МИМО релејните канали со директна патека до дестинацијата. За упростување на математичката анализа ќе ги упростиме претходно изведените апроксимативни изрази за PDF и CDF за засили-и-проследи МИМО релеен канал без директна патека на начин идентичен со пристапот на добивање на грубите ВЕР и OP апроксимации. Со употреба на така добиениот едноставен израз за PDF на МИМО релејниот канал без директна патека ќе бидат изведени апроксимативните изрази во затворена форма за веројатноста за испад на AF релејните МИМО системи кај кои постои директна патека до дестинацијата. Резултатите добиени од овие апроксимации ќе се споредат со резултатите добиени за системите за кои не постои директна патека од изворот до дестинацијата.

Во глава 5 ќе ги анализираме крај-крај перформансите за испад на релеен канал со повеќе делници кој користи засили-и-проследи (AF) релејна постапка во Рејлиев, Накагами, Рајсов и Веибул фединг. Ќе бидат споредени веројатностите на испад за фиксно (FG) и променливо засилување (VG). Веројатноста на испад за повеќеделничните системи во услови на Рејлиев, Накагами и Веибул фединг може да се одреди само со комбинирање на аналитичките резултати со нумерички методи за интеграција. Ќе покажеме дека системите со фиксно засилување покажуваат подоби OP перформанси во споредба со системите со променливо засилување за сите фединг околини за односи сигнал-шум кои се од практичен интерес. Ќе покажеме дека разликата во перформанси се зголемува со бројот на делници.

Во глава 6 ќе го анализираме и споредиме капацитетот за точка-точка и релејните МИМО канали. Особено внимани ќе се посвети на ваквите системи во случај на користење на OSTBC кодирање. Ќе бидат анализирани перформансите на капацитетот на овие системи од аспект на анализа на ергодичниот капацитет и веројатноста на капацитетен испад. Ќе покажеме дека ергодичниот капацитет на МИМО релејниот канал се приближува до ергодичниот капацитет на точка-точка МИМО каналот со зголемување на бројот на антени. Исто така ќе покажеме дека МИМО релејниот канал има полоши перформанси на капацитетен испад во споредба на точка-точка системите при што разликата во перформанси се зголемува со зголемување на односот сигнал-шум. На крај ќе биде анализиран ергодичниот капацитет и веројатноста на капацитетен испад за релејните МИМО канали со директна патека до дестинацијата и ќе бидат споредени нивните перформанси со перформансите на релејните МИМО канали без директна патека. Во глава 7 ќе биде изложен заклучокот на тезата.

## 2 Капацитет на кооперативните релејни канали

Во оваа главата ќе биде дадена информациско теоретска анализа на комуникациите преку општи мрежи со повеќе делници [14]. Во таа насока ќе биде анализиран релејниот канал со три јазли, кој е модел за точка-точка комуникацијата со помош на реле, како на пример комуникација помеѓу две базни станици преку терестријален и сателитски линк, или помеѓу два јазли во меш мрежа со среден јазол кој се однесува како реле. Капацитетот на релејниот канал во генерален аспект не е познат. Затоа ќе ја анализираме горната граница на капацитетот т.н. горна пресечна граница (CUB) (2.12). Исто така ќе дискутираме неколку кодирачки шеми кои се оптимални во некои одредени случаи. Прво ќе ги дискутираме следниве две екстремни методи:

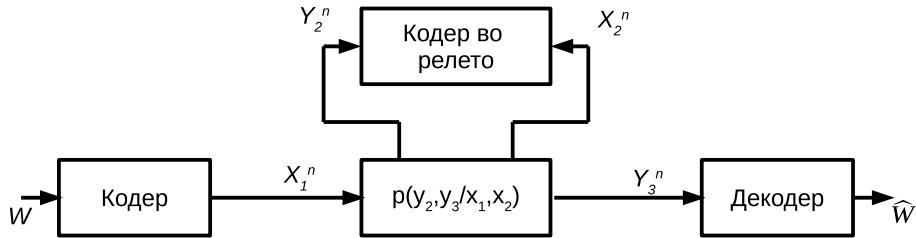
- *Метод на директен пренос* (анг. DT - Direct Transmission) : Во оваа едноставна шема, релето не се користи активно во комуникацијата.
- *Декодирај-и-проследи* (DF): Во оваа метода со повеќе делници, релето игра централна улога во комуникацијата. Тоа ги декодира пораките и кохерентно соработува со изворот за да истите ги комуницира со дестинацијата. Оваа метода вклучува техника на блоковско Марково кодирање [25], декодирање наназад [26] и употреба на складирање по кошнички (анг. RB - Random Binning) во каналното кодирање [28]. Ќе видиме дека директниот пренос може да постигне поголем капацитет од декодирај-и-проследи кога каналот од изворот до релето е полош од каналот од релето до дестинацијата.
- *Компримирај-и-проследи* (CF): Во овој метод, релето не се обидува да ја реконструира пораката. Наместо тоа, релето користи Wyner-Ziv кодирање [27] при што примената низа на информациони бити се однесува како странична информација, и се препраќа индексот на кошничката. Дестинацијата потоа го декодира индексот на кошничката, и ја бара соодветната реконструкција на примената низа од информациони бити во релето и заедно со помош на сопствената приемна низа ја реконструира пораката. Компримирај-и-проследи методот се покажува дека е оптимален за класа на детерминистички релејни канали и за примерот на RC кој користи сума со модул 2 (види глава 8.2) чиј капацитет се покажува дека е секогаш помал од горната пресечна граница (CUB).

Мотивирани од безжичните мрежи, ќе ги анализираме следниве два модели на Гаусови релејни канали.

- *Дуплексен Гаусов релеен канал*: Капацитетот за овој модел не е познат за произволно множество на ненулти вредности на каналните параметри. За овој тип на релеен канал ќе биде споредена горната граница на множеството на пресеци со долната граница за декодирај-и-проследи и компримирај-и-проследи методите.
- *Полудуплексен Гаусов канал со фреквентна распределба во приемникот па дестинацијата*: За овој тип на релеен канал ќе биде покажано дека границата на капацитетот на декодирај-и-проследи е идентична со CUB за одредени вредности на параметрите на каналот. Потоа ќе биде презентирана засили-и-проследи методата за кодирање во која релето испраќа сразмерна верзија од сигналот што претходно го примил. Потоа, засили-и-проследи методата ќе биде генерализирана со линеарни релејни функции кои се тежински суми од претходно примените сигнали и ќе биде воспоставена еднозначна карактеризација на капацитетот на ваквиот канал.

## 2.1 Горна пресечна граница на капацитетот

Релејниот канал всушност претставува комуникациски систем со три јазли [29] кој е претставен на слика 2.1. Изворот (јазол 1) сака да ја комуницира пораката  $W$  со дестинацијата (јазол 3) со помош на релето (јазол 2). Во оваа глава ќе разгледуваме дискретен релеен канал без мемеорија (анг. DMRC - Discrete Memoryless Relay Channel) кој се означува со изразот:  $(X_1 \times X_2, p(y_2, y_3|x_1, x_2), Y_2 \times Y_3)$  и кој се состои од четири конечни множества  $X_1, X_2, Y_2, Y_3$ , и условните веројатности  $p(y_2, y_3|x_1, x_2)$  на множеството  $Y_2 \times Y_3$  една за секој  $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ , каде  $x_1$  е сигналот на излез од изворот,  $y_2$  сигнал на влезот на релето,  $y_3$  сигнал на влез од дестинацијата, и  $x_2$  предавателен сигнал на релето (чиј симболи е дозволено да зависат од поранешните симболи на  $y_2$ ). Зависноста на примените симболи од влезните симболи е описана со условната веројатност  $p(y_3, y_2|x_1, x_2)$ . Индексирањето во продолжението на глава 2 ќе биде согласно следната наотација:  $A_{bc}^d$ , каде  $A$  ја означува случајната променлива или процес,  $b$  го означува јазолот на кој се однесува таа случајна променлива (на пример ако  $b = 2$  тогаш се работи за релето, а ако  $b = 3$  тогаш се работи за дестинацијата),  $c$  го означува моменталниот временски индекс од случајниот процес [9, ch.(4.1)], и  $d$  го означува крајниот временски индекс од случајниот процес. Случајните променливи кои ги претставуваат реконструираните сигнали во релето ќе ги означуваме со „ $\sim$ “, а реконструираните сигнали во дестинацијата ќе ги означуваме со „ $\hat{w}$ “.



Слика 2.1: Точка-точка комуникациски систем со реле

Кодот  $(2^{nR}, n)$  за DMRC се состои од:

- множество на пораки  $[1 : 2^{nR}]$ ,
- кодер кој го доделува кодниот збор  $x_1^n(w)$  на секоја порака  $w \in [1 : 2^{nR}]$ ,
- кодер во релето кој го доделува симболот  $x_2^i(y_2^{i-1})$  на секоја претходно примена низа  $y_2^{i-1} \in Y_2^{i-1}$  за секој временски интевал  $i \in [1 : n]$ , и
- декодер кој ја доделува естимацијата  $\hat{w}$  или грешката  $e$  на секоја од примените низи  $y_3^n \in Y_3^n$ .

Каналот е без меморија во смисол дека моментално примените симболи  $(Y_2^i, Y_3^i)$  и пораките и поранешните симболи  $(w, X_1^{i-1}, X_2^{i-1}, Y_2^{i-1}, Y_3^{i-1})$  се условно независни ако се дадени моментално испратените симболи  $(X_1^i, X_2^i)$ .

Претпоставуваме дека пораките  $W$  се униформно распределени.

За да се одговори на ова прашање ќе се користи следниов модел на каналот.

$(M, n)$  кодот во релето се состои од множество на индекси кои треба да се пренесат:

$$W = \{1, 2, \dots, M\} \triangleq [1, M] \quad (2.1)$$

од енкодирачка функција

$$x_1 : W \rightarrow X_1^n, \quad (2.2)$$

множество од релејни функции  $\{f_i\}_{i=1}^n$ :

$$x_{2i} = f_i(Y_{21}, Y_{22}, \dots, Y_{2, i-1}), \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.3)$$

и функција за декодирање:

$$g : Y_3^n \rightarrow W. \quad (2.4)$$

Предавтелниот сигнал во релето  $x_{2i}$  е дозволено да зависи од изминатите  $(i-1)$  влезни сигнали во релето  $y_2^{i-1} = (y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2i-1})$ . Каналот е без меморија во смисла дека  $(y_{3i}, y_{2i})$  зависат само од изминатите  $(x_1^{i-1}, x_2^{i-1})$  само преку моментално испратените симболи  $(x_{1i}, x_{2i})$ . На тој начин за било кој избор на  $p(w)$ ,  $w \in M$ , и избор на код  $x_1 : W \rightarrow X_1^n$  и релејни функции  $\{f_i\}_{i=1}^n$ , здружената функција на распределба на веројатноста (PMF) на множеството  $W \times X_1^n \times X_2^n \times Y_1^n$  е дадена со:

$$p(w, x_1, x_2, y_3, y_2) = p(w) \prod_{i=1}^n p(x_{1i}|w) p(x_{2i}|y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2i-1}) \cdot p(y_{3i}, y_{2i}|x_{1i}, x_{2i}) \quad (2.5)$$

На пример за  $n = 2$  здружената PMF дадена со (2.5) се сведува на:

$$\begin{aligned} p(w, x_1, x_2, y_3, y_2) &= p(w) \prod_{i=1}^2 p(x_{1i}|w) p(x_{2i}|y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2i-1}) \cdot p(y_{3i}, y_{2i}|x_{1i}, x_{2i}) = \\ &= p(w) \cdot p(x_{11}|w) p(x_{21}) \cdot p(y_{31}, y_{21}|x_{11}, x_{21}) p(x_{12}|w) p(x_{22}|y_{21}) \cdot p(y_{32}, y_{22}|x_{12}, x_{22}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Од изразот (2.6) може да се заклучи дека  $X_1$  зависи од  $W$ ,  $X_2$  зависи од  $Y_2$ , а  $(Y_3, Y_2)$  зависат од  $(X_1, X_2)$ .

Доколку е испратена пораката  $w \in W$ , условната веројатност на грешка е:

$$\lambda(w) = Pr\{g(Y_3) \neq w\} \quad (2.7)$$

а средната веројатност на грешка:

$$P_e^{(n)} = P(\hat{W} \neq W) = \frac{1}{M} \sum_w \lambda(w) \quad (2.8)$$

односно веројатноста за грешка се пресметува за специјален случај за униформна распределба на влезните симболи  $w \in [1, M]$ .

Максималната веројатност на грешка за  $(M, n)$  кодот е:

$$\lambda_n = \max_{w \in W} \{\lambda(w)\} \quad (2.9)$$

Брзината на пренесување на пораките на  $(M, n)$  кодот е:

$$R = \frac{1}{n} \cdot \log(M) \quad (2.10)$$

Брзината на пренесување  $R$  се вели дека е *достиглива* за DMRC доколку постои низа  $(2^{nR}, n)$  на кодови така што  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_e^{(n)} = 0$ . Капацитетот  $C$  на DMRC е максимум од сите достигливи брзини на пренесување. Тој не е познат во затворена форма и затоа ќе ги дискутираме горните и долните граници на капацитетот кои се многу точни за одредени класи на релејни канали.

Многу често се разгледува тип на DMRC каде кои приемниот сигнал во релето  $y_2$  е подобар од сигналот во дестинацијата  $y_3$  кои се нарекуваат деградирани релејни канали. Релејниот канал  $(X_1 \times X_2, p(y_3, y_2|x_1, x_2), Y_2 \times Y_1)$  се нарекува *деградиран* доколку  $p(y_3, y_2|x_1, x_2)$  може да се напише во следнава форма.

$$p(y_3, y_2|x_1, x_2) = p(y_2|x_1, x_2) \cdot p(y_3|y_2, x_2) \quad (2.11)$$

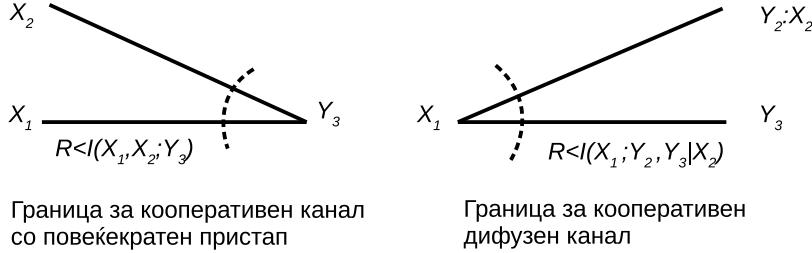
Од изразот (2.11) следи дека релејниот канал е деградиран доколку  $p(y_3|x_1, x_2, y_2) = p(y_3|x_2, y_2)$  т.е.,  $X_1 \rightarrow (X_2, Y_2) \rightarrow Y_3$  формираат Марков ланец [9, eq.(2.117)].

Во најопшт случај горната граница на капацитетот  $C$  за DMRC е дадена со следнава теорема [14, thm.(16.1)].

**Теорема 2.1.** Горна пресечна граница за DMRC

$$C \leq \max_{p(x_1 x_2)} \min \{I(X_1, X_2; Y_3), I(X_1; Y_2, Y_3 | X_2)\} \quad (2.12)$$

Оваа граница се нарекува горна пресечна граница затоа што членовите во минимумот можат да се интерпретираат како кооперативна комбинација на повеќе-пристапен канал [9, ch.(15.3)] и дифузен канал [9, ch.(15.6)] што е илустрирано во слика 2.2.



**Слика 2.2:** Интерпретација на горната пресечна граница со минимален пресек - максимален проток

CUB е многу прецизна за многу класи на DMRC со познат капацитет. Сепак таа не е толку прецизна во општ случај како што ќе биде покажано во глава 2.3. CUB е всушност генерализација на добро познатата теорема за максимален тек и минимален пресек [31] во рамките на теоријата на информациите.

#### Доказ на теорема 2.1:

Ако е даден произволен  $(M, n)$  код за релејниот канал, функцијата на распределба на веројатност на здружениот ансамбл  $W, X_1, X_2, Y_3, Y_2$  е дадена со:

$$p(w, x_1, x_2, y_3, y_2) = \underbrace{\frac{1}{M}}_{p(w)} \cdot p(x_1|w) \cdot \prod_{i=1}^n p(x_{2i}|y_{21}, \dots, y_{2i-1}) \cdot p(y_{3i}, y_{2i}|x_{1i}, x_{2i}) \quad (2.13)$$

Да ја разгледуваме еднаквоста:

$$n \cdot R = H(W) = I(W; Y_3) + H(W|Y_3) \quad (2.14)$$

Од нееднаквоста на Фано [9, eq.(2.130)]:

$$H(W|Y_3) \leq 1 + P_e^{(n)} \cdot nR \triangleq n \cdot \delta_n \quad (2.15)$$

каде  $\delta_n \rightarrow 0$  како  $n \rightarrow \infty$ . На тој начин:

$$n \cdot R \leq I(W; Y_3) + n \cdot \delta_n \quad (2.16)$$

Сега ќе ја побараме горната граница на  $I(W; Y_3)$  [29, th.(10.1)].

Од нееднаквоста на Фано [9, eq.(2.130)] следи:

$$n \cdot R = H(W) = I(W; Y_3^n) + H(W|Y_3^n) \leq I(W; Y_3^n) + n\epsilon_n \quad (2.17)$$

каде  $\epsilon_n \rightarrow 0$  ако  $n \rightarrow 0$ . Понатаму следи:

$$I(W; Y_3^n) \leq \min \left\{ \sum_{i=1}^n I(X_{1i}, X_{2i}; Y_{3i}), \sum_{i=1}^n I(X_{1i}; Y_{2i}, Y_{3i} | X_{2i}) \right\} \quad (2.18)$$

- Првиот член од минимумот се добива од:

$$\begin{aligned} I(W; Y_3^n) &= \sum_{i=1}^n I(W; Y_{3i}|Y_3^{i-1}) \stackrel{(a)}{\leq} \sum_{i=1}^n I(W, Y_3^{i-1}; Y_{3i}) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n I(X_{1i}, X_{2i}, W, Y_3^{i-1}; Y_{3i}) \stackrel{(b)}{=} \sum_{i=1}^n I(X_{1i}, X_{2i}; Y_{3i}) \end{aligned} \quad (2.19)$$

(a) - следи од следниве изрази:

$$I(W; Y_{3i}|Y_3^{i-1}) \leq I(W, Y_3^{i-1}; Y_{3i}) = I(Y_3^{i-1}; Y_{3i}) + I(W; Y_{3i}|Y_3^{i-1}) \leq I(X_{1i}X_{2i}W, Y_3^{i-1}; Y_{3i})$$

$$I(X_{1i}X_{2i}W, Y_3^{i-1}; Y_{3i}) = H(Y_{3i}) - H(Y_{3i}|X_{1i}X_{2i}W, Y_3^{i-1}) \stackrel{(c)}{\geq} I(W, Y_3^{i-1}; Y_{3i}) \quad (2.20)$$

(b) - следи од следниве изрази:

$$\begin{aligned} I(X_{1i}X_{2i}W, Y_3^{i-1}; Y_{3i}) &= H(Y_{3i}) - H(Y_{3i}|X_{1i}X_{2i}W, Y_3^{i-1}) \stackrel{(d)}{=} \\ &= H(Y_{3i}) - H(Y_{3i}|X_{1i}X_{2i}) = I(X_{1i}X_{2i}; Y_{3i}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

(c) - следи од фактот дека условеноста ја намалува ентропијата [9, eq.(2.95)]

(d) - следи од претпоставката дека се работи за канал без меморија односно  $W, Y_3^{i-1} \rightarrow X_{1i}X_{2i} \rightarrow Y_{3i}$  формираат марков ланец [9, eq.(2.117)].

- Вториот член од минимумот во (2.18) е:

$$\begin{aligned} I(W; Y_3^n) &\leq I(W; Y_3^n Y_2^n) = \sum_{i=1}^n I(W; Y_{2i}Y_{3i}|Y_2^{i-1}Y_3^{i-1}) \stackrel{(a)}{=} \sum_{i=1}^n I(W; Y_{2i}Y_{3i}|Y_2^{i-1}Y_3^{i-1}X_{2i}) \leq \\ &\stackrel{(b)}{\leq} \sum_{i=1}^n I(X_{1i}, W, Y_2^{i-1}Y_3^{i-1}; Y_{2i}Y_{3i}|X_{2i}) \stackrel{(c)}{=} \sum_{i=1}^n I(X_{1i}; Y_{2i}Y_{1i}|X_{2i}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Каде:

(a) следи од изборот на релејната функција 2.3 согласно која  $X_{2i}$  е функција од  $Y_2^{i-1}$   
(b)

$$I(W; Y_{2i}Y_{3i}|Y_2^{i-1}Y_3^{i-1}X_{2i}) + I(Y_2^{i-1}Y_3^{i-1}; Y_{2i}Y_{3i}|X_{2i}) = I(Y_2^{i-1}Y_3^{i-1}, W; Y_{2i}Y_{3i}|X_{2i}) \quad (2.23)$$

Од (2.23) се добива дека:

$$I(Y_2^{i-1}Y_3^{i-1}, W; Y_{2i}Y_{3i}|X_{2i}) \geq I(W; Y_{2i}Y_{3i}|Y_2^{i-1}Y_3^{i-1}X_{2i}) \quad (2.24)$$

$$I(X_{1i}Y_2^{i-1}Y_3^{i-1}, W; Y_{2i}Y_{3i}|X_{2i}) = I(Y_2^{i-1}Y_3^{i-1}, W; Y_{2i}Y_{3i}|X_{2i}) + I(X_{1i}; Y_{2i}Y_{3i}|W, X_{2i}Y_2^{i-1}Y_3^{i-1}) \quad (2.25)$$

Со замена на (2.24) во (2.25) се добива:

$$I(X_{1i}Y_2^{i-1}Y_3^{i-1}, W; Y_{2i}Y_{3i}|X_{2i}) \geq I(Y_2^{i-1}Y_3^{i-1}, W; Y_{2i}Y_{3i}|X_{2i}) \geq I(W; Y_{2i}Y_{3i}|Y_2^{i-1}Y_3^{i-1}X_{2i}) \quad (2.26)$$

(c)

$$\begin{aligned} I(X_{1i}, W, Y_2^{i-1}Y_3^{i-1}; Y_{2i}Y_{3i}|X_{2i}) &= H(Y_{2i}Y_{3i}|X_{2i}) - H(Y_{2i}Y_{3i}|X_{2i}X_{1i}, W, Y_2^{i-1}Y_3^{i-1}) = \\ &= H(Y_{2i}Y_{3i}|X_{2i}) - H(Y_{2i}Y_{3i}|X_{2i}X_{1i}) = I(X_{1i}; Y_{2i}Y_{1i}|X_{2i}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ако се дефинира помошна променлива  $Z \sim \text{Unif}[1 : n]$  која е независна од  $(X_1^n, X_2^n, Y_2^n, Y_3^n)$  која зема вредности во множеството  $\{1, \dots, n\}$  со веројатност:

$$P(Z = i) = \frac{1}{n} \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.28)$$

и доколку се земе:

$$X_1 \triangleq X_{1Z}, \quad X_2 \triangleq X_{2Z}, \quad Y_3 \triangleq Y_{3Z} \quad Y_2 \triangleq Y_{2Z} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_{1i}, X_{2i}; Y_{3i}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_{1Z}, X_{2Z}; Y_Z | Z = i) = I(X_1, X_2; Y_3 | Z) = \\ &= H(Y_3 | Z) - H(Y_3 | Z, X_1, X_2) \stackrel{(a)}{\leq} H(Y_3) - H(Y_3 | Z, X_1, X_2) \stackrel{(b)}{=} \\ &= H(Y_3) - H(Y_3 | X_1, X_2) = I(X_1, X_2; Y_3) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Каде (a) следи од правилото дека условувањето ја намалува ентопија, а еднаквоста (b) следи од Марковиот ланец  $Z \rightarrow (X_1 X_2) \rightarrow (Y_3, Y_2)$  кој е последица на каналот и кодот. На сличен начин се добива:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_{1i}; Y_{3i}, Y_{2i} | X_{2i}) = I(X_1; Y_3, Y_2 | X_2, Z) \leq I(X_1; Y_3, Y_2 | X_2) \quad (2.31)$$

Доколку изразите (2.30) и (2.31) се заменат соодветно во (2.19) и (2.22) се добива

$$I(W; Y_3^n) \leq \sum_{i=1}^n I(X_{1i} X_{2i}; Y_{3i}) = n I(X_1 X_2; Y_3 | Z) \leq n I(X_1 X_2; Y_3) \quad (2.32)$$

$$I(W; Y_3^n) \leq \sum_{i=1}^n I(X_{1i}; Y_{2i} Y_{1i} | X_{2i}) = n I(X_1; Y_2 Y_1 | X_2 Z) \leq n I(X_1; Y_2 Y_1 | X_2) \quad (2.33)$$

Доколку (2.32) и (2.33) се заменат во (2.18) и (2.17) се добива:

$$R \leq \min \{I(X_1 X_2; Y_3), I(X_1; Y_2 Y_1 | X_2)\} \quad (2.34)$$

со што се докажува теоремата 2.1.

## 2.2 Декодирај-и-проследи релеен канал

Една едноставна метода за кодирање во релејниот канал е *директен пренос*. Во оваа метода се фиксира преносот од релето на најповолниот симбол за каналот од изворот кон дестинацијата така што се добие најдобар капацитет на каналот од изворот до дестинацијата и да се комуницира пораката директно со користење на оптимално точка-точка канално кодирање. Капацитетот на релејниот канал ќе биде ограничен од долната страна со капацитетот на деградираниот DMRC т.е.

$$C_{DT} \geq \max_{x_2 \in X} \max_{p(x_1)} I(X_1; Y_3 | x_2) \quad (2.35)$$

Во другата екстрема од директниот пренос, методата декодирај-и-проследи (DF) силно се потпира на релето за да ја помогне комуникацијата на пораката меѓу изворот и дестинацијата. Оваа метода ќе ја анализираме во три чекори.

Во првите два чекори, ќе користиме каскаден релеен канал во кој дестинацијата го смета сигналот од изворот како шум. Методата декодирај-и-проследи оди чекор понапред во споредба со каскадниот релеен канал со тоа што дестинацијата дополнително ги декодира информациите испратени директно од изворот.

## 2.2.1 Каскаден релеен канал

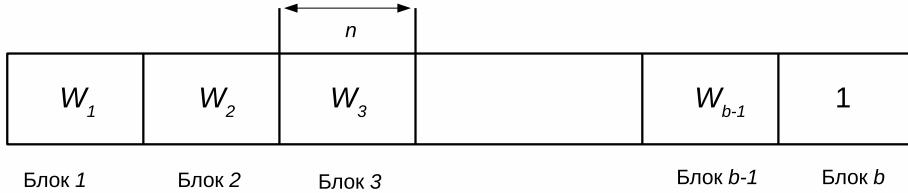
Во каскадниот релеен канал, релето ја реконструира пораката примена од изворот во секој блок и ја препраќа во наредниот блок. На тој начин се добива долната граница на капацитетот на DMRC:

$$C \geq \max_{p(x_1)p(x_2)} \min \{I(X_2; Y_3), I(X_1; Y_2|X_2)\} \quad (2.36)$$

Не е тешко да се покаже дека оваа долната граница е достиглива кога DMRC се состои од каскада од два дискретни канали без меморија (DMC-Discrete Memoryless Channel), т.е.  $p(y_2, y_3|x_1, x_2) = p(y_2|x_1)p(y_3|x_2)$ . Во овој случај изразот за капацитет се сведува на:

$$\begin{aligned} C &= \max_{p(x_1)p(x_2)} \min \{I(X_2; Y_3), I(X_1; Y_2|X_2)\} = \\ &= \max_{p(x_1)p(x_2)} \min \{I(X_2; Y_3), I(X_1; Y_2)\} = \min \left\{ \max_{p(x_2)} \{I(X_2; Y_3)\}, \max_{p(x_1)} \{I(X_1; Y_2)\} \right\} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Доказот на достигливоста на долната граница за каскадниот релеен канал користи  $b$  преносни блокови, секој се состои од  $n$  испраќања, како што е илустрирано на слика 2.3. Низа од  $(b - 1)$  пораки  $W_j$ ,  $j \in [1 : b - 1]$ , при што секоја се избира независно и рамномерно од множеството  $[1 : 2^{nR}]$ , се испраќа преку  $b$  блокови. Без да се изгуби општоста, претпоставуваме дека  $w_b = 1$ . Треба да се забележи дека средната брзина на пренос во  $b$  блокови е  $R \cdot (b - 1)/b$ , што може да се приближи по потреба до  $R$  со соодветен избор на  $b$ .



**Слика 2.3:** Множество на пренесувани блокови кое се користи во каскадниот релеен канал

**Генерирање на кодната книга:** Се фиксира производот на функциите на распределба на веројатноста  $p(x_1) \cdot p(x_2)$  кој ја достигнуваат долната граница на каскадниот релеен канал дадена со (2.36). Случајно и независно се генерира кодна книга за секој блок. За секое  $j \in [1 : b]$ , случајно и независно се генерираат  $2^{nR}$  низи  $x_1^n(w_j)$ ,  $w_j \in [1 : 2^{nR}]$ , во согласност со веројатноста:  $\prod_{i=1}^n p_{X_1}(x_{1i})$ . На сличен начин, се генерираат  $2^{nR}$  низи  $x_2^n(w_{j-1})$ ,  $w_{j-1} \in [1 : 2^{nR}]$ , секоја во согласност со  $\prod_{i=1}^n p_{X_2}(x_{2i})$ . Со ова се дефинира кодната книга:

$$C_j = \{(x_1^n(w_j), x_2^n(w_{j-1})) : w_{j-1}, w_j \in [1 : 2^{nR}]\}, \quad j \in [1 : b]. \quad (2.38)$$

Кодните книги се откриваат на сите јазли (извор, дестинација и реле).

**Кодирање:** Да земемеме дека  $w_j \in [1 : 2^{nR}]$  е новата порака што треба да се испрати во блокот  $j$ . кодерот во изворот ја испраќа низата  $x_1^n(w_j)$  од кодната книга  $C_j$ .

**Кодирање во релето:** По конвенција претпоставуваме  $\tilde{w}_0 = 1$ . На крај од блокот  $j$ , релето ја наоѓа уникатната порака  $\tilde{w}_j$  така што  $(x_1^n(\tilde{w}_j), x_2^n(\tilde{w}_{j-1}), y_2^n(j)) \in A_\epsilon^{(n)}$ . Во блокот  $j + 1$ , тој ја испраќа низата  $x_2^n(\tilde{w}_j)$  од кодната книга  $C_{j+1}$ .

Бидејќи кодниот збор испратен во релето статистички зависи од пораката испратена во претходниот блок, овој начин на кодирање се нарекува блоковско Марково кодирање - BMC (англ. BMC - Block Markov Coding).

блок	1	2	3	4	...	$j$	...	$b$
$X_1$	$x_1(w_1)$	$x_1(w_2)$	$x_1(w_3)$	$x_1(w_4)$	...	$x_1(w_j)$	...	1
$Y_2$	$\tilde{w}_1$	$\tilde{w}_2$	$\tilde{w}_3$	$\tilde{w}_4$	...	$\tilde{w}_j$	...	0
$X_2$	$x_2^n(1)$	$x_2(\tilde{w}_1)$	$x_2(\tilde{w}_2)$	$x_2(\tilde{w}_3)$	...	$x_2(\tilde{w}_{j-1})$	...	$x_2(\tilde{w}_{b-1})$
$Y_3$	0	$\hat{w}_1$	$\hat{w}_2$	$\hat{w}_3$	...	$\hat{w}_{j-1}$	...	$\hat{w}_{b-1}$

Табела 2.1: Кодирање во каскаден релеен канал

**Декодирање:** На крајот од блокот  $j + 1$ , дестинацијата бара уникатна порака  $\hat{w}_j$  така што  $(x_2^n(\hat{w}_j), y_3^n(j+1)) \in A_\epsilon^{(n)}$ .

**Анализа на веројатноста за грешка:** Ќе ја анализираме веројатноста за грешка при декодирање за пораката  $W_j$  усредната по кодните книги. Без да се изгуби општоста претпоставуваме дека  $W_j = 1$ . Да претпоставиме дека  $\tilde{W}_j$  е естимацијата на пораката во релето на крај од блокот  $j$ . Бидејќи:

$$\{\hat{W}_j \neq 1\} \subseteq \{\tilde{W}_j \neq 1\} \cup \{\hat{W}_j \neq \tilde{W}_j\} \quad (2.39)$$

декодерот ќе направи грешка само доколку еден или повеќе од следниве настани се случат:

$$\tilde{E}_1(j) = \left\{ \left( X_1^n(1), X_2^n(\tilde{W}_{j-1}), Y_2^n(j) \right) \notin A_\epsilon^{(n)} \right\} \quad (2.40)$$

$$\tilde{E}_2(j) = \left\{ \left( X_1^n(w_j), X_2^n(\tilde{W}_{j-1}), Y_2^n(j) \right) \in A_\epsilon^{(n)} \text{ за некое } w_j \neq 1 \right\} \quad (2.41)$$

$$E_1(j) = \left\{ X_2^n(\tilde{W}_j), Y_3^n(j+1) \neq A_\epsilon^{(n)} \right\} \quad (2.42)$$

$$E_2(j) = \left\{ (X_2^n(w_j), Y_3^n(j+1)) \in A_\epsilon^{(n)} \text{ за некое } w_j \neq \tilde{W}_j \right\} \quad (2.43)$$

На овој начин веројатноста на грешка е ограничена како:

$$\begin{aligned} P(E(j)) &= P\{\hat{W}_j \neq 1\} \leq P(\tilde{E}_1(j) \cup \tilde{E}_2(j) \cup E_1(j) \cup E_2(j)) \leq \\ &\leq P(\tilde{E}_1(j)) + P(\tilde{E}_2(j)) + P(E_1(j)) + P(E_2(j)) \end{aligned} \quad (2.44)$$

каде првите два члена ја даваат горната граница на  $P\{\hat{W}_j \neq 1\}$ , а преостанатите два члена ја даваат горната граница на  $P\{\hat{W}_j \neq \tilde{W}_j\}$ .

Сега, од независноста на кодните книги, естимацијата на пораката во релето  $\tilde{W}_{j-1}$ , која е функција од  $Y_2^n(j-1)$  и кодната книга  $C_{j-1}$ , е независна од кодните зборови  $X_1^n(w_j), X_2^n(w_{j-1}), w_j, w_{j-1} \in [1 : 2^{nR}]$ , од кодната книга  $C_j$ . Оттука, од законот за големи броеви [15, ch.(1.1)] (LLN - Law of Large Numbers)  $P(\tilde{E}_1(j)) \rightarrow 0$  како  $n \rightarrow \infty$ , и од лемата за пакување, [14, Lemma 3.1],  $P(\tilde{E}_2(j)) \rightarrow 0$  како  $n \rightarrow \infty$  доколку  $R < I(X_1; Y_2|X_2) - \delta(\epsilon)$ .

Слично, од независноста на кодните книги и од LLN,  $P(E_1(j)) \rightarrow 0$  како  $n \rightarrow \infty$ , и од истата независност и од лемата за пакување,  $P(E_2(j)) \rightarrow 0$  како  $n \rightarrow \infty$  доколку  $R < I(X_2; Y_3) - \delta(\epsilon)$ . На тој начин се покажува дека под услов на дадените ограничувања на брзината на пренесување,  $P\{\hat{W}_j \neq \tilde{W}_j\} \rightarrow 0$  како  $n \rightarrow \infty$  за секое  $j \in [1 : b-1]$  со што се докажува долната границата за каскадниот релеен канал.

## 2.2.2 Кохерентен каскаден релеен канал

Брзината на пренос што се постигнува со каскадниот релеен канал може да се подобри доколку се дозволи изворот и релето кохерентно да соработуваат во испраќањето на нивните кодни зборови. Со ова подобрување, ќе се добие долната граница на капацитетот за DMRC:

$$C \geq \max_{p(x_1, x_2)} \min \{I(X_2; Y_3), I(X_1; Y_2|X_2)\} \quad (2.45)$$

Повторно се користи блоковско Марково кодирање во кое низа од  $(b - 1)$  i.i.d пораки  $W_j$ ,  $j \in [1 : b - 1]$ , се испраќаат преку  $b$  блокови при што секој блок се состои од  $n$  пристапи до каналот.

**Генерирање на кодна книга:** Се фиксира веројатноста  $p(x_1, x_2)$  на вредности кои ја остваруваат долната граница во (2.45). За  $j \in [1 : b]$ , случајно и независно се генерираат  $2^{nR}$  низи  $x_2^n(w_{j-1})$ ,  $w_{j-1} \in [1 : 2^{nR}]$ , секоја согласно  $\prod_{i=1}^n p_{X_2}(x_{2i})$ . За секое  $w_{j-1} \in [1 : 2^{nR}]$ , случајно и условно независно се генерираат  $2^{nR}$  низи  $x_1^n(w_j|w_{j-1})$ ,  $w_j \in [1 : 2^{nR}]$ , секоја согласно  $\prod_{i=1}^n p_{X_1|X_2}(x_{1i}|x_{2i}(w_{j-1}))$ . Ова ја дефинира кодната книга:

$$C_j = \{(x_1^n(w_j|w_{j-1}), x_2^n(w_{j-1})) : w_{j-1}, w_j \in [1 : 2^{nR}]\}, \quad j \in [1 : b] \quad (2.46)$$

Кодните книги се разоткриваат на сите јазли (изворот, дестинацијата и релето).

Блок	1	2	3	4	$b - 1$	$b$
$X_1$	$x_1^n(w_1 1)$	$x_1^n(w_2 w_1)$	$x_1^n(w_3 w_2)$	...	$x_1^n(w_{b-1} w_{b-2})$	$x_1^n(w_b w_{b-1})$
$Y_2$	$\tilde{w}_1$	$\tilde{w}_2$	$\tilde{w}_3$	...	$\tilde{w}_{b-1}$	0
$X_2$	$x_2^n(1)$	$x_2^n(\tilde{w}_1)$	$x_2^n(\tilde{w}_2)$	...	$x_2^n(\tilde{w}_{b-2})$	$x_2^n(\tilde{w}_{b-1})$
$Y_3$	0	$\hat{w}_1$	$\hat{w}_2$		$\hat{w}_{b-2}$	$\hat{w}_{b-1}$

Табела 2.2: Кодирање и декодирање за кохерентен каскаден релеен канал

**Кодирање во изворот:** Да земеме дека  $w_j \in [1 : 2^{nR}]$  е пораката што треба да се испрати во блокот  $j$ . Кодерот во изворот ја испраќа низата  $x_1^n(w_j|w_{j-1})$  од кодната книга  $C_j$ , каде по конвенција  $w_0 = w_b = 1$ .

**Кодирање во релето:** По конвенција, да земеме дека  $\tilde{w}_0 = 1$ . На крај од блокот  $j$ , релето наоѓа уникатна порака  $\tilde{w}_j$  така што  $(x_1^n(\tilde{w}_j|\tilde{w}_{j-1}), x_2^n(\tilde{w}_{j-1}), y_2^n(j)) \in A_\epsilon^{(n)}$ . Во блокот  $j + 1$ , тоа го испраќа  $x_2^n(w_j)$  од кодната книга  $C_{j+1}$ .

**Декодирање во дестинацијата:** На крај од блокот  $j + 1$ , дестинацијата наоѓа уникатна порака  $\hat{w}_j$  така што  $(x_2^n(\hat{w}_j), y_2^n(j+1)) \in A_\epsilon^{(n)}$ .

**Анализа на веројатноста на грешка:** Ќе ја анализираме веројатноста за грешка при декодирање на  $W_j$  усредната по сите кодни книги. Без да се наруши општоста да претпоставиме дека  $W_{j-1} = W_j = 1$ . Да претпоставиме дека  $\tilde{W}_j$  е естимација на пораката во релето на крај од блокот  $j$ . Декодерот прави грешка доколку се случи еден или повеќе од следните настани:

$$\tilde{E}(j) = \{\tilde{W}_j \neq 1\} \quad (2.47)$$

$$E_1(j) = \left\{ X_2^n(\tilde{W}_j), Y_3^n(j+1) \neq A_\epsilon^{(n)} \right\} \quad (2.48)$$

$$E_2(j) = \left\{ (X_2^n(w_j), Y_3^n(j+1)) \in A_\epsilon^{(n)} \text{ за некои } w_j \neq \tilde{W}_j \right\} \quad (2.49)$$

На овој начин, веројатноста на грешка е ограничена од горе како:

$$P(E(j)) = P\{\hat{W}_j \neq 1\} \leq P(\tilde{E}(j) \cup E_1(j) \cup E_2(j)) \leq P(\tilde{E}(j)) + P(E_1(j)) + P(E_2(j)) \quad (2.50)$$

со следење на истите чекори за анализа како во глава 2.2.1, последните два члена  $P(E_1(j))$  и  $P(E_2(j))$  од изразот 2.50, тежнеат кон нула како  $n \rightarrow \infty$  доколку  $R < I(X_2; Y_3) - \epsilon$ . За да се најде горната граница за првиот член  $P(\tilde{E}(j))$ , се дефинира:

$$\tilde{E}_1(j) = \left\{ \left( X_1^n(1|\tilde{W}_{j-1}), X_2^n(\tilde{W}_{j-1}), Y_2^n(j) \right) \notin A_\epsilon^{(n)} \right\} \quad (2.51)$$

$$\tilde{E}_2(j) = \left\{ \left( X_1^n(w_j|\tilde{W}_{j-1}), X_2^n(\tilde{W}_{j-1}), Y_2^n(j) \right) \in A_\epsilon^{(n)} \text{ за некои } w_j \neq 1 \right\} \quad (2.52)$$

тогаш:

$$\begin{aligned} P(\tilde{E}(j)) &\leq P(\tilde{E}(j-1) \cup \tilde{E}_1(j) \cup \tilde{E}_2(j)) \leq \\ &\leq P(\tilde{E}(j-1)) + P(\tilde{E}_1(j) \cap \tilde{E}^c(j-1)) + P(\tilde{E}_2(j)) \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$P(\tilde{E}_1(j) \cap \tilde{E}^c(j-1)) = P \left\{ \left( X_1^n(1|\tilde{W}_{j-1}), X_2^n(\tilde{W}_{j-1}), Y_2^n(j) \right) \notin A_\epsilon^{(n)}, \tilde{W}_{j-1} = 1 \right\} \leq \quad (2.54)$$

$$\leq P \left\{ (X_1^n(1|1), X_2^n(1), Y_2^n(j)) \notin A_\epsilon^{(n)} | \tilde{W}_{j-1} = 1 \right\} \quad (2.55)$$

која од независноста на кодните зборови и законот за големи броеви, тежнее кон нула како  $n \rightarrow \infty$ . Од лемата за пакување [14, Lemma 3.1],  $P(\tilde{E}_2(j))$  тежнее кон нула како  $n \rightarrow \infty$  доколку  $R < I(X_1; Y_2|X_2) - \delta(\epsilon)$ . Треба да се забележи дека по дефиниција  $\tilde{W}_0 = 1$ . Оттука, со индукција,  $P(\tilde{E}(j))$  тежнее кон нука како  $n \rightarrow \infty$  за секое  $j \in [1 : b-1]$ . На тој начин се покажува дека при дадени ограничувања на брзината на пренос на податоци,  $P\{\hat{W}_j \neq \tilde{W}_j\} \rightarrow 0$  доколку  $n \rightarrow \infty$  за секое  $j \in [1 : b-1]$ . Со ова се комплетира доказот за достигливоста на кохерентната долна граница во (2.45).

### 2.2.3 Декодирај-и-проследи релеен канал

Перформансите на кохерентниот каскаден релеен канал може да се подобрат доколку дестинацијата ги декодира истовремено пораките испратени од изворот и од релето.

**Теорема 2.2.** *Долна граница за декодирај-и-проследи*

Капацитетот на DMRC е ограничен од долна страна со [14, thm.(16.2)]:

$$C \geq \max_{p(x_1 x_2)} \min \{I(X_1 X_2; Y_3), I(X_1; Y_2|X_2)\} \quad (2.56)$$

Треба да се забележи дека оваа граница се разликува од СУВ во тоа што здружената информација во пресечната граница го вклучува  $Y_3$  во вториот член за минимизација. Ќе видиме дека наместо да избереме кодирачката функција (2.3) на релето да зависи од конечен број на претходно пратени  $y_2$ , капацитетот  $C$  може да се достигне со користење на блоковска маркова зависност (анг. BMC - Block Markov Coding) на  $x_2$  од  $y_2$  [25]. Во таков случај кодниот збор што релето го праќа во даден блок зависи статистички од пораката пратена во претходнот блок.

**Доказ:** Теоремата 2.2 ќе ја докажеме со случајно кодирање со складирање во кошнички. Дополнително таа може да се докаже и со декодирање наназад [14, ch.(16.4.4)]. Во кодирањето со складирање во кошнички, изворот и релето кооперативно го испраќаат индексот на кошничката  $S_j$  на пораката  $W_j$  (наместо да ја испраќаат самата порака) во блокот  $j+1$  за да и помогнат на дестинацијата да ја реконструира пораката  $W_j$ .

Разгледуваме  $b$  блокови, секој со по  $n$  симболи. Низа од  $b - 1$  пораки  $w_j \in [1, 2^{nR}]$ ,  $j = 1, 2, \dots, b - 1$  ќе се испрати со  $n \cdot b$  употреби на каналот. (Треба да се забележи ако  $b \rightarrow \infty$ , за фиксно  $n$ , брзина на пренесување е  $R \cdot (b - 1)/b$  е произволно близку до  $R$ .)

Прво случајно се генерираат  $M_2 = 2^{nR_2}$  независни идентично дистрибуирани (i.i.d)  $n$ -низи во  $X_2^n$ , секоја генерирана согласно веројатноста  $p(x_2^n) = \prod_{i=1}^n p(x_{2i})$ . Така генерираните низи се индексираат како  $x_2^n(s)$ ,  $s \in [1, 2^{nR_2}]$ . За секое  $x_2^n(s)$ , се генерираат  $M = 2^{nR}$  условно независни  $n$ -низи  $x_1^n(w|s)$ ,  $w \in [1, 2^{nR}]$  генерирани согласно веројатноста  $p(x_1^n|x_2^n(s)) = \prod_{i=1}^n p(x_{1i}|x_{2i}(s))$  (Со оваа постапка за секоја кошничка  $s$  се генерира посебна кодна книга од  $2^{nR}$  елементи. На крајот финалната кодна книга содржи  $2^{nR_2} \times 2^{nR}$  елементи.). На овој начин се дефинира случајна кодна книга  $C_j = \{x_1^n(w|s), x_2^n\}$ .

Случајната низа од кошнички  $B = \{S_1, S_2, \dots, S_{2^{nR_2}}\}$  се дефинира на следниов начин: Да избереме секој природен број  $w \in [1, 2^{nR}]$  да се назначи независно, согласно униформната дистрибуција на индексите  $s = 1, 2, \dots, 2^{nR_2}$ , во кошничката  $S_s$ . Ќе ја користиме нотацијата  $s(w)$  да го означиме индексот на кошничката во која  $w$  е складира

Блок	1	2	...	$j$	$j + 1$	...	$b$
$X_1$	$x_1^n(w_1 1)$	$x_1^n(w_2 s_1)$	...	$x_1^n(w_j s_{j-1})$	$x_1^n(w_{j+1} s_j)$	...	$x_1^n(1 s_{b-1})$
$Y_2$	$\tilde{w}, \tilde{s}_1$	$\tilde{w}_2, \tilde{s}_2$	...	$\tilde{w}_j, \tilde{s}_j$	$\tilde{w}_{j+1}, \tilde{s}_{j+1}$	...	0
$X_2$	$x_2^n(1)$	$x_2^n(\tilde{s}_1)$	...	$x_2^n(\tilde{s}_{j-1})$	$x_2^n(\tilde{s}_j)$	...	$x_2^n(\tilde{s}_{b-1})$
$Y_3$	0	$\hat{s}_1 \hat{w}_1$	...	$\hat{s}_{j-1} \hat{w}_{j-1}$	$\hat{s}_j \hat{w}_j$	...	$\hat{s}_{b-1} \hat{w}_{b-1}$

**Табела 2.3:** Кодирање и декодирање за методата со складирање во кошнички за декодирај-и-проследи

*Генерирање на кодната книга:* Да ја фиксираме здружената PMF  $p(x_1 x_2)$  на вредност што ја достигнува долната граница. Да претпоставиме дека  $0 \leq R_2 \leq R$ . За секое  $j \in [1 : b]$ , случајно и независно генерираме  $2^{nR_2}$  низи  $x_2^n(s_{j-1})$ ,  $s_{j-1} \in [1 : 2^{nR_2}]$ , секоја во согласност со  $\prod_{i=1}^n p_{x_2}(x_{2i})$ . За секое  $s_{j-1} \in [1 : 2^{nR}]$ , случајно и условно независно генерираме  $2^{nR}$  низи  $x_1^n(w_j|s_{j-1})$  (Со оваа постапка за секоја кошничка  $s_j$ ,  $j \in [1 : b]$  се генерира посебна кодна книга од  $2^{nR}$  елементи. На крајот финалната кодна книга содржи  $2^{nR_2} \times 2^{nR}$  елементи.). На овој начин се дефинира случајна кодна книга

$$C_j = \{(x_1^n(w_j|s_{j-1}), x_2^n(s_{j-1})) : w_j \in [1 : 2^{nR}], s_{j-1} \in [1 : 2^{nR_2}]\}, \quad j \in [1 : b] \quad (2.57)$$

и низата од кошнички:

$$B = \{S_1, S_2, \dots, S_{2^{nR_2}}\} \quad (2.58)$$

Низата од кошнички  $B$  овозможува да се испрати информација до дестинацијата, со користење на случајно складирање во кошнички описано со теоремата на Слепијан и Вулф ([9, th.(15.4.1)], [28]). Имено согласно оваа постапка, ги групираме пораките во  $2^{nR_2}$  кошнички со еднаква големина:  $B(s) = [(s - 1)2^{n(R-R_2)} + 1 : s \cdot 2^{n(R-R_2)}]$ ,  $s \in [1 : 2^{nR_2}]$ . Кодните книги и распоредот по кошнички се разоткрива на сите јазли. Кодирањето и декодираето може да се објаснат со помош на табелата Tab. 2.3

*Кодирање:* Да претпоставиме дека  $w_j \in [1 : 2^{nR}]$  е пораката што треба да се испрати во блокот  $j$  и да претпоставиме дека  $w_{j-1} \in B(s_{j-1})$ . Кодерот го испраќа  $x_1^n(w_j|s_{j-1})$  од кодната книга  $C_j$ , каде по конвенција  $s_0 = w_b = 1$ .

*Кодирање во релето:* На крајот од блокот  $j$ , знаејќи го  $s_{j-1}$  по приемот на  $y_2(j)$ , релето ја естимира пораката што ја има пратено изворот  $-\tilde{w}_j$  на начин што ја наоѓа единствената порака  $\tilde{w}_j$  за која  $(x_1^n(\tilde{w}_j|s_{j-1}), x_2^n(\tilde{s}_{j-1}), y_2^n(j)) \in A_\epsilon^{(n)}$ . Доколку  $\tilde{w}_j \in B(\tilde{s}_j)$ , во блокот  $j + 1$ , релето ја испраќа низата  $x_2^n(\tilde{s}_j)$  од кодната книга  $C_{j+1}$ . Во понатамошната анализа по по конвенција ќе земеме дека  $\tilde{s}_0 = 1$ .

*Декодирање во дестинацијата:* На крај од блокот  $j + 1$  дестинацијата го наоѓа единствениот индекс  $\hat{s}_j$  таков што  $(x_2^n(\hat{s}_j), y_3^n(j+1)) \in A_\epsilon^{(n)}$  кој ќе биде потребен за декодирање на пораката во наредниот блок. Ако претпоставиме дека во претходниот блок  $j$  индексот на кошничката  $s_{j-1}$  бил успешно декодиран, дестинацијата ќе ја естимира единствената порака  $\hat{w}_j$  за која важи  $(x_1(\hat{w}_j|\hat{s}_{j-1}), x_2^n(\hat{s}_{j-1}), y_3^n(j)) \in A_\epsilon^{(n)}$  и  $\hat{w}_j \in B(\hat{s}_j)$ . Согласно ова претпоставуваме дека на крајот на блокот  $(j+1)$  дестинацијата ги знае  $(w_1, w_2, \dots, w_j)$  и  $(s_1, s_2, \dots, s_j)$ , а релето ги знае  $(w_1, w_2, \dots, w_{j+1})$  и  $(s_1, s_2, \dots, s_{j+1})$ .

*Анализа на веројатноста на грешка:* Ја анализираме веројатноста за грешка при декодирање за пораката  $W_j$  усредната по сите кодни книги. Да претпоставиме без да се изгуби општоста  $W_j = S_{j-1} = S_j = 1$  и да претпоставиме  $\tilde{S}_j$  е естимација на  $S_j$  во релето. Декодерот ќе згреши доколку еден или повеќе од следниве настани се случи:

$$\tilde{E}(j-1) = \left\{ \tilde{S}_{j-1} \neq 1 \right\} \quad (2.59)$$

$$E_1(j-1) = \left\{ \hat{S}_{j-1} \neq 1 \right\} \quad (2.60)$$

$$E_1(j) = \left\{ \hat{S}_j \neq 1 \right\}, \quad (2.61)$$

$$E_2(j) = \left\{ \left( X_1^n(1|\hat{S}_{j-1}), X_2^n(\hat{S}_{j-1}), Y_3^n(j) \right) \notin A_\epsilon^{(n)} \right\} \quad (2.62)$$

$$E_3(j) = \left\{ \left( X_1^n(w_j|\hat{S}_{j-1}), X_2^n(\hat{S}_{j-1}), Y_3^n(j) \right) \in A_\epsilon^{(n)} \text{ за некои } w_j \neq 1, w_j \in B(\hat{S}_j) \right\} \quad (2.63)$$

На тој начин веројатноста за грешка е ограничена од горе со:

$$\begin{aligned} P(E(j)) &= P\left(\hat{W}_j \neq 1\right) \leq P\left(\tilde{E}(j-1) \cup E_1(j-1) \cup E_1(j) \cup E_2(j) \cup E_3(j)\right) \leq \\ &P\left(\tilde{E}(j-1)\right) + P(E_1(j)) + P(E_1(j-1)) + P\left(E_2(j) \cap \tilde{E}^c(j-1) \cap E_1^c(j-1) \cap E_1^c(j)\right) + \\ &+ P\left(E_3(j) \cap \tilde{E}^c(j-1) \cap E_1^c(j-1) \cap E_1^c(j)\right). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Ако ги следиме сличните чекори од глава 2.2.2, со тоа што  $\tilde{W}_{j-1}$  се заменува со  $\tilde{S}_{j-1}$ , првиот член во (2.64)  $P(\tilde{E}(j-1)) \rightarrow 0$  доколку  $n \rightarrow \infty$  и  $R_2 < I(X_1; Y_2|X_2) - \delta(\epsilon)$ . Вториот и третиот член во (2.64)  $P(E_1(j))$  и  $P(E_1(j-1))$  тежнеат кон нула доколку  $n \rightarrow \infty$  и  $R_2 < I(X_2; Y_3) - \delta(\epsilon)$ . Четвртиот член во (2.64) е ограничен на следниов начин:

$$\begin{aligned} &P\left(E_2(j) \cap \tilde{E}^c(j-1) \cap E_1^c(j-1) \cap E_1^c(j)\right) = \\ &= P\left(E_2(j) \cap \left\{ \tilde{S}_{j-1} = 1 \right\} \cap \left\{ \hat{S}_{j-1} = 1 \right\} \cap \left\{ \hat{S}_j = 1 \right\}\right) \leq \\ &\leq P\left\{ (X_1^n(1|1), X_2^n(1), Y_3^n(j)) \notin A_\epsilon^{(n)} | \tilde{S}_{j-1} = 1 \right\} \end{aligned} \quad (2.65)$$

што заради независноста на кодните книги и законот за големи броеви, тежнее кон 0 доколку  $n \rightarrow \infty$ . Последниот член во (2.64) е ограничен од горната страна на следниов начин:

$$\begin{aligned} &P\left(E_3(j) \cap \tilde{E}^c(j-1) \cap E_1^c(j-1) \cap E_1^c(j)\right) = \\ &= P\left(E_3(j) \cap \left\{ \tilde{S}_{j-1} = 1 \right\} \cap \left\{ \hat{S}_{j-1} = 1 \right\} \cap \left\{ \hat{S}_j = 1 \right\}\right) \leq \end{aligned}$$

$$\leq P \left\{ (X_1^n(1|1), X_2^n(1), Y_3^n(j)) \in A_\epsilon^{(n)} \text{ за некое } w_j \neq 1, w_j \in B(1) | \tilde{S}_{j-1} = 1 \right\} \quad (2.66)$$

кој заради независноста на кодните книги и лемата за пакување [14, Lemma 3.1] тежнее кон нула доколку  $n \rightarrow \infty$  и  $R - R_2 \leq I(X_1; Y_3|X_2) - \delta(\epsilon)$ . Со комбинирање на границите и елиминација на  $R_2$ ,

$$R - R_2 \leq I(X_1; Y_3|X_2) - \delta(\epsilon) \rightarrow R \leq I(X_1; Y_3|X_2) + R_2 - \delta(\epsilon); \quad R_2 \leq I(X_2; Y_3) - \delta(\epsilon) \quad (2.67)$$

се покажува дека  $P(\hat{W}_j \neq W_j)$  тежнее кон нула доколку  $n \rightarrow \infty$  за секое  $j \in [1 : b - 1]$  доколку  $R < I(X_1; Y_2|X_2) - \delta(\epsilon)$  т.е:

$$R \leq I(X_1; Y_3|X_2) + I(X_2; Y_3) - 2\delta(\epsilon) = I(X_1 X_2; Y_3) - 2\delta(\epsilon) \quad (2.68)$$

Со што се докажува долната граница за декодирај-и-проследи методот.

Се покажува дека еднаквоста во (2.56) се достигнува за деградиран DMRC.

**Теорема 2.3.** (*Капацитет на Деградиран релеен канал*):

Капацитетот  $C$  на деградираниот RC е [3, eq.(12)]:

$$C = \max_{p(x_1, x_2)} \min \{I(X_1, X_2; Y_3), I(X_1; Y_2|X_2)\} \quad (2.69)$$

каде максимумот е по сите здружени дистрибуции  $p(x_1, x_2)$  на множеството  $(X_1, X_2)$ .

Доказот на достигливоста на теорема 2.3 ги следи чекорите истите чекори ((2.57) до (2.68)) од доказот на теоремата (2.56).

**Доказ на реципроцитетот на теоремата 2.3:**

Доколку се тргне од СУВ дадена со теорема 2.1 и се земе во предвид дефиницијата за деградираност (2.11) се добива:

$$I(X_1; Y_3, Y_2|X_2) = I(X_1; Y_2|X_2) \quad (2.70)$$

**Доказ:**

$$p(y_3, y_2|x_1, x_2) = p(y_2|x_1, x_2) \cdot p(y_3|y_2, x_2) \Rightarrow X_1 \rightarrow (X_2, Y_2) \rightarrow Y_3 \quad (2.71)$$

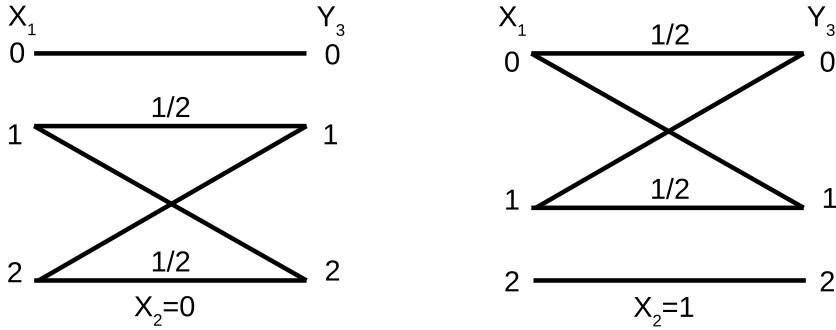
$$\begin{aligned} I(X_1; Y_3, Y_2|X_2) &= H(Y_3, Y_2|X_2) - H(Y_3, Y_2|X_1 X_2) = \\ &= H(Y_3, Y_2|X_2) - H(Y_2|X_1 X_2) - H(Y_3|Y_2 X_1 X_2) = \\ &= H(Y_3, Y_2|X_2) - H(Y_2|X_1 X_2) - H(Y_3|Y_2 X_2) = \\ &= H(Y_2|X_2) + \cancel{H(Y_3|Y_2, X_2)} - H(Y_2|X_1 X_2) - \cancel{H(Y_3|Y_2, X_2)} = \\ &= H(Y_2|X_2) - H(Y_2|X_1 X_2) = I(X_1; Y_2|X_2) \end{aligned} \quad (2.72)$$

Овој резултат за капацитетот може да се илустрира во следниов пример.

**Пример 2.1.** (*Релеен канал на Само*)

Да го разгледуваме деградиранот DMRC со  $X_1 = Y_2 = Y_3 = \{0, 1, 2\}$ ,  $X_2 = \{0, 1\}$ , и  $Y_2 = X_1$  како што е прикажано на слика 2.4.

Кооперативната горна граница на капацитетот на каналот  $R_{UB} = \max_{p(x_1, x_2)} I(X_1, X_2; Y) = 1.169$  (види глава 8.1). Со директен пренос,  $R^{(0)} = 1$  бити/испраќање може да се постигнат со  $X_2 = 0$  односно  $X_2 = 1$ . За споредба, во [3] и [32] е покажано дека ако се користи оптимална маркова релејна функција  $x_2(y_{2,i-1})$  ќе се добие  $R^{(1)} = 1.0437$ , а ако се користи  $x_{2i}(y_{2,i-1}, y_{2,i-2})$  се добива  $R^{(2)} = 1.0549$ . Бидејќи каналот е деградиран капацитетот е во согласност со долната граница за методата декодирај-и-проследи (теорема 2.2). Со евалуација на оваа граница се добива  $C = 1.1619$  (види [3], [32]).

Слика 2.4: Релеен канал на Сато во кој  $X_1, Y_3 \in \{0, 1, 2\}$ ,  $X_2 \in \{0, 1\}$  и  $Y_1 = X_1$ 

## 2.3 Компримирај-и-проследи релеен канал

Во методата со декодирај-и проследи, релето ја реконструира целата порака. Доколку каналот од изворот до релето е послаб од директниот канал до дестинацијата, брзината за пренос може да се намали под вредноста за директен пренос во кој случај релето воопшто не се користи. Во методата компримирај-и-проследи (CF) релето помага во комуникацијата со испраќање на опис на претходно приемениот сигнал кон дестинацијата. Бидејќи овој опис е корелиран со примената низа, се користи Wyner-Ziv кодирање [27] за да се намали брзината потребна за пренесување на описот кон дестинацијата. Оваа метода ја достигнува следнава долна граница.

**Теорема 2.4.** *Долна граница за компримирај-и-проследи*

Капацитетот на DMRC е ограничен од долнаата страна со [14, thm.(16.4)]:

$$C \geq \max \min \left\{ I(X_1, X_2; Y_3) - I(Y_2; \hat{Y}_2 | X_1 X_2 Y_3), I(X_1; \hat{Y}_2, Y_3 | X_2) \right\} \quad (2.73)$$

каде максимумот е по сите условни веројатности  $p(x_1)p(x_2)p(\hat{y}_2|x_2y_2)$  со  $|\hat{\mathcal{Y}}_2| \leq |\mathcal{X}_2| \cdot |\mathcal{Y}_2| + 1$ .

Во споредба со CUB (теорема 2.1), првиот член во минимумот ја претставува границата за канал со повеќекратен пристап без кохерентна комуникација ( $X_1$  и  $X_2$  се независни) со дополнителен член кој се одзема, а второт член личи на границата за дифузен канал но наместо  $Y_2$  се користи описот  $\hat{Y}_2$ .

**Доказ:** Повторно се користи ВМС за да се пренесат  $(b-1)$  i.i.d. пораки во  $b$  блокови. На крај од блокот  $j$ , релето избира реконструирана низа  $\hat{y}_2^n(j)$  условена по низата  $x_2^n(j)$  (која е позната и на релето и на дестинацијата). Бидејќи дестинацијата има странична информација  $y_3^n(j)$  за  $\hat{y}_2(j)$ , ќе користиме складирање по кошнички како во Wyner-Ziv кодирањето за да ја намалиме брзината неопходна за испраќање на  $\hat{y}_2^n(j)$ . Индексот на кошничката се испраќа кон дестинацијата во блокот  $j+1$  со испраќање на низата  $x_2^n(j+1)$ . На крајот од блокот  $j+1$ , дестинацијата го декодира  $x_2^n(j+1)$ . Таа потоа го користи  $y_3^n(j)$  и  $x_2^n(j)$  за да ги декодира истовремено  $\hat{y}_2^n(j)$  и  $x_1^n(j)$ .

*Генерирање на кодна книга:* Се фиксира условната веројатност  $p(x_1)p(x_2)p(\hat{y}_2|y_2, x_2)$  на вредност што ја достигнува долната граница. Случајно се генерираат независни кодни книги за секој блок. За  $j \in [1 : b]$ , случајно и независно се генерираат  $2^{nR}$  низи  $x_1^n(w_j)$ ,  $w_j \in [1 : 2^{nR}]$  секоја во согласност со  $\prod_{i=1}^n p_{X_1}(x_{1i})$ . Случајно и независно се генерираат  $2^{nR_2}$  низи  $x_2^n(s_{j-1})$ ,  $s_{j-1} \in [1 : 2^{nR_2}]$ , секоја во согласност со  $\prod_{i=1}^n p_{X_2}(x_{2i})$ . За секое  $s_{j-1} \in [1 : 2^{nR_2}]$ , случајно и условно независно се генерираат  $2^{nR_2}$  низи

Блок	1	2	3	...	$j$	...	$b$
$X_1$	$x_1^n(w_1)$	$x_1^n(w_2)$	$x_1^n(w_3)$	...	$x_1^n(w_j)$	...	$x_1^n(1)$
$Y_2$	$\hat{y}_2(k_1 1), s_1$	$\hat{y}_2(k_2 s_1), s_2$	$\hat{y}_2^n(k_3 s_2), s_3$	...	$\hat{y}_2^n(k_j s_{j-1}), s_j$	...	0
$X_2$	$x_2^n(1)$	$x_2^n(s_1)$	$x_2^n(s_2)$	...	$x_2^n(s_{j-1})$	...	$x_2^n(s_{b-1})$
$Y_3$	0	$\hat{s}_1 \hat{k}_1$ $\hat{w}_1$	$\hat{s}_2 \hat{k}_2$ $\hat{w}_2$	...	$\hat{s}_{j-1} \hat{k}_{j-1}$ $\hat{w}_{j-1}$	...	$\hat{s}_{b-1} \hat{k}_{b-1}$ $\hat{w}_{b-1}$

Табела 2.4: Кодирање и декодирање за компримирај-и-проследи

$\hat{y}_2^n(k_j|s_{j-1}), k_j \in [1 : 2^{n\tilde{R}_2}]$ , секоја во согласност со  $\prod_{i=1}^n p_{\hat{Y}_2|X_2}(\hat{y}_{2i}|x_{2i}(s_{i-1}))$ . На овој начин се дефинира кодната книга:

$$C_j = \left\{ (x_1^n(w_j), x_2^n(s_{j-1}), \hat{y}_2^n(k_j|s_{j-1})) : w_j \in [1 : 2^{nR}], s_{j-1} \in [1 : 2^{nR_2}], k_j \in [1 : 2^{n\tilde{R}_2}] \right\} \quad (2.74)$$

Се партиционира множеството  $[1 : 2^{n\tilde{R}_2}]$  во  $2^{nR_2}$  кошнички со еднаква големина  $B(s_j), s_j \in [1 : 2^{nR_2}]$ . Кодните книги и распоредот по кошнички се разоткриваат на сите јазли.

*Кодирање во изворот:* Да земеме дека  $w_j \in [1 : 2^{nR}]$  е пораката која треба да се испрати во блокот  $j$ . Кодерот го испраќа  $x_1^n(w_j)$  од кодната книга  $C_j$ , каде  $w_b = 1$  по конвенција.  
*Кодирање во релето:* По конвенција, да земеме дека  $s_0 = 1$ . На крај од блокот  $j$ , релето го наоѓа индексот  $k_j$  така што  $(y_2(j), \hat{y}_2(k_j|s_{j-1}), x_2^n(s_{j-1})) \in A_\epsilon^{(n)}$ . Ако има повеќе од еден таков индекс, тоа праќа еден од нив по униформна случајна распределба. Доколку не постои таков индекс, тоа избира индекс случајно по униформна распределба од множеството  $[1 : 2^{n\tilde{R}_2}]$ . Во блокот  $j+1$  релето го испраќа  $x_2^n(s_j)$ , каде  $s_j$  индексот на кошничката за  $k_j$ .

*Декодирање во дестинацијата:* Да земеме дека  $\epsilon > \epsilon'$ . На крај од блокот  $j+1$ , доколку  $(x_2^n(\hat{s}_j), y_3^n(j+1)) \in A_\epsilon^{(n)}$  дестинацијата успешно го реконструира единствениот индекс  $\hat{s}_j$  кој ќе се користи за декодирање на пораката во наредниот блок . Потоа, таа ја наоѓа единствената порака  $\hat{w}_j$  така што  $(x_1^n(\hat{w}_j), x_2^n(\hat{s}_{j-1}), \hat{y}_2^n(\hat{k}_j|\hat{s}_{j-1}), y_3^n(j)) \in A_\epsilon^{(n)}$  и  $\hat{k}_j \in B(\hat{s}_j)$ .

*Анализа на веројатноста за грешка:* Ја анализираме веројатноста за грешка при декодирање за пораката  $W_j$  усреднета по сите кодни книги. Без да се загуби општоста претпоставуваме дека  $W_j = 1$  и дека  $S_{j-1}, S_j, K_j$  ги означуваат индексите избрани од релето во блокот  $j$ . Декодерот ќе згреши само доколку се случи еден или повеќе од следните настани:

$$\tilde{E}(j) = \left\{ \left( X_2^n(\hat{S}_{j-1}), \hat{Y}_2^n(k_j|\hat{S}_{j-1}), Y_2^n(j) \right) \notin A_\epsilon^{(n)} \text{ за сите } k_j \in [1 : 2^{n\tilde{R}_2}] \right\} \quad (2.75)$$

$$E_1(j-1) = \left\{ \hat{S}_{j-1} \neq S_{j-1} \right\} \quad (2.76)$$

$$E_1(j) = \left\{ \hat{S}_j \neq S_j \right\}, \quad (2.77)$$

$$E_2(j) = \left\{ \left( X_1^n(1), X_2^n(\hat{S}_{j-1}), \hat{Y}_2^n(K_j|\hat{S}_{j-1}), Y_3^n(j) \right) \notin A_\epsilon^{(n)} \right\} \quad (2.78)$$

$$E_3(j) = \left\{ \left( X_1^n(w_j), X_2^n(\hat{S}_{j-1}), \hat{Y}_2^n(K_j|\hat{S}_{j-1}), Y_3^n(j) \right) \in A_\epsilon^{(n)} \text{ за некое } w_j \neq 1 \right\} \quad (2.79)$$

$$E_4(j) = \left\{ \left( X_1^n(w_j), X_2^n(\hat{S}_{j-1}), \hat{Y}_2^n(\hat{k}_j|\hat{S}_{j-1}), Y_3^n(j) \right) \in A_\epsilon^{(n)} \right\}$$

$$\text{за некое } \hat{k}_j \in B(\hat{S}_j), \hat{k}_j \neq K_j, w_j \neq 1 \} \quad (2.80)$$

На тој начин веројатноста за грешка е ограничена од горе со:

$$\begin{aligned} P(E(j)) &= P\{\hat{W}_j \neq 1\} \leq P(\tilde{E}(j)) + P(E_1(j-1)) + P(E_1(j)) + \\ &+ P(E_2(j) \cap \tilde{E}^c(j) \cap E_1^c(j-1)) + E_3(j) + P(E_4(j) \cap E_1^c(j-1) \cap E_1^c(j)). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Од независноста на кодните книги и од лемата за покривање [14, ch.(3.7)], првиот член  $P(\tilde{E}(j))$  тежнее кон 0 доколку  $n \rightarrow \infty$  и  $\tilde{R}_2 > I(\hat{Y}_2; Y_2|X_2) + \delta(\epsilon')$ . Ако се следи анализата за веројатноста за грешка во каскадниот релеен канал, следните два члена  $P(E_1(j-1)) = P\{\hat{S}_{j-1} \neq S_{j-1}\}$  и  $P(E_1(j)) = P\{\hat{S}_j \neq S_j\}$  тежнеат кон нула доколку  $n \rightarrow \infty$  и  $R_2 < I(X_2; Y_3) - \delta(\epsilon)$ . Четвртиот член е ограничен со:

$$\begin{aligned} P(E_2(j) \cap \tilde{E}^c(j) \cap E_1^c(j-1)) &\leq \\ \leq P\left\{\left(X_1^n(1), X_2^n(S_{j-1}), \hat{Y}_2^n(K_j|S_{j-1}), Y_3^n(j) \neq A_\epsilon^{(n)}|\tilde{E}^c(j)\right)\right\} \end{aligned} \quad (2.82)$$

кој, од независноста на кодните книги и лемата за условна типичност [14, ch.(2.5)], тежнеат кон нука доколку  $n \rightarrow \infty$ . Од истата независност и од лемата за пакување [14, Lemma 3.1],  $P(E_3(j))$  тежнее кон нула доколку  $n \rightarrow \infty$  и  $R \leq I(X_1; X_2, Y_2, Y_3) + \delta(\epsilon) = I(X_1; \hat{Y}_2, Y_3|X_2) + \delta(\epsilon)$ . Со следење на истите чекори од [14, lem.(11.1)] последниот член е ограничен од горе со:

$$\begin{aligned} P(E_4(j) \cap E_1^c(j-1) \cap E_1^c(j)) &\leq \\ \leq P\left\{X_1^n(w_j), X_2^n(S_{j-1}), \hat{Y}_2^n(\hat{k}_j|S_{j-1}), Y_3^n(j) \in A_\epsilon^{(n)} \right. \\ \left. \text{за некое } \hat{k}_j \in B(\hat{S}_j), \hat{k}_j \neq K_j, w_j \neq 1\right\} &\leq \\ P\left\{X_1^n(w_j), X_2^n(S_{j-1}), \hat{Y}_2^n(\hat{k}_j|S_{j-1}), Y_3^n(j) \in A_\epsilon^{(n)} \right. \\ \left. \text{за некое } \hat{k}_j \in B(1), w_j \neq 1\right\} \end{aligned} \quad (2.83)$$

кој, од независноста на кодните книги, лемата за здружена типичност [14, ch.(2.5.1)] и границата за унија на настани, тежнее кон 0  $n \rightarrow \infty$  доколку  $R + \tilde{R}_2 - R_2 < I(X_1; Y_3|X_2) + I(\hat{Y}_2; X_1, Y_3|X_2) - \delta(\epsilon)$ . Со комбинирање на границите и елиминирање на  $R_2$  и  $\tilde{R}_2$ , се покажува дека  $P(\hat{W}_j \neq W_j)$  тежнее кон нула доколку  $n \rightarrow \infty$  за секое  $j \in [1 : b-1]$  доколку:

$$\begin{aligned} R &\leq R_2 - \tilde{R}_2 + I(X_1; Y_3|X_2) + I(\hat{Y}_2; X_1, Y_3|X_2) - \delta(\epsilon) \leq \\ &\leq I(X_2; Y_3) - \delta(\epsilon) - I(\hat{Y}_2; Y_2|X_2) - \delta(\epsilon') + I(X_1; Y_3|X_2) + I(\hat{Y}_2; X_1, Y_3|X_2) - \delta(\epsilon) = \\ &= \underline{I(X_2; Y_3)} - I(\hat{Y}_2; Y_2|X_2) + \underline{I(X_1; Y_3|X_2)} + I(\hat{Y}_2; X_1, Y_3|X_2) - 2\delta(\epsilon) - \delta(\epsilon') = \\ &= I(X_1 X_2; Y_3) - I(\hat{Y}_2; Y_2|X_2) + I(\hat{Y}_2; X_1, Y_3|X_2) + \delta'(\epsilon) \end{aligned} \quad (2.84)$$

Со оглед на тоа што  $\hat{Y}_2 \rightarrow (X_2 Y_2) \rightarrow (X_1 Y_3)$  следи:

$$I(\hat{Y}_2; X_1 Y_2 Y_3|X_2) = H(\hat{Y}_2|X_2) - H(\hat{Y}_2|X_2 Y_2) = I(\hat{Y}_2; Y_2|X_2) \quad (2.85)$$

Ако се замени (2.85) во (2.84) ќе се добие:

$$R \leq I(X_1, X_2; Y_3) + I(\hat{Y}_2; X_1 Y_3 | X_2) - I(\hat{Y}_2; X_1 Y_2 Y_3 | X_2) - \delta'(\epsilon) \quad (2.86)$$

Вторите два члена од (2.86) можат да се сведат на:

$$\begin{aligned} & I(\hat{Y}_2; X_1 Y_3 | X_2) - I(\hat{Y}_2; X_1 Y_2 Y_3 | X_2) = \\ & = I(\hat{Y}_2; X_1 Y_3 | X_2) - I(\hat{Y}_2; X_1 Y_3 | X_2) - I(\hat{Y}_2; Y_2 | X_1 X_2 Y_3) = -I(\hat{Y}_2; Y_2 | X_1 X_2 Y_3) \end{aligned} \quad (2.87)$$

Ако (2.87) се замени во (2.86) се добива:

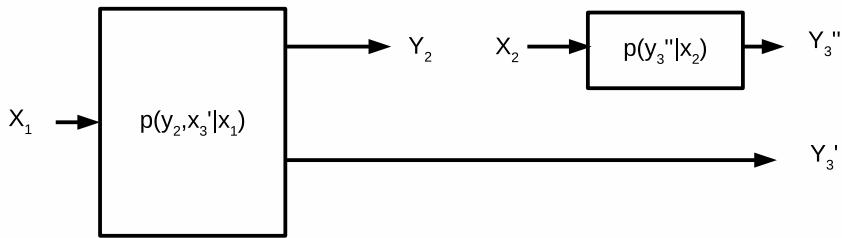
$$R \leq I(X_1 X_2; Y_3) - I(\hat{Y}_2; Y_2 | X_1 X_2 Y_3) - \delta'(\epsilon) \quad (2.88)$$

Со ова се комплетира доказот на долната граница на компримирај-и-проследи.

**Забелешка 2.1.** Постојат неколку други кодни методи кои ја достигнуваат долната граница за компримирај-и-проследи, на пример во [14, ch.(18.3)] е описана методата за буично мрежисно кодирање (анг. NNC- Noisy Network Coding).

#### Релеен канал со ортогонални приемни компоненти:

DMRC со ортогонални приемни компоненти е прикажан на слика 2.5



**Слика 2.5:** Релеен канал со ортогонални приемни компоненти

Кај овој модел  $Y_3 = (Y'_3, Y''_3)$  и  $p(y_2, y_3 | x_1 x_2) = p(y'_3, y_2 | x_1) \cdot p(y''_3 | x_2)$ , со што се раздвојуваат дифузниот канал од изворот до релето и дестинацијата од директниот канал од релето до дестинацијата. Капацитетот на DMRC со ортогонални компоненти не е познат во општа форма. CUB во теорема 2.1 се сведува на:

$$C \leq \max_{p(x_1)p(x_2)} \min \{ I(X_1; Y'_3) + I(X_2; Y''_3), I(X_1; Y_2, Y'_3) \} \quad (2.89)$$

**Доказ:** Ако

$$p(y_2, y'_3, y''_3 | x_1 x_2) = p(y''_3 | x_1 x_2 y'_3) \cdot p(y'_3, y_2 | x_1 x_2) \quad (2.90)$$

се спореди со условот:

$$p(y_2, y_3 | x_1 x_2) = p(y_2, y'_3, y''_3 | x_1 x_2) = p(y''_3 | x_2) \cdot p(y'_3, y_2 | x_1) \quad (2.91)$$

може да се заклучи дека  $y''_3$  зависи само од  $x_2$  т.е. не зависи од  $x_1, y_2, y'_3$  ( $y_2$  не содржи повеќе информација за  $y''_3$  од онаа што веќе е содржана во  $x_2$ ), и  $y'_3, y_2$  зависат само од  $x_1$

т.е. не зависи од  $x_2$  и  $y_3''$ . Првиот член од изразот за минимизација во (2.89) се добива од CUB (теорема 2.1) на следниов начин:

$$I(X_1X_2; Y_3) = I(X_1X_2; Y'_3, Y''_3) = I(X_1X_2; Y'_3) + I(X_1X_2; Y''_3|Y'_3) = \quad (2.92)$$

$$= H(Y'_3) - H(Y'_3|X_1X_2) + H(Y''_3|Y'_3) - H(Y''_3|X_1X_2Y'_3) = \quad (2.93)$$

$$= H(Y'_3) - H(Y'_3|X_1) + H(Y''_3) - H(Y''_3|X_2) = I(X_1; Y'_3) + I(X_2; Y''_3) \quad (2.94)$$

Вториот член од изразот за минимизација во (2.89) се добива од CUB на следниов начин:

$$I(X_1; Y_2Y'_3Y''_3|X_2) = I(X_1; Y_2Y'_3|X_2) + I(X_1; Y''_3|Y_2, Y'_3, X_2) = \quad (2.95)$$

$$= H(Y_2, Y'_3|X_2) - H(Y_2, Y'_3|X_2X_1) + H(Y''_3|Y_2Y'_3X_2) - H(Y''_3|Y_2Y'_3X_1X_2) = \quad (2.96)$$

$$= H(Y_2, Y'_3) - H(Y_2, Y'_3|X_1) + \cancel{H(Y''_3|X_2)} - \cancel{H(Y''_3|X_2)} = I(X_1; Y_2Y'_3) \quad (2.97)$$

Да земеме дека  $C_0 = \max_{p(x_2)} I(X_2, Y'_3)$  го означува капацитетот на каналот од релето до дестинацијата. Тогаш CUB за овој модел на RC може да се изрази како:

$$C \leq \max_{p(x_1)} \min \{I(X_1; Y'_3) + C_0, I(X_1; Y_2, Y'_3)\} \quad (2.98)$$

За споредба, долната граница за компримирај-и-проследи (види теорема 2.4) за овој RC се сведува на:

$$C \geq \max_{p(x_1)p(\hat{y}_2|y_2)} \min \left\{ I(X_1; Y'_3) + C_0 - I(Y_2; \hat{Y}_2|X_1Y'_3), I(X_1; \hat{Y}_2, Y'_3) \right\} \quad (2.99)$$

**Доказ на изразот (2.99):**

Вториот член од изразот за минимизација во (2.73) се сведува на:

$$I(X_1; \hat{Y}_2, Y'_3|X_2) = I(X_1; \hat{Y}_2, Y'_3Y''_3|X_2) = I(X_1; \hat{Y}_2, Y'_3|X_2) + I(X_1; Y''_3|X_2\hat{Y}_2, Y'_3) = \quad (2.100)$$

$$= I(X_1; \hat{Y}_2, Y'_3|X_2) + H(Y''_3|X_2\hat{Y}_2, Y'_3) - H(Y''_3|X_1X_2\hat{Y}_2, Y'_3) = \quad (2.101)$$

$$= I(X_1; \hat{Y}_2, Y'_3|X_2) + \cancel{H(Y''_3|X_2\hat{Y}_2, Y'_3)} - \cancel{H(Y''_3|X_2\hat{Y}_2, Y'_3)} = \quad (2.102)$$

$$= I(X_1; \hat{Y}_2, Y'_3|X_2) = H(\hat{Y}_2Y'_3|X_2) - H(\hat{Y}_2, Y'_3|X_2X_1) = \quad (2.103)$$

$$= H(\hat{Y}_2Y'_3) - H(\hat{Y}_2, Y'_3|X_1) = I(X_1; \hat{Y}_2Y'_3) \quad (2.104)$$

Првата здружена информација од разликата од првиот член од изразот за минимизација во (2.73) се сведува на:

$$I(X_1X_2; Y_3) = I(X_1; Y'_3) + I(X_2; Y''_3) = I(X_1; Y'_3) + C_0 \quad (2.105)$$

Втората здружена информација од разликата од првиот член од изразот за минимизација во (2.73) се сведува на:

$$I(Y_2; \hat{Y}_2|X_1X_2Y_3) = I(Y_2Y_3; \hat{Y}_2|X_1X_2) - I(Y_3; \hat{Y}_2|X_1X_2) = \quad (2.106)$$

$$= H(Y_2Y_3|X_1X_2) - H(Y_2Y_3|\hat{Y}_2X_1X_2) - I(Y'_3Y''_3; \hat{Y}_2|X_1X_2) = \quad (2.107)$$

$$= H(Y_2Y'_3Y''_3|X_1X_2) - H(Y_2Y'_3Y''_3|\hat{Y}_2X_1X_2) -$$

$$- I(Y'_3; \hat{Y}_2 | X_1 X_2) - I(Y''_3; \hat{Y}_2 | X_1 X_2 Y'_3) = \quad (2.108)$$

$$= H(Y_2 Y'_3 | X_1 X_2) + H(Y''_3 | X_1 X_2 Y'_3) - H(Y_2 Y'_3 | \hat{Y}_2 X_1 X_2) - H(Y''_3 | \hat{Y}_2 X_1 X_2 Y'_3) - \quad (2.109)$$

$$- H(Y'_3 | X_1 X_2) + H(Y'_3 | \hat{Y}_2 X_1 X_2) - H(Y''_3 | X_1 X_2 Y'_3) + H(Y''_3 | \hat{Y}_2 X_1 X_2 Y'_3) = \quad (2.110)$$

$$= H(Y_2 Y'_3 | X_1) + \cancel{H(Y''_3 | X_2)} - H(Y_2 Y'_3 | \hat{Y}_2 X_1) - \cancel{H(Y''_3 | \hat{Y}_2 X_2)} - \quad (2.111)$$

$$- H(Y'_3 | X_1) + H(Y'_3 | \hat{Y}_2 X_1) - \cancel{H(Y''_3 | X_2)} + \cancel{H(Y''_3 | \hat{Y}_2 X_2)} = \quad (2.112)$$

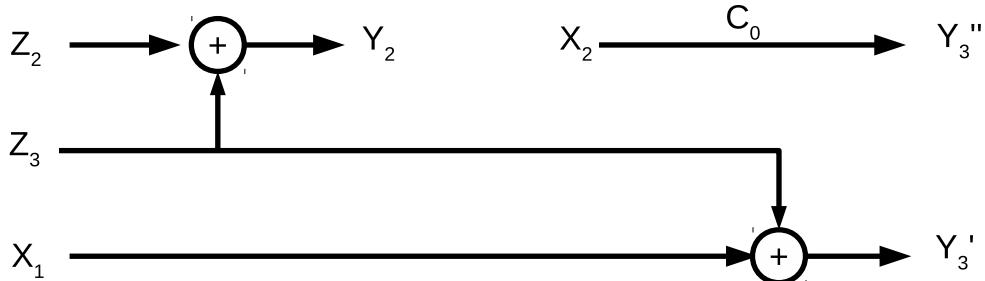
$$= I(\hat{Y}_2; Y_2 Y'_3 | X_1) - I(\hat{Y}_2; Y'_3 | X_1) = \quad (2.113)$$

$$= \cancel{I(\hat{Y}_2; Y'_3 | X_1)} + I(\hat{Y}_2; Y_2 | X_1 Y'_3) - \cancel{I(\hat{Y}_2; Y'_3 | X_1)} = I(\hat{Y}_2; Y_2 | X_1 Y'_3) \quad (2.114)$$

Овие две граници се поклопуваат за детерминистички RC со ортогонални приемни компоненти каде  $Y_2$  е функција од  $(X_1, Y'_3)$ . Доказот следи со земање дека  $\hat{Y}_2 = Y_2$  во долната граница за компримирај-и-проследи (2.99) и со користење на фактот дека  $H(Y_2 | X_1 Y'_3) = 0$ . Треба да се забележи дека капацитетот зависи од  $p(y''_3 | x_2)$  само преку  $C_0$ .

Следниот пример покажува дека CUB не е достиглива во општи случај.

**Пример 2.2.** Релеен канал со сума по модул 2.



Слика 2.6: Релеен канал со сума по модул 2

Да го разгледуваме DMRC со ортогонални приемни компоненти прикажан на слика 2.6, каде:

$$Y'_3 = X_1 \oplus Z_3, \quad Y_2 = Z_2 \oplus Z_3 \quad (2.115)$$

и  $Z_2 \sim Bern(p)^1$ ,  $Z_3 \sim Bern(1/2)$  се независни една од друга и од  $X_1$ .

**Тврдење 2.1.**

За  $C_0 \in [0, 1]$ , капацитетот на овој RC е [14, exp.(16.2)]:

$$C = 1 - H(p * H^{-1}(1 - C_0)) \quad (2.116)$$

каде  $H^{-1}(v) \in [0, 1/2]$  е инверзна функција од бинарната ентрописка функција.

<sup>1</sup>Каде  $Bern(p)$  е Бернулиева PMF (види 8.2).

**Доказ:** Доказот за достигливост следи ако се земе  $\hat{Y}_2 = Y_2 \oplus V$  каде  $V \sim Bern(\alpha)$  е случајна променлива независна од  $(X_1, Z_2, Z_3)$  и  $\alpha = H^{-1}(1 - C_0)$ , во долната граница за CF (2.99) (види глава 8.2). За доказ на реципроцитетот се зема во предвид:

$$nR \leq I(X_1^n; Y_3'^n, Y_3''^n) + n\epsilon_n \quad (2.117)$$

Со оглед на тоа што  $X_1^n$  не зависи од  $(Z_2^n, Z_3^n, X_2^n, Y_3''^n)$  за здружената информација во (2.117) се добива:

$$I(X_1^n; Y_3'^n, Y_3''^n) = \overbrace{I(X_1^n; Y_3''^n)}^0 + I(X_1^n; Y_3'|Y_3''^n) = I(X_1^n; Y_3'|Y_3''^n) \quad (2.118)$$

Ако (2.118) се замени во (2.117) се добива:

$$nR \leq I(X_1^n; Y_3'|Y_3''^n) + n\epsilon_n \quad (2.119)$$

За здружената информација во (2.119) се добива:

$$\begin{aligned} I(X_1^n; Y_3'|Y_3''^n) &= H(Y_3'|Y_3''^n) - H(Y_3'|Y_3''^n, X_1^n) = \\ &= \sum_{i=1}^n H(Y_{3i}'|Y_3''^n, Y_3'^{i-1}) - H(Y_3'|Y_3''^n, X_1^n) \stackrel{(a)}{\leq} \sum_{i=1}^n H(Y_{3i}'|Y_3'^{i-1}) - H(Y_3'|Y_3''^n, X_1^n) \leq \\ &\stackrel{(b)}{\leq} \sum_{i=1}^n H(Y_{3i}') - H(Y_3'|Y_3''^n, X_1^n) \leq n - H(Y_3'|Y_3''^n, X_1^n) \end{aligned} \quad (2.120)$$

Каде (a) следи од фактот дека условеноста ја намалува ентропијата [9, th.(2.6.5)], а (b) од претпоставката дека се работи за DMRC. Ако (2.120) и (2.115) се заменат во (2.119) се добива:

$$\begin{aligned} nR &\leq n - H(Y_3'|X_1^n, Y_3''^n) + n\epsilon_n = n - H(X_1^n + Z_3^n|Y_3''^n, X_1^n) + n\epsilon_n = \\ &= n - H(Z_3^n|Y_3''^n) + n\epsilon_n = n - H(Z_3^n|Y_3''^n) + n\epsilon_n \end{aligned} \quad (2.121)$$

Доколку во (2.121) се употреби векторската форма на Лемата на Г-ѓа Гереберс [14, ch.(2.1)] се добива:

$$n \cdot R \leq n - n \cdot H(p * H^{-1}(H(Y_2^n|Y_3''^n)/n)) + n\epsilon_n, \quad (2.122)$$

Ако се има во предвид дека  $Y_2 \rightarrow X_2 \rightarrow Y_3''$  и се употреби нееднаквоста за процесирање на податоци [9, th.(2.8.1)], аргументот во ентрописката функција во (2.122) може да се сведе на:

$$\begin{aligned} nC_0 &\geq I(X_2^n; Y_3''^n) \geq I(Y_2^n, Y_3''^n) = H(Y_2^n) - H(Y_2^n|Y_3''^n) = n - H(Y_2^n|Y_3''^n) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{H(Y_2^n|Y_3''^n)}{n} \geq 1 - C_0 \end{aligned} \quad (2.123)$$

Ако се замени (2.123) во (2.122) се добива:

$$R \leq 1 - H(p * H^{-1}(1 - C_0)) + \epsilon_n \quad (2.124)$$

Треба да се забележи дека СУВ за овој канал (2.98) се сведува на  $\min\{1 - H(p), C_0\}$  (види глава 8.3), што е строго поголема вредност од капацитетот (2.116) доколку  $p \neq 1/2$  и  $1 - H(p) \leq C_0$ <sup>2</sup>. Оттука следи дека во описан случај СУВ не е многу прецизна.

<sup>2</sup>Лесно се покажува дека за било кое  $\alpha \in [0, 1]$   $H(\alpha * p) \geq H(p)$ , а оттука следи дека  $1 - H(p * H^{-1}(1 - C_0)) \leq 1 - H(p)$ . Еднаквоста се достигнува за  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$ . Значи за овој канал најдовме поточна горна граница која е помала од СУВ, со што се докажува дека СУВ за одредени RC не е многу точна.

### Забелешка 2.2.

Долната граница за методата компримирај-и-проследи може еквивалентно да се карактеризира како:

$$C \geq \max \left\{ I(X_1; \hat{Y}_2, Y_3 | X_2) \right\} \quad (2.125)$$

каде максимумот е по сите условни веројатности  $p(x_1)p(x_2)p(\hat{y}_2|x_2y_2)$  така што:

$$I(X_2; Y_3) \geq I(Y_2; \hat{Y}_2 | X_2 Y_3) \quad (2.126)$$

Еквивалентноста на теорема 2.4 со карактеризацијата во забелешката 2.2 е докажана во [14, app.(16C)].

## 2.4 Гаусов релеен канал

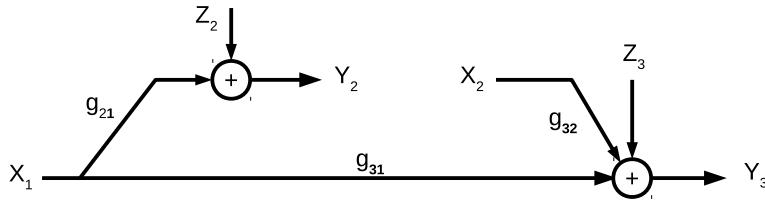
### 2.4.1 Горна пресечна граница и капацитет за DF, DT и каскаден Гаусов RC

Да го разгледуваме Гаусовиот RC прикажан на слика 2.7, кој претставува едноставен модел за безжични точка-точка комуникации преку реле. Излезите на каналот кои кореспондираат на влезовите  $X_1$  и  $X_2$  се:

$$Y_2 = g_{21}X_1 + Z_2$$

$$Y_3 = g_{31}X_1 + g_{32}X_2 + Z_3,$$

каде  $g_{21}$ ,  $g_{31}$ , и  $g_{32}$  се каналните коефициенти, и  $Z_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$  и  $Z_3 \sim \mathcal{N}(0, 1)$  се независните компоненти на шумот. Да претпоставиме дека  $P$  е ограничувањето на средната моќност за  $X_1$  и  $X_2$ . Бидејќи релето може да го испраќа  $X_2$  и прима  $Y_2$  во исто време, овој модел понекогаш се нарекува дуплексен Гаусов RC, за разлика од полу-дуплексниот модел кој ќе биде разгледуван во глава 2.4.3.



Слика 2.7: Гаусов Релеен Канал

Односот сигнал-шум за директниот канал ќе го обележиме со  $\gamma_{31} = g_{31}^2 P$ , односот сигнал-шум на каналот од изворот до дестинацијата со  $\gamma_{21} = g_{21}^2 P$ , и односот сигнал-шум од релето до дестинацијата со  $\gamma_{32} = g_{32}^2 P$ . Треба да се забележи дека во овој модел, релејниот канал не е деградиран и капацитетот не е познат за произволен избор на  $\gamma_{21}, \gamma_{31}, \gamma_{32} > 0$ .

За ваквиот канал ќе ги пресметаме горните и долните граници за капацитетот кои беа анализирани во претходните глави.

**Горна пресечна граница (CUB):** Доказот на CUB дадена во теоремата 2.1 се однесува на произволна азбука од кодни знаци. Со оптимизација на границата за дадено

ограничување на моќност, се покажува дека се постигнува доколку  $(X_1, X_2)$  ја следат здружена Гаусова функција на густина на веројатност [9, eq.(8.35)]:

$$C \leq \max_{0 \leq \rho \leq 1} \min \left\{ C(\gamma_{31} + \gamma_{32} + 2\rho\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}}), C((1 - \rho^2)(\gamma_{31} + \gamma_{21})) \right\} = \quad (2.127)$$

$$= \begin{cases} C \left( \left( \sqrt{\gamma_{21}\gamma_{32}} + \sqrt{\gamma_{31}(\gamma_{31} + \gamma_{21} - \gamma_{32})} \right)^2 / (\gamma_{31} + \gamma_{21}) \right) & \text{доколку } \gamma_{21} \geq \gamma_{32} \\ C(\gamma_{31} + \gamma_{21}) & \text{во спротивно} \end{cases} \quad (2.128)$$

каде  $\rho = E(X_1 X_2) / \sqrt{E(X_1^2) \cdot E(X_2^2)}$ . Доказот на изразот (2.127) е даден во глава 2.130 и [14, app.(16A)].

Доколку се изврши минимизацијата во изразот (2.127) ќе се добие изразот (2.128). Се работи за две непрекинати и конкавни функции кои се сечат во една пресечна точка. До пресечната точка првиот член од парот е помал, а после пресечната точка помал е вториот член. Имајќи го тоа во предвид следи дека пресечната точка всушност претставува максимум на резултантаната функција која е минимум од двете функции. Пресечната точка се наоѓа доколку се реши равенството (2.129)

$$1 + \gamma_{31} + \gamma_{32} + 2\rho\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} - 1 - (1 - \rho^2)(\gamma_{31} + \gamma_{21}) = 0 \quad (2.129)$$

Пресечната точка е:

$$\rho_0 = \frac{-\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} + \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{21} - \gamma_{21}\gamma_{32} + \gamma_{21}^2}}{\gamma_{31} + \gamma_{21}}. \quad (2.130)$$

Доколку пресечната точка (2.130) се замени во, на пример, првиот член од изразот за минимизација во (2.127) ќе се добие

$$f(\rho_0) = 1 + \gamma_{31} + \gamma_{32} + 2\rho_0 \cdot \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} = \\ = 1 + \gamma_{31} + \gamma_{32} + 2 \frac{(-\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} + \sqrt{\gamma_{21}\gamma_{31} - \gamma_{32}\gamma_{21} + \gamma_{21}^2}) \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}}}{\gamma_{31} + \gamma_{21}} = \quad (2.131)$$

$$= 1 + \gamma_{31} + \gamma_{32} + 2 \cdot \underbrace{\left( -\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} + \sqrt{\gamma_{21}(\gamma_{31} - \gamma_{32} + \gamma_{21})} \right) \cdot \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}}}_{\gamma_{31} + \gamma_{21}} = \quad (2.132)$$

$$= 1 + \frac{(\gamma_{31} + \gamma_{32})(\gamma_{31} + \gamma_{21}) + 2 \cdot \left( -\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} + \sqrt{\gamma_{21}(\gamma_{31} - \gamma_{32} + \gamma_{21})} \right) \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}}}{\gamma_{31} + \gamma_{21}} = \quad (2.133)$$

$$= 1 + \frac{\gamma_{31}^2 + \gamma_{21}\gamma_{31} + \gamma_{21}\gamma_{32} - \gamma_{31}\gamma_{32} + 2 \cdot \sqrt{\gamma_{21}\gamma_{31}\gamma_{32}(\gamma_{31} - \gamma_{32} + \gamma_{21})}}{\gamma_{31} + \gamma_{21}} = \quad (2.134)$$

$$= 1 + \frac{\left( \sqrt{\gamma_{21}\gamma_{32}} + \sqrt{\gamma_{31}(\gamma_{31} + \gamma_{21} - \gamma_{32})} \right)^2}{\gamma_{31} + \gamma_{21}} \quad (2.135)$$

Со оглед на тоа што бараме горна граница, а изразот (е) може да биде поголем или помал од нула во зависност од  $\gamma_{21}, \gamma_{31}$  и  $\gamma_{32}$  може да се разликуваат два случаи:

- Доколку  $\gamma_{21} \geq \gamma_{32}$  изразот (е) е поголем од нула и ја дефинира горната граница:

$$\left( -\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} + \sqrt{\gamma_{21}(\gamma_{31} - \gamma_{32} + \gamma_{21})} \right) \cdot \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} = \quad (2.136)$$

$$= \left( -\gamma_{31}\gamma_{32} + \sqrt{\gamma_{21}\gamma_{31}\gamma_{32}(\gamma_{31} + \gamma_{21} - \gamma_{32})} \right) \geq \quad (2.137)$$

$$\geq \left( -\gamma_{31}\gamma_{32} + \sqrt{\gamma_{21}\gamma_{31}\gamma_{32}(\gamma_{31} + \gamma_{21} - \gamma_{21})} \right) = \quad (2.138)$$

$$= (-\gamma_{31}\gamma_{32} + \gamma_{31}\sqrt{\gamma_{21}\gamma_{32}}) \geq (-\gamma_{31}\gamma_{32} + \gamma_{31}\sqrt{\gamma_{32}\gamma_{32}}) = (-\gamma_{31}\gamma_{32} + \gamma_{31}\gamma_{32}) = 0 \quad (2.139)$$

- Доколку  $\gamma_{21} < \gamma_{32}$  изразот (е) е помал од нула и не влијае врз горната граница

$$\left( -\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} + \sqrt{\gamma_{21}(\gamma_{31} - \gamma_{32} + \gamma_{21})} \right) \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} = \left( -\gamma_{31}\gamma_{32} + \sqrt{\gamma_{21}\gamma_{31}\gamma_{32}(\gamma_{31} + \gamma_{21} - \gamma_{32})} \right) \quad (2.140)$$

$$< \left( -\gamma_{31}\gamma_{32} + \sqrt{\gamma_{21}\gamma_{31}\gamma_{32}(\gamma_{31} + \gamma_{21} - \gamma_{21})} \right) = \quad (2.141)$$

$$(-\gamma_{31}\gamma_{32} + \gamma_{31}\sqrt{\gamma_{21}\gamma_{32}}) < (-\gamma_{31}\gamma_{32} + \gamma_{31}\sqrt{\gamma_{32}\gamma_{32}}) = (-\gamma_{31}\gamma_{32} + \gamma_{31}\gamma_{32}) = 0 \quad (2.142)$$

Со ова се докажува изразот (2.129).

Ако се анализира изразот (2.128), може да се забележи дека со зголемување на  $\rho$  се зголемува првиот член од парот за минимизацијата т.е.  $I(X_1, X_2; Y)$  со помагање на преносот во пресекот кој одговара на канал со повеќекратен пристап, но тоа го ограничува преносот на информација во пресекот кој одговара на дифузниот канал. Со други зборови, со воведувањето на корелација помеѓу сигналот на влезот од каналот и сигналот на излезот од релето ја зголемуваваме брзината за пренесување на информации во пресекот од релејниот канал кој одговара на каналот со повеќекратен пристап. Сепак тоа има и свој недостаток, т.е. тоа подразбира помала брзина на пренос на информациите во пресекот од релејниот канал кој одговара на дифузниот канал. Тоа може да се интерпретира како релето да има одредено предзнаење за дел од испраќаната порака од изворот што се должи на корелацијата на  $X_1$  и  $X_2$ .

**Долна граница на капацитет за директен пренос:** За директен пренос долната граница во (2.35) е:

$$C \geq C(\gamma_{31}) \quad (2.143)$$

**Доказ:**

$$C \geq \max_{p(x_1), x_2} I(X_1; Y_3 | X_2 = x_2) \quad (2.144)$$

$$Y_3 = g_{31}X_1 + g_{21}X_2 + Z_3 \quad (2.145)$$

$$I(X_1; Y_3 | X_2 = x_2) = h(Y_3 | X_2 = x_2) - h(Y_3 | X_1, X_2 = x_2) = \quad (2.146)$$

$$= h(g_{31}X_1 + Z_3) - h(Z_3) \leq \quad (2.147)$$

$$\leq \frac{1}{2} \log_2 (2\pi e) \left( \overbrace{g_{31}^2 P}^{\gamma_{31}} + 1 \right) - \frac{1}{2} \log (2\pi e) = \frac{1}{2} \log_2 (\gamma_{31} + 1) = C(\gamma_{31}) \quad (2.148)$$

**Долна граница на капацитет за каскаден релеен канал:** Да ја разгледуваме долната граница на каскадниот релеен канал дадена во (2.36) за дадено ограничување на моќност. Во ошт случај не се познати функциите на густина на веројатност на влезните симболи  $X_1$  и  $X_2$  кои ја оптимизираат горната граница. Доколку се претпостави дека  $X_1$  и  $X_2$  ја следат Гаусовата PDF, се добива [14, eq.(16.5)]:

$$C \geq \min \{C(\gamma_{21}), C(\gamma_{32}/(\gamma_{31} + 1))\} \quad (2.149)$$

**Доказ:**

$$C \geq \max_{p(x_1)p(x_2)} \min \{I(X_2; Y_3), I(X_1; Y_2|X_2)\} \quad (2.150)$$

$$Y_3 = g_{32}X_2 + g_{31} \cdot X_1 + Z_3; \quad Y_2 = g_{21}X_1 + Z_2; \quad \gamma_{32} = g_{32}P \quad (2.151)$$

$$\begin{aligned} I(X_2; Y_3) &= h(Y_3) - h(Y_3|X_2) = \frac{1}{2} \log(2\pi e) (g_{32}^2 P + g_{31}^2 P + 1) - \frac{1}{2} \log(2\pi e) (g_{31}^2 P + 1) = \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{(g_{32}^2 P + g_{31}^2 P + 1)}{(g_{31}^2 P + 1)} = \frac{1}{2} \log \frac{(\gamma_{32} + \gamma_{31} + 1)}{(\gamma_{31} + 1)} = \\ &= \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{\gamma_{32}}{\gamma_{31} + 1} \right) = C \left( \frac{\gamma_{32}}{\gamma_{31} + 1} \right) \end{aligned} \quad (2.152)$$

$$I(X_1; Y_2|X_2) = h(Y_2|X_2) - h(Y_2|X_1X_2) = \quad (2.153)$$

$$= \frac{1}{2} \log(g_{21}^2 \cdot E[X_1^2] + 1) = \frac{1}{2} \log(g_{21}^2 \cdot P + 1) = \frac{1}{2} \log(\gamma_{21} + 1) = C(\gamma_{21}) \quad (2.154)$$

**Долна граница за методата декодирај-и-проследи:** Со максимизација на долната граница за декодирај-и-проследи во теоремата 2.2 за дадено ограничување на моќност се добива [14, eq.(16.6)]:

$$C \geq \max_{0 \leq \rho \leq 1} \min \{C(\gamma_{31} + \gamma_{32} + 2\rho\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}}), C((1 - \rho^2) \cdot \gamma_{21})\} = \quad (2.155)$$

$$= \begin{cases} C \left( \left( \sqrt{\gamma_{31}(\gamma_{21} - \gamma_{32})} + \sqrt{\gamma_{32}(\gamma_{21} - \gamma_{31})} \right)^2 / \gamma_{21} \right) & \text{доколку } \gamma_{21} \geq \gamma_{31} + \gamma_{32} \\ C(\gamma_{21}) & \text{во спротивно} \end{cases} \quad (2.156)$$

**Доказ:**

$$C \geq \max_{p(x_1x_2)} \min \{I(X_1X_2; Y_3), I(X_1; Y_2|X_2)\} \quad (2.157)$$

$$Y_3 = g_{31}X_1 + g_{32}X_2 + Z_3, \quad Y_2 = g_{21}X_1 + Z_2 \quad (2.158)$$

$$I(X_1; Y_2|X_2) = h(Y_2|X_2) - h(Y_2|X_1X_2) \leq \quad (2.159)$$

$$\leq \frac{1}{2} \log(2\pi e) E[Var(Y_2|X_2)] + \frac{1}{2} \log(2\pi e) = \quad (2.160)$$

$$= \frac{1}{2} \log(2\pi e) (E[Var(g_{21}X_1|X_2)] + 1) - \frac{1}{2} \log(2\pi e) = \frac{1}{2} \log(E[Var(g_{21}X_1|X_2)] + 1) \quad (2.161)$$

$$\begin{aligned} E[Var(g_{21}X_1|X_2)] &= E_{x_2} [E_{x_1}(g_{21}^2 X_1^2|X_2)] - g_{21}^2 E_{x_2} [E_{x_1}^2[X_1|X_2]] \leq \\ &\leq g_{21}^2 E_{x_1}(X_1^2) - \frac{g_{21}^2 E_{x_1x_2}^2[X_1X_2]}{E[X_2^2]} = \end{aligned} \quad (2.162)$$

$$= g_{21}^2 E_{x_1}(X_1^2) - \frac{g_{21}^2 E[X_1^2] \cdot E_{x_1x_2}^2[X_1X_2]}{E[X_2^2] E[X_1^2]} = \gamma_{21} - \gamma_{21}\rho^2 = \gamma_{21}(1 - \rho^2) \quad (2.163)$$

Ако се замени (2.163) во (2.161) се добива за вторито член од парот за минимизација се добива:

$$I(X_1; Y_2|X_2) = \frac{1}{2} \log(2\pi e) (1 + \gamma_{21}(1 - \rho^2)) = C(\gamma_{21}(1 - \rho^2)) \quad (2.164)$$

Првиот член од (2.155) се добива со користење на (8.30)-(8.32) (види додаток 8.4).

**Тврдење 2.2.**

Доколку се изврши минимизацијата во изразот (2.155) се добива изразот (2.156).

**Доказ:** Доказот ги следи чекорите (2.129)- (2.142) од анализата на СУВ за Гаусов релеен канал. Се бара пресечната точка на двете криви од парот за минимизација во која се достигнува максимум.

$$\gamma_{31} + \gamma_{32} + 2\rho\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} - (1 - \rho^2) \cdot \gamma_{21} = 0 \quad (2.165)$$

$$\rho_0 = -\frac{\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} - \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32} - \gamma_{31}\gamma_{21} - \gamma_{21}\gamma_{32} + \gamma_{21}^2}}{\gamma_{21}} \quad (2.166)$$

Доколку пресечната точка (2.166) се замени во на пример првиот член од изразот на минимизација (2.155) ќе се добие:

$$f(\rho_0) = 1 + \gamma_{31} + \gamma_{32} - 2 \cdot \frac{(\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} + \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32} - \gamma_{31}\gamma_{21} - \gamma_{21}\gamma_{32} + \gamma_{21}^2}) \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}}}{\gamma_{21}} = \quad (2.167)$$

$$= 1 + \gamma_{31} + \gamma_{32} - \frac{2 \cdot (\gamma_{31}\gamma_{32} + \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}(\gamma_{31}\gamma_{32} - \gamma_{31}\gamma_{21} - \gamma_{21}\gamma_{32} + \gamma_{21}^2)})}{\gamma_{21}} = \quad (2.168)$$

$$= \frac{\gamma_{21} + \gamma_{31}\gamma_{21} + \gamma_{32}\cdot\gamma_{21} - 2\cdot\gamma_{31}\gamma_{32} + 2\cdot\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}(\gamma_{31}\gamma_{32} - \gamma_{31}\gamma_{21} - \gamma_{21}\gamma_{32} + \gamma_{21}^2)}}{\gamma_{21}} \quad (2.169)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{31}\gamma_{32}(\gamma_{31}\gamma_{32} - \gamma_{31}\gamma_{21} - \gamma_{21}\gamma_{32} + \gamma_{21}^2) &= \gamma_{31}\gamma_{32}(\gamma_{31}(\gamma_{32} - \gamma_{21}) + \gamma_{21}(\gamma_{21} - \gamma_{32})) = \\ &= \gamma_{31}\gamma_{32}(-\gamma_{31}(\gamma_{21} - \gamma_{32}) + \gamma_{21}(\gamma_{21} - \gamma_{32})) = \gamma_{31}\gamma_{32}(\gamma_{21} - \gamma_{31})(\gamma_{21} - \gamma_{32}). \end{aligned} \quad (2.170)$$

Доколку се замени (2.170) во (2.169) се добива:

$$f(\rho_0) = 1 + \frac{\gamma_{31}\gamma_{21} + \gamma_{32}\cdot\gamma_{21} - 2\cdot\gamma_{31}\gamma_{32} + 2\cdot\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}(\gamma_{21} - \gamma_{31})(\gamma_{21} - \gamma_{32})}}{\gamma_{21}} \quad (2.171)$$

Броителот во (2.171) може да се прикаже во следнава форма:

$$\begin{aligned} &\left( \sqrt{\gamma_{31}(\gamma_{21} - \gamma_{32})} + \sqrt{\gamma_{32}(\gamma_{21} - \gamma_{31})} \right)^2 = \\ &= \gamma_{31}(\gamma_{21} - \gamma_{32}) + \gamma_{32}(\gamma_{21} - \gamma_{31}) + 2\sqrt{\gamma_{31}(\gamma_{21} - \gamma_{32}) \cdot \gamma_{32}(\gamma_{21} - \gamma_{31})} = \\ &= \gamma_{31}\gamma_{21} + \gamma_{32}\gamma_{21} - 2\cdot\gamma_{32}\gamma_{31} + 2\sqrt{\gamma_{31}\cdot\gamma_{32}\cdot(\gamma_{21} - \gamma_{32})\cdot(\gamma_{21} - \gamma_{31})}. \end{aligned} \quad (2.172)$$

Конечно, со замена на (2.172) во (2.171) се добива изразот 2.156. Треба да се забележи дека кога  $\gamma_{21} \leq \gamma_{31}$ , брзината на пренесување на податоците за декодирај-и-проследи станува помала од онаа за директен пренос  $C(\gamma_{31})$ .

Анализата на капацитетот за *деградиран* гаусов канал кој користи DF постапка за процесирање на податоците во релето е даден во глава 8.5.

**Долна граница за некохерентен декодирај-и-проследи канал:** Бидејќи имплементацијата на кохерентни комуникации е тешка во бежичните системи, може да се користи некохерентниот декодирај-и-проследи канал, каде  $X_1$  и  $X_2$  се независни. Во тој случај долната граница е [14, eq.(16.7)]:

$$C \geq \min \{C(\gamma_{31} + \gamma_{32}), C(\gamma_{21})\} \quad (2.173)$$

Оваа метода го користи истиот начин за генерирање на кодната книга и чекорите за кодирање како за каскадниот релеен канал, но постигнува поголема брзина на пренесување заради тоа што врши истовремено декодирање.

$$Y_3 = g_{31}X_1 + g_{32}X_2 + Z_3, \quad Y_2 = g_{21}X_1 + Z_2, \quad \gamma_{31} = g_{31}P = g_{31}E(X_1^2) \quad (2.174)$$

$$I(X_1, X_2; Y_3) = h(Y_3) - h(Y_3|X_1X_2) = h(Y_3) - \frac{1}{2} \log(2\pi e) \leq \frac{1}{2} \log(E(Y_3^2)) \quad (2.175)$$

$$\leq \frac{1}{2} \log(1 + g_{31}^2 E[X_1^2] + g_{32}^2 E[X_2^2] + 2g_{31}g_{32}E[X_1X_2]) \quad (2.176)$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot \log \left( 1 + \gamma_{31} + \gamma_{32} + 2\rho E(X_1) E(X_2) \right) = \frac{1}{2} \cdot \log(1 + \gamma_{31} + \gamma_{32}) = C(\gamma_{31} + \gamma_{32}) \quad (2.177)$$

$$I(X_1; Y_2|X_2) = h(Y_2|X_2) - h(Y_2|X_1X_2) = \quad (2.178)$$

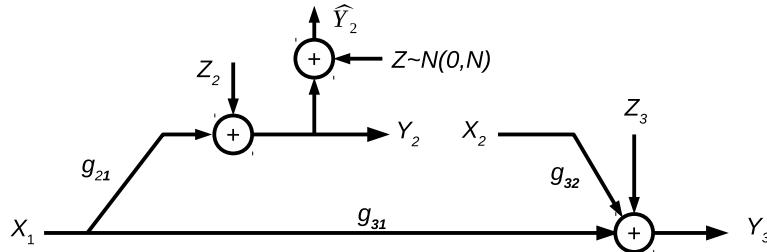
$$= h(g_{21}X_1 + Z_2|X_2) - h(g_{21}X_1 + Z_2|X_1, X_2) = \quad (2.179)$$

$$= \frac{1}{2} \log(2\pi e)(g_{21}^2 P + 1) - \frac{1}{2} \log(2\pi e) = \frac{1}{2} \log(1 + \gamma_{21}) = C(\gamma_{21}) \quad (2.180)$$

## 2.4.2 Гаусов канал со компримирај-и-проследи

Условната веројатност  $F(x_1)F(x_2)F(\hat{y}_2|y_2, x_2)$  која ја достигнува долната граница на компримирај-и-проследи во теоремата 2.4 не е позната во општа форма за Гаусов RC. Да земеме дека  $X_1 \sim \mathcal{N}(0, P)$ ,  $X_2 \sim N(0, P)$ , и  $Z \sim \mathcal{N}(0, N)$  се здружено независни и  $\hat{Y}_2 = Y_2 + Z$  (види слика 2.8). Со замена во долната граница од компримирај-и-проследи (теорема 2.4) и оптимизација по  $N$ , се добива долната граница [14, eq.(16.12)]:

$$C \geq C \left( \gamma_{31} + \frac{\gamma_{21}\gamma_{32}}{\gamma_{31} + \gamma_{21} + \gamma_{32} + 1} \right) \quad (2.181)$$



Слика 2.8: Компримирај-и-проследи за Гаусов релеен канал

**Доказ:** Имајќи во предвид дека  $X_1 \sim \mathcal{N}(0, P)$ ,  $X_2 \sim N(0, P)$ , и  $Z \sim \mathcal{N}(0, N)$  се здружено независни и  $\hat{Y}_2 = Y_2 + Z$ :

$$Y_3 = g_{31}X_1 + g_{32}X_2 + Z_3 \quad Y_2 = g_{21}X_1 + Z_2 \quad \hat{Y}_2 = Y_2 + Z = g_{21}X_1 + Z_2 + Z = g_{21}X_1 + Z_3 \quad (2.182)$$

Доколку (2.182) се замени во (2.73) за изразите од разликата во првиот член од минимизацијата се добива:

$$\begin{aligned} I(X_1, X_2; Y_3) &= h(Y_3) - h(Y_3|X_1X_2) \leq \frac{1}{2} \log(2\pi e)(g_{31}^2 P + g_{32}^2 P + 1) - \frac{1}{2} \log(2\pi e) = \\ &= \frac{1}{2} \log(1 + \gamma_{31} + \gamma_{32}) = C(\gamma_{31} + \gamma_{32}) \end{aligned} \quad (2.183)$$

$$\begin{aligned} I(Y_2; \hat{Y}_2|X_1X_2Y_3) &= h(\hat{Y}_2|X_1X_2Y_3) - h(\hat{Y}_2|X_1X_2Y_3Y_2) = \\ &= h(Y_2 + Z|X_1X_2Y_3) - h(Y_2 + Z|X_1X_2Y_3Y_2) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h(g_{21}X_1 + Z_2 + Z|X_1X_2Y_3) - \frac{1}{2} \log(2\pi e)(N) = \\
&= \frac{1}{2} \log(2\pi e)(N+1) - \frac{1}{2} \log(2\pi e)(N) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{N+1}{N}\right)
\end{aligned} \tag{2.184}$$

за вториот член од (2.73) се добива:

$$\begin{aligned}
I(X_1; \hat{Y}_2, Y_3|X_2) &= h(\hat{Y}_2, Y_3|X_2) - h(\hat{Y}_2, Y_3|X_1X_2) = \\
&= h(\hat{Y}_2|X_2) + h(Y_3|X_2\hat{Y}_2) - h(\hat{Y}_2|X_1X_2) - h(Y_3|X_1X_2\hat{Y}_2) = \\
&= h(g_{21}X_1 + Z_2 + Z|X_2) + h(g_{31}X_1 + g_{32}X_2 + Z_3|X_2\hat{Y}_2) - \\
&\quad - h(g_{21}X_1 + Z_2 + Z|X_1X_2) - h(g_{31}X_1 + g_{32}X_2 + Z_3|X_1X_2\hat{Y}_2) \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \log(E[Var(g_{21}X_1)] + 1 + N) + \frac{1}{2} \log\left(E[Var(g_{31}X_1|\hat{Y}_2)] + 1\right) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \log 2\pi e(1 + N) - \frac{1}{2} \log 2\pi e = \\
&= \frac{1}{2} \log 2\pi e(\gamma_{21} + 1 + N) + \frac{1}{2} \log 2\pi e\left(\gamma_{31} - \frac{g_{31}^2 E^2(X_1 \cdot \hat{Y}_2)}{E[\hat{Y}_2^2]} + 1\right) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \log 2\pi e(1 + N) - \frac{1}{2} \log 2\pi e = \\
&= \frac{1}{2} \log \frac{(\gamma_{21} + 1 + N)}{N+1} + \frac{1}{2} \log\left(\gamma_{31} - \frac{g_{31}^2 E^2(X_1 \cdot (g_{21}X_1 + Z_2 + Z))}{E[\hat{Y}_2^2]} + 1\right) = \\
&= \frac{1}{2} \log \frac{(\gamma_{21} + 1 + N)}{N+1} + \frac{1}{2} \log\left(\gamma_{31} - \frac{g_{31}^2 g_{21}^2 E^2(X_1^2)}{\gamma_{21} + 1 + N} + 1\right) = \\
&= \frac{1}{2} \log \frac{(\gamma_{21} + 1 + N)}{N+1} + \frac{1}{2} \log\left(\gamma_{31} - \frac{\gamma_{31}\gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N} + 1\right) \\
&= \frac{1}{2} \log \frac{(\gamma_{21} + 1 + N)}{N+1} \cdot \left(\gamma_{31} - \frac{\gamma_{31}\gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N} + 1\right)
\end{aligned} \tag{2.185}$$

Доколку се заменат (2.183), 2.184 и (2.185) во (2.73) се добива:

$$\begin{aligned}
C &\geq \max \min \left\{ \frac{1}{2} \log(1 + \gamma_{31} + \gamma_{32}) \cdot \left( \frac{N}{N+1} \right), \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} \log \frac{(\gamma_{21} + 1 + N)}{N+1} \cdot \left( \gamma_{31} - \frac{\gamma_{31}\gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N} + 1 \right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.186}$$

Се работи за две непрекинати и конкавни функции кои се сечат во една пресечна точка. До пресечната точка првиот член од парот е помал, а после пресечната точка помал е вториот член. Имајќи го тоа во предвид следи дека пресечната точка всушност претставува максимум на резултантаната функција која е минимум од двете функции. Имајќи го тоа во предвид, пресечната точка се наоѓа доколку се реши равенството (2.187):

$$(1 + \gamma_{31} + \gamma_{32}) \cdot \left( \frac{N}{N+1} \right) - \frac{(\gamma_{21} + 1 + N)}{N+1} \cdot \left( \gamma_{31} - \frac{\gamma_{31}\gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N} + 1 \right) = 0 \tag{2.187}$$

Пресечната точка е дадена со (2.188):

$$N_0 = \frac{1 + \gamma_{31} + \gamma_{21}}{\gamma_{32}} \quad (2.188)$$

Ако (2.188) се замени во првиот или вториот член од минимизацијата во (2.186) ќе се добие:

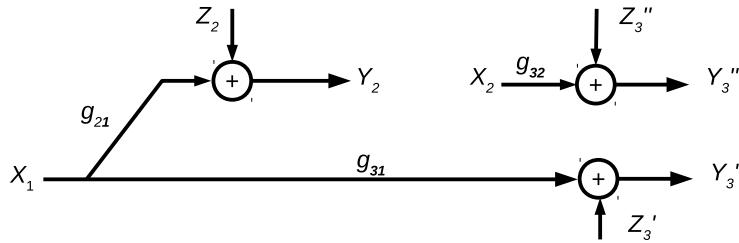
$$\begin{aligned} \frac{(1 + \gamma_{31} + \gamma_{32}) \cdot (1 + \gamma_{31} + \gamma_{21})}{\gamma_{32} \cdot \left( \frac{1 + \gamma_{31} + \gamma_{21}}{\gamma_{32}} + 1 \right)} &= \frac{(1 + \gamma_{31} + \gamma_{32}) \cdot (1 + \gamma_{31} + \gamma_{21})}{(1 + \gamma_{31} + \gamma_{21} + \gamma_{32})} = \\ &= \frac{\gamma_{31}^2 + \gamma_{21}\gamma_{31} + \gamma_{32}\gamma_{31} + 2\gamma_{31} + \gamma_{21} + \gamma_{21}\gamma_{32} + \gamma_{32} + 1}{(1 + \gamma_{31} + \gamma_{21} + \gamma_{32})} = \\ &= 1 + \frac{\gamma_{31}^2 + \gamma_{21}\gamma_{31} + \gamma_{32}\gamma_{31} + \gamma_{31} + \gamma_{21}\gamma_{32}}{(1 + \gamma_{31} + \gamma_{21} + \gamma_{32})} = \\ &= 1 + \frac{\gamma_{31}(\gamma_{31} + \gamma_{21} + \gamma_{32} + 1) + \gamma_{21}\gamma_{32}}{(1 + \gamma_{31} + \gamma_{21} + \gamma_{32})} = 1 + \gamma_{31} + \frac{\gamma_{21}\gamma_{32}}{(1 + \gamma_{31} + \gamma_{21} + \gamma_{32})}, \end{aligned} \quad (2.189)$$

со што се докажува (2.181). Границата во (2.181) се достигнува ако  $\gamma_{32} \rightarrow \infty$ . Кога вредноста на  $\gamma_{21}$  е мала, границата може да се подобри со временска распределба во предавателот на изворот.

CF методата дава подобри резултати од DF кога каналот од изворот до релето е послаб од каналот од изворот до дестинацијата т.е. кога  $\gamma_{21} < \gamma_{31}$ , или кога каналот од релето до дестинацијата е доволно силен. DF методата покажува подобри резултати од CF во другите режими. Во оштат случај, може да се покаже дека и двата методи достигнуваат брзини на пренесување во рамките на пола бит од CUB[14, ch.(16.7.2)].

### 2.4.3 Гаусов релеен канал со фреквентна распределба во дестинацијата

Релејниот канал со фреквентна распределба во приемникот на дестинацијата (анг. RFD - Receiver Frequency Division) прикажан на слика 2.9 еден од можните начини за имплементација на релејниот канал со ортогонални приемни компоненти.



Слика 2.9: Гаусов канал со фреквентна распределба во дестинацијата

Во овој *полудуплексен* модел, каналот од релето до дестинацијата користи различен фреквентен опсег од дифузниот канал од изворот до релето и дестинацијата. Уште поточно, во овој модел  $Y_3 = (Y'_3, Y''_3)$  и

$$Y_2 = g_{21}X_1 + Z_2, \quad Y'_3 = g_{31}X_1 + Z'_3 \quad Y''_3 = g_{32}X_2 + Z''_3, \quad (2.190)$$

каде  $g_{21}$ ,  $g_{31}$ , и  $g_{32}$  се каналните коефициенти, и  $Z_2 \sim N(0, 1)$  и  $Z_3 \sim N(0, 1)$  се независните компоненти на шумот. Да претпоставиме дека за  $X_1$  и  $X_2$  постои ограничување на средната моќност на вредност  $P$ . Капацитетот на овој канал не е познат во оштат случај.

**Тврдење 2.3.**

CUB во теоремата 2.1 (под услов на ограничувањето на моќност) се сведува на [14, eq.(16.15)]:

$$C \leq \begin{cases} C(\gamma_{31}) + C(\gamma_{32}) & \text{доколку } \gamma_{21} \geq \gamma_{32}(\gamma_{31} + 1) \\ C(\gamma_{21} + \gamma_{31}) & \text{во спротивно} \end{cases} \quad (2.191)$$

**Доказ:** СУБ за приемник со ортогонални приемни компоненти е дадена со (2.98):

$$C \leq \max_{p(x_1)} \min \{I(X_1; Y'_3) + C_0, I(X_1; Y_2, Y'_3)\}; \quad (2.192)$$

$$C_0 = \max_{p(x_2)} I(X_2; Y''_3); \quad p(y_2, y_3 | x_1 x_2) = p(y'_3, y_2 | x_1) p(y''_3 | x_2) \quad (2.193)$$

Ако се употреби (2.190) во (2.193) ќе се добие:

$$C_0 = I(X_2; Y''_3) = h(Y''_3) - h(Y''_3 | X_2) = \frac{1}{2} \log(\gamma_{32} + 1) = C(\gamma_{32}) \quad (2.194)$$

$$I(X_1; Y'_3) = h(Y'_3) - h(Y'_3 | X_1) = \frac{1}{2} \log 2\pi e (g_{31}^2 P + 1) - \frac{1}{2} \log(2\pi e) = \frac{1}{2} \log(1 + \gamma_{31}) = C(\gamma_{31}) \quad (2.195)$$

$$I(X_1; Y'_3) + C_0 = C(\gamma_{31}) + C(\gamma_{32}) = \frac{1}{2} \log(1 + \gamma_{31})(1 + \gamma_{32}) \quad (2.196)$$

Вториот член од изразот за минимизација во (2.192) може да се сведе на:

$$\begin{aligned} I(X_1; Y_2, Y'_3) &= h(Y_2 Y'_3) - h(Y_2 Y'_3 | X_1) = h(Y_2) + h(Y'_3 | Y_2) - h(Y_2 | X_1) - h(Y'_3 | Y_2 X_1) = \\ &\leq \frac{1}{2} \log(2\pi e)(\gamma_{21} + 1) + \frac{1}{2} \log(2\pi e) \left( E[Y'^2_3] - \frac{E^2[Y'_3 \cdot Y_2]}{E[Y^2_2]} \right) - \frac{1}{2} \cdot \log(2\pi e) - \frac{1}{2} \cdot \log(2\pi e) = \\ &= \frac{1}{2} \log(\gamma_{21} + 1) + \frac{1}{2} \log \left( \gamma_{31} + 1 - \frac{E^2[(g_{31}X_1 + Z_3) \cdot (g_{21}X_1 + Z_2)]}{E[Y^2_2]} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \log(\gamma_{21} + 1) + \frac{1}{2} \log \left( \gamma_{31} + 1 - \frac{g_{31}^2 g_{21}^2 \cdot E^2[X_1^2]}{\gamma_{21} + 1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \log(\gamma_{21} + 1) + \frac{1}{2} \log \left( \gamma_{31} + 1 - \frac{\gamma_{21} \gamma_{31}}{\gamma_{21} + 1} \right) = \frac{1}{2} \log(\gamma_{21} + 1) \cdot \left( \gamma_{31} + 1 - \frac{\gamma_{21} \gamma_{31}}{\gamma_{21} + 1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \log(1 + \gamma_{21} + \gamma_{31}) \end{aligned} \quad (2.197)$$

Ако се заменат (2.194), (2.195) и (2.197) во (2.192) се добива:

$$\begin{aligned} C &\leq \max_{p(x_1)} \min \{I(X_1; Y'_3) + C_0, I(X_1; Y_2, Y'_3)\} = \\ &= \max_{p(x_1)} \left\{ \frac{1}{2} \log(1 + \gamma_{31}) + \frac{1}{2} \log(1 + \gamma_{32}), \frac{1}{2} \log(1 + \gamma_{21} + \gamma_{31}) \right\} \end{aligned} \quad (2.198)$$

$$\begin{aligned} (1 + \gamma_{31})(1 + \gamma_{32}) &\leq (1 + \gamma_{31} + \gamma_{21}) \quad \gamma_{32}\gamma_{31} + \gamma_{31} + \gamma_{32} + 1 \leq \\ &\leq 1 + \gamma_{31} + \gamma_{21} \quad \gamma_{32}\gamma_{31} + \gamma_{32} \leq \gamma_{21} \quad \gamma_{32}(\gamma_{31} + 1) \leq \gamma_{21} \end{aligned} \quad (2.199)$$

Доколку во изразот (2.199) десната страна од знакот  $\leq$  е поголема од левата тогаш минимизацијата во (2.198) го дава првиот член, а доколку левата страна е поголема од десната тогаш минимизацијата во (2.198) го дава вториот член со што се потврдува тврдењето 2.3.

**Тврдење 2.4.**

Долната граница за декодирај-и-проследи во теоремата 2.2 за RFD канал се сведува на [14, eq.(16.16)]:

$$C \geq \begin{cases} C(\gamma_{31}) + C(\gamma_{32}) & \text{доколку } \gamma_{21} \geq \gamma_{32}(\gamma_{31} + 1) \\ C(\gamma_{21}) & \text{во спротивно} \end{cases} \quad (2.200)$$

**Доказ:** Долната граница за декодирај-и-проследи согласно теорема 2.2 е:

$$C \geq \max_{p(x_1x_2)} \min \{I(X_1, X_2; Y_3), I(X_1; Y_2|X_2)\} \quad (2.201)$$

$$Y_2 = g_{21}X_1 + Z_2, \quad Y'_3 = g_{31}X_1 + Z'_3, \quad Y''_3 = g_{32}X_2 + Z''_3 \quad (2.202)$$

Ако изразите за Гаусов RFD канал (2.202) се заменат во (2.201), првиот член од (2.201) се сведува на:

$$\begin{aligned} I(X_1X_2; Y_3) &= I(X_1X_2; Y'_3, Y''_3) = I(X_1X_2; Y'_3) + I(X_1X_2; Y''_3|Y'_3) = \\ &= h(Y'_3) - h(Y'_3|X_1X_2) + h(Y''_3|Y'_3) - h(Y''_3|X_1X_2Y'_3) = \\ &= h(Y'_3) - h(Y'_3|X_1) + h(Y''_3) - h(Y''_3|X_2) = I(X_1; Y'_3) + I(X_2; Y''_3) = \\ &= \frac{1}{2} \log 2\pi e (\gamma_{31} + 1) - \frac{1}{2} \log 2\pi e + \frac{1}{2} \log 2\pi e (\gamma_{32} + 1) - \frac{1}{2} \log 2\pi e = C(\gamma_{31}) + C(\gamma_{32}) \end{aligned} \quad (2.203)$$

Вториот член од (2.201) се сведува на:

$$I(X_1; Y_2|X_2) = h(Y_2|X_2) - h(Y_2|X_2X_1) \leq \frac{1}{2} \log 2\pi e \cdot (\gamma_{21} + 1) - \frac{1}{2} \log 2\pi e = C(\gamma_{21}) \quad (2.204)$$

Ако (2.203) и (2.204) се заменат во (2.201) се добива:

$$C \geq \max_{p(x_1x_2)} \min \{C(\gamma_{31}) + C(\gamma_{32}), C(\gamma_{21})\} \quad (2.205)$$

$$\log(1 + \gamma_{31}) + \frac{1}{2} \log(1 + \gamma_{32}) \leq \frac{1}{2} \cdot \log(1 + \gamma_{21}) \quad (2.206)$$

$$\begin{aligned} (1 + \gamma_{31}) \cdot (1 + \gamma_{32}) &\leq (1 + \gamma_{21}) & 1 + \gamma_{31} + \gamma_{32}(1 + \gamma_{31}) &\leq 1 + \gamma_{21} \\ \gamma_{31} + \gamma_{32}(1 + \gamma_{31}) &\leq \gamma_{21} \end{aligned} \quad (2.207)$$

Доколку во изразот (2.207) десната страна од знакот  $\leq$  е поголема од левата тогаш минимизацијата во (2.205) го дава првиот член, а доколку левата страна е поголема од десната тогаш минимизацијата во (2.205) го дава вториот член со што се потврдува изразот (2.200) односно тврдењето 2.4. Кога  $\gamma_{21} \geq \gamma_{31} + \gamma_{32}(\gamma_{31} + 1)$  границите во (2.191) и (2.200) се поклопуваат и капацитетот  $C = C(\gamma_{31}) + C(\gamma_{32})$  се достигнува со декодирај-и-проследи. Доколку  $\gamma_{21} \leq \gamma_{31}$ , долната граница за декодирај-и-проследи  $C(\gamma_{21})$  е полоша од долната граница за директен пренос  $C(\gamma_{31})$ .

**Тврдење 2.5.**

Долната граница за компримирај-и-проследи во теорема 2.4 со  $X_1 \sim N(0, P)$ ,  $X_2 \sim N(0, P)$  и  $Z \sim N(0, N)$ , кои се независни една од друга, и  $\hat{Y}_2 = Y_2 + Z$ , се сведува (после оптимизацијата по  $N$ ) на [14, eq.(16.17)]:

$$C \geq C \left( \gamma_{31} + \frac{\gamma_{21}\gamma_{32}(\gamma_{31} + 1)}{\gamma_{21} + (\gamma_{31} + 1)(\gamma_{32} + 1)} \right). \quad (2.208)$$

**Доказ:** Доколку во долната граница за CF RFD канал ((2.99)) се заменат:

$$\hat{Y}_2 = Y_2 + Z \quad X_1 \sim N(0, P), \quad X_2 \sim N(0, P) \text{ и } Z \sim N(0, N) \quad (2.209)$$

$$Y_2 = g_{21}X_1 + Z_2, \quad Y'_3 = g_{31}X_1 + Z'_3, \quad Y''_3 = g_{32}X_2 + Z''_3 \quad \hat{Y}_2 = Y_2 + Z = g_{21}X_1 + Z_2 + Z \quad (2.210)$$

за вториот член од минимизацијата во (2.99) се добива:

$$\begin{aligned} I(X_1; \hat{Y}_2, Y'_3) &= I(X_1; \hat{Y}_2) + I(X_1; Y'_3 | \hat{Y}_2) = h(\hat{Y}_2) - h(\hat{Y}_2 | X_1) + I(X_1; Y'_3 | \hat{Y}_2) \\ &= h(g_{21}X_1 + Z_2 + Z) - h(g_{21}X_1 + Z_2 + Z | X_1) + I(X_1; Y'_3 | \hat{Y}_2) = \\ &= \frac{1}{2} \log(2\pi e)(\gamma_{21} + 1 + N) - \frac{1}{2} \log(2\pi e)(1 + N) + I(X_1; Y'_3 | \hat{Y}_2) = \end{aligned} \quad (2.211)$$

Приемниот сигнал во релето  $y_2$  (односно неговата реконструкција  $\hat{y}_2$ ) и сигналот во дестинацијата  $y'_3$  се корелирани бидејќи тие се копии од еден ист сигнал ( $x_1$ ) добиени од две независни патеки со шум и просторно слабеење. Имајќи го ова во предвид за условната здружената информација во (2.211) се добива:

$$I(X_1; Y'_3 | \hat{Y}_2) = h(Y'_3 | \hat{Y}_2) - h(Y'_3 | X_1 \hat{Y}_2) \quad (2.212)$$

$$\begin{aligned} h(Y'_3 | \hat{Y}_2) &= E[h(Y'_3 | \hat{y}_2)] \leq E\left[\frac{1}{2} \log 2\pi e (Var(Y'_3 | \hat{y}_2))\right] \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \log 2\pi e (E[Var(Y'_3 | \hat{y}_2)]) \leq \frac{1}{2} \log 2\pi e \left(E[Y'^2_3] - \frac{E^2[Y'_3 \hat{Y}_2]}{E[\hat{Y}_2^2]}\right) \end{aligned} \quad (2.213)$$

Изразот под логаритамот во (2.213) може да се сведе на:

$$\begin{aligned} E[Y'^2_3] - \frac{E^2[Y'_3 \hat{Y}_2]}{E[\hat{Y}_2^2]} &= \gamma_{31} + 1 - \frac{E^2[(g_{31}X_1 + Z'_3) \cdot (g_{21}X_1 + Z_2 + Z)]}{\gamma_{21} + 1 + N} = \\ &= \gamma_{31} + 1 - \frac{g_{31}^2 g_{21}^2 P^2}{\gamma_{21} + 1 + N} = \gamma_{31} + 1 - \frac{\gamma_{31} \gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N} \end{aligned} \quad (2.214)$$

Ако се замени (2.214) во (2.213) ќе се добие:

$$h(Y'_3 | \hat{Y}_2) \leq \frac{1}{2} \log 2\pi e \left(\gamma_{31} + 1 - \frac{\gamma_{31} \gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N}\right) \quad (2.215)$$

Ако (2.215) се замени во (2.212) се добива:

$$\begin{aligned} I(X_1; Y'_3 | \hat{Y}_2) &\leq \frac{1}{2} \log 2\pi e \left(\gamma_{31} + 1 - \frac{\gamma_{31} \gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N}\right) - \frac{1}{2} \log 2\pi e = \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\gamma_{31} + 1 - \frac{\gamma_{31} \gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N}\right) \end{aligned} \quad (2.216)$$

Ако (2.216) се замени во (2.211) се добива:

$$I(X_1; \hat{Y}_2, Y'_3) \leq \frac{1}{2} \log(2\pi e)(\gamma_{21} + 1 + N) - \frac{1}{2} \log(2\pi e)(1 + N) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \cdot \log \left( \gamma_{31} + 1 - \frac{\gamma_{31}\gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N} \right) = \\
& = \frac{1}{2} \log \left( \frac{\gamma_{21}}{1 + N} + 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot \log \left( \gamma_{31} + 1 - \frac{\gamma_{31}\gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N} \right) = \\
& = \frac{1}{2} \log \left( \frac{\gamma_{21}}{1 + N} + 1 \right) \left( \gamma_{31} + 1 - \frac{\gamma_{31}\gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N} \right)
\end{aligned} \tag{2.217}$$

Првиот член од изразот за минимизацијата во (2.99) е:

$$C_1 = I(X_1; Y'_3) + C_0 - I(Y_2; \hat{Y}_2 | X_1 Y'_3) \tag{2.218}$$

Првите два члена од (2.218) се сведуваат на:

$$I(X_1; Y'_3) = \frac{1}{2} \log(\gamma_{31} + 1) \tag{2.219}$$

$$C_0 = I(X_2; Y''_3) = \frac{1}{2} \log(\gamma_{32} + 1) \tag{2.220}$$

Третиот член од (2.218) се сведува на:

$$\begin{aligned}
I(Y_2; \hat{Y}_2 | X_1 Y'_3) &= h(\hat{Y}_2 | X_1 Y'_3) - h(\hat{Y}_2 | X_1 Y'_3 Y_2) = h(g_{21}X_1 + Z_2 + Z | X_1 Y'_3) - \\
&- h(Y_2 + Z | X_1 Y'_3 Y_2) = \frac{1}{2} \log 2\pi e (1 + N) - \frac{1}{2} \log 2\pi e N = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1}{N} + 1 \right)
\end{aligned} \tag{2.221}$$

Доколку се заменат (2.219), (2.220) и (2.221) во (2.218) се добива:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{2} \log(\gamma_{31} + 1) + \frac{1}{2} \log(\gamma_{32} + 1) - \frac{1}{2} \log \left( \frac{1}{N} + 1 \right) = \\
&= \frac{1}{2} \log(\gamma_{31} + 1)(\gamma_{32} + 1) \left( \frac{N}{N+1} \right)
\end{aligned} \tag{2.222}$$

Доколку (2.222) и (2.217) се заменат во (2.99) се добива:

$$\begin{aligned}
C &= \min \left\{ \frac{1}{2} \log(\gamma_{31} + 1)(\gamma_{32} + 1) \left( \frac{N}{N+1} \right), \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} \log \left( \frac{\gamma_{21}}{1+N} + 1 \right) \left( \gamma_{31} + 1 - \frac{\gamma_{31}\gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.223}$$

Се работи за две непрекинати и конкавни функции кои се сечат во една пресечна точка. До пресечната точка едниот член од парот е помал, а после пресечната точка помал е другиот член. Имајќи го тоа во предвид следи дека пресечната точка всушност претставува максимум на резултантаната функција која е минимум од двете функции. Пресечната точка се наоѓа доколку се реши равенството:

$$(\gamma_{31} + 1)(\gamma_{32} + 1) \left( \frac{N}{N+1} \right) - \left( \frac{\gamma_{21}}{1+N} + 1 \right) \left( \gamma_{31} + 1 - \frac{\gamma_{31}\gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N} \right) = 0 \tag{2.224}$$

$$N_0 = \frac{1 + \gamma_{31} + \gamma_{21}}{\gamma_{32}} \tag{2.225}$$

Ако пресечната точка дадена со (2.225) се замени во, на пример, првиот член од (2.223), после упростувањето на дропките се добива:

$$(\gamma_{31} + 1)(\gamma_{32} + 1) \left( \frac{N_0}{N_0 + 1} \right) = 1 + \gamma_{31} + \frac{\gamma_{21}\gamma_{32}(\gamma_{31} + 1)}{\gamma_{21} + (\gamma_{31} + 1)(\gamma_{32} + 1)} \quad (2.226)$$

Конечно, доколку (2.226) се замени во (2.223) се добива:

$$C = \frac{1}{2} \log \left( 1 + \gamma_{31} + \frac{\gamma_{21}\gamma_{32}(\gamma_{31} + 1)}{\gamma_{21} + (\gamma_{31} + 1)(\gamma_{32} + 1)} \right) \quad (2.227)$$

Оваа граница станува асимптотски многу прецизна доколку  $\gamma_{31}$  или  $\gamma_{32}$  се приближуваат до бесконечност. За мало  $\gamma_{21}$ , т.е. мал SNR во каналот од изворот до релето, CF методата дава подобри перформанси од DT и DF методите. Освен тоа, брзината на пренесување на CF методата може да се подобри со временска распределба во изворот, т.е., да му се дозволи на изворот да испраќа со моќност  $P/\alpha$  во дел  $\alpha \in [0, 1]$  од времето и нула моќност за преостанатото време.

#### 2.4.4 Линеарен Гаусов RC со фреквентна распределба во дестинацијата

Да разгледуваме Гаусов RFD релеен канал со релејни функции кои се линеарни комбинации од претходно примените симболи. Треба да се забележи дека под претпоставка на ортогонални приемни компоненти, може да се елиминира доцнењето при кодирањето во релето со едноставно преименување на времето за пренос во каналот  $X_2$  во  $Y''_3$ . На сличен начин еквивалентно разгледуваме релејни функции во форма  $x_{2i} = \sum_{j=1}^i a_{ij}y_{2j}$   $i \in [1 : n]$  или во векторска форма  $X_2^n = A \cdot Y_2^n$  каде  $A$  е  $n \times n$  долна триаголна матрица.

$$\begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{21} \\ y_{22} \\ \dots \\ y_{23} \end{bmatrix} \quad (2.228)$$

Оваа метода го сведува релејниот канал на точка-точка Гаусов канал со влез  $X_1^n$  и излез  $Y_3^n = (Y'_3, Y''_3)$ . Треба да се забележи дека релејниот канал со линеарната релејна функција може значително полесно да се имплементира во пракса отколку DF и CF каналите. Се покажува дека неговите перформанси се споредливи со перформансите на овие покомплексни методи во случај на голем SNR.

Капацитетот на системот со линеарна релејна функција,  $C_L$ , се карактеризира со израз со повеќе знаци [14, ch.(16.8.1)]:

$$C_L = \lim_{k \rightarrow \infty} C_L^{(k)} \quad (2.229)$$

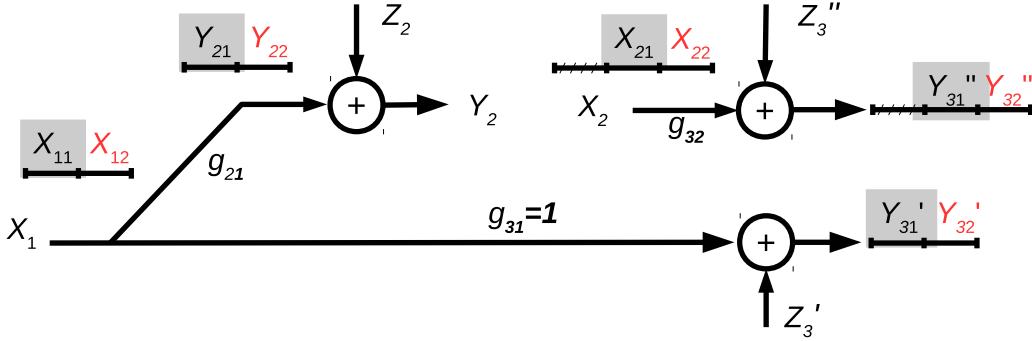
$$C_L^{(k)} = \max_{F(x_1^k), A} \frac{1}{k} \cdot I(X_1^k; Y_3^k) \quad (2.230)$$

Максимумот е по сите кумулативни веројатности  $F(x_1^k)$  и долни триаголни матрици  $A$  кои го задоволуваат ограничувањето на моќност во изворот и релето -  $P$ . Може да се покаже дека  $C_L^{(k)}$  се достигнува со Гаусов влезен сигнал  $X_1^k$  кој го задоволува ограничувањето на моќност.

## 2.4.5 Гаусов релеен канал со засили-и-проследи

Да разгледуваме  $C_L^{(1)}$ , што ја дава максималната брзина за пренос која може да се достигне со едноставна засили-и-проследи релејна функција. Може да се покаже дека  $C_L^{(1)}$  се достигнува со избор  $X_1 \sim \mathcal{N}(0, P)$  и  $X_2 = Y_2 \sqrt{P} / (\gamma_{21} + 1)$ . Во тој случај [14, eq.(16.18)]:

$$C_L^{(1)} = C \left( \gamma_{31} + \frac{\gamma_{21}\gamma_{32}}{\gamma_{21} + \gamma_{32} + 1} \right) \quad (2.231)$$



**Слика 2.10:** Засили-и-проследи релеен канал

**Доказ:** Да го разгледуваме AF релејниот канал прикажан на слика 2.10. Да претпоставиме дека  $X_1, X_2, \dots$  се i.i.d  $\sim \mathcal{N}(0, P)$ ,  $Z_2, Z'_3, Z''_3 \sim \mathcal{N}(0, N)$  и  $x'_i = A \cdot y'_i$  каде  $A$  е:

$$A = \sqrt{\frac{P}{g_{21}^2 P + N}} \quad A^2 = \frac{P}{g_{21}^2 P + N} = \frac{\frac{P}{N}}{g_{21}^2 \frac{P}{N} + 1} \quad (2.232)$$

Факторот на засилување -  $A$  се избира согласно (2.232) за да се задоволи ограничувањето на моќност во релето [16, eq.(9)].

Каналот е описан со следниве изрази:

$$X_1 \sim \mathcal{N}(0, P) \quad Y_2 = g_{21} \cdot X_1 + Z_2 \quad X_2 = A \cdot Y_2, \quad (2.233)$$

$$\begin{aligned} Y_3'' &= Y_{31}'' = g_{32} \cdot X_2 + Z_3'' = g_{32} \cdot A \cdot (g_{21} \cdot X_1 + Z_2) + Z_3'' = \\ &= g_{32} \cdot A \cdot g_{21} \cdot X_1 + g_{32} \cdot A \cdot Z_2 + Z_3'' \quad Y_3' = Y_{31}' = X_1 + Z_3' \end{aligned} \quad (2.234)$$

Капацитетот на каналот е даден со изразот (2.230) кој за случај на засили-и-проследи се сведува на барање на максимум од следнава здружена информација:

$$I(X_1; Y_{31}' Y_{31}'') = h(Y_{31}' Y_{31}'') - h(Y_{31}' Y_{31}'' | X_1) = \quad (2.235)$$

$$= h(Y_{31}'') + h(Y_{31}' | Y_{31}'') - h(Y_{31}' | X_1) - h(Y_{31}'' | X_1 Y_{31}') \quad (2.236)$$

Ако се земе во предвид (2.234) и дека се работи за гаусов канал првиот член од (2.236) се сведува на:

$$h(Y_{31}'') = h(g_{32} \cdot A \cdot g_{21} \cdot X_1 + g_{32} \cdot A \cdot Z_2 + Z_3'') \leq \frac{1}{2} \log(2\pi e) (g_{32}^2 A^2 g_{21}^2 P + g_{32}^2 A^2 N + N), \quad (2.237)$$

а вториот член се сведува на:

$$h(Y'_{31}|Y''_{31}) = h(X_1 + Z|Y''_{31}) = \frac{1}{2} \log(2\pi e) E(Var(X_1 + Z|Y''_{31})) \quad (2.238)$$

Изразот во логаритамот во (2.238) се сведува на:

$$\begin{aligned} E(Var(X_1 + Z|Y''_{31})) &= E(Var(X_1|Y''_{31})) + N = P - \frac{E^2(X_1 \cdot Y''_{31})}{E(Y''_{31}^2)} + N = \\ &= P - \frac{E^2(X_1 \cdot (g_{32} \cdot A \cdot g_{21} \cdot X_1 + g_{32} \cdot A \cdot Z_2 + Z''_3))}{E(Y''_{31}^2)} + N = P - \frac{g_{32}^2 \cdot A^2 \cdot g_{21}^2 \cdot P^2}{g_{32}^2 A^2 g_{21}^2 P + g_{32}^2 A^2 N + N} + N \end{aligned} \quad (2.239)$$

Ако (2.239) се замени во (2.238) се добива:

$$h(Y'_{31}|Y''_{31}) = \frac{1}{2} \log(2\pi e) \left( P - \frac{g_{32}^2 \cdot A^2 \cdot g_{21}^2 \cdot P^2}{g_{32}^2 A^2 g_{21}^2 P + g_{32}^2 A^2 N + N} + N \right) \quad (2.240)$$

Ако се сумираат (2.237) и (2.240) се добива првиот член од (2.235) односно сумата од првите два члена во (2.236):

$$\begin{aligned} h(Y'_{31}Y''_{31}) &= \frac{1}{2} \log(2\pi e) (g_{32}^2 A^2 g_{21}^2 P + g_{32}^2 A^2 N + N) + \\ &+ \frac{1}{2} \log(2\pi e) \left( P - \frac{g_{32}^2 \cdot A^2 \cdot g_{21}^2 P^2}{g_{32}^2 A^2 g_{21}^2 P + g_{32}^2 A^2 N + N} + N \right) = \\ &= \frac{1}{2} \log(2\pi e)^2 (g_{21}^2 g_{32}^2 A^2 NP + g_{32}^2 A^2 N^2 + g_{32}^2 A^2 NP + N^2 + NP) \end{aligned} \quad (2.241)$$

Третиот член од (2.236) се сведува на:

$$h(Y'_{31}|X_1) = \frac{1}{2} \log(2\pi e) (N) \quad (2.242)$$

Четвртиот член од (2.236) се сведува на:

$$\begin{aligned} h(Y''_{31}|X_1 Y'_{31}) &= h(g_{32} \cdot A \cdot g_{21} \cdot X_1 + g_{32} \cdot A \cdot Z_2 + Z''_3 | X_1 Y'_{31}) = \\ &= \frac{1}{2} \log(2\pi e) Var(g_{32} \cdot A \cdot Z_2 + Z''_3 | Y'_{31}) = \frac{1}{2} \log(2\pi e) (g_{32}^2 \cdot A^2 \cdot N + N) \end{aligned} \quad (2.243)$$

Ако се заменат 2.241, 2.242 и 2.243 во (2.236) се добива:

$$\begin{aligned} I(X_1; Y'_{31} Y''_{31}) &= \frac{1}{2} \log(2\pi e)^2 (g_{21}^2 g_{32}^2 A^2 NP + g_{32}^2 A^2 N^2 + g_{32}^2 A^2 NP + N^2 + NP) - \\ &- \frac{1}{2} \log(2\pi e)^2 \cdot N \cdot (g_{32}^2 \cdot A^2 \cdot N + N) = \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{(g_{21}^2 g_{32}^2 A^2 NP + g_{32}^2 A^2 N^2 + g_{32}^2 A^2 NP + N^2 + NP)}{N \cdot (g_{32}^2 \cdot A^2 \cdot N + N)} = \\ &= \frac{1}{2} \log \underbrace{\left( 1 + \frac{(g_{21}^2 g_{32}^2 A^2 NP + g_{32}^2 A^2 NP + NP)}{g_{32}^2 \cdot A^2 \cdot N^2 + N^2} \right)}_{(a)} \end{aligned} \quad (2.244)$$

Ако се замени (2.232) во (2.244) и се разгледувам само изразот под логаритамот, се добива:

$$\begin{aligned}
 a &= 1 + \frac{\left( (g_{21}^2 + 1) g_{32}^2 \cdot \frac{P}{g_{21}^2 P + N} \cdot NP + NP \right)}{N^2 \left( g_{32}^2 \cdot \frac{P}{g_{21}^2 P + N} + 1 \right)} = 1 + \frac{P \left( (g_{21}^2 + 1) \cdot g_{32}^2 \cdot \frac{P}{g_{21}^2 P + N} + 1 \right)}{N \left( \frac{g_{32}^2 P + g_{21}^2 P + N}{g_{21}^2 P + N} \right)} = \\
 &= 1 + \frac{P ((g_{21}^2 + 1) g_{32}^2 \cdot P + g_{21}^2 P + N)}{N (g_{32}^2 P + g_{21}^2 P + N)} = 1 + \frac{P}{N} \cdot \left( 1 + \frac{g_{21}^2 g_{32}^2 \cdot P}{(g_{21}^2 + g_{32}^2) P + N} \right)
 \end{aligned} \quad (2.245)$$

Ако се замени (2.245) во (2.244) се добива:

$$\begin{aligned}
 I(X_1; Y'_{31} Y''_{31}) &= \frac{1}{2} \cdot \log \left( 1 + \frac{P}{N} \cdot \left( 1 + \frac{g_{21}^2 g_{32}^2 \cdot P}{(g_{21}^2 + g_{32}^2) P + N} \right) \right) = \\
 &= C \left( \frac{P}{N} \cdot \left( 1 + \frac{g_{21}^2 g_{32}^2 \cdot P}{(g_{21}^2 + g_{32}^2) P + N} \right) \right)
 \end{aligned} \quad (2.246)$$

Изразот (2.246) може да се прикаже преку соодветните односи сигнал-шум:

$$I(X_1; Y'_{31} Y''_{31}) = C \left( \frac{P}{N} + \frac{g_{21}^2 g_{32}^2}{(g_{21}^2 + g_{32}^2) \frac{P}{N} + 1} \cdot \frac{P^2}{N^2} \right) = C \left( \gamma_{31} + \frac{\gamma_{21} \cdot \gamma_{32}}{\gamma_{21} + \gamma_{32} + 1} \right) \quad (2.247)$$

Со што се докажува изразот (2.231) за капацитет на системот засили-и-проследи.

Се покажува дека [14, ch.(16.8.2)] дека CF методата дава подобри перформанси од AF но е многу покомплексен за имплементација.

## 2.4.6 Капацитет на AF каскаден релеен канал

Моделот на AF каскадниот релеен канал се базира на моделот на Гаусовиот релеен канал со засили и проследи прикажан на слика 2.10 но без постоење на директната компонента од изворт до дестинацијата ( $g_{31} = 0$ ).

**Тврдење 2.6.**

Капацитетот на овој тип на канал може да се добие доколку во изразот (2.231) се земе  $\gamma_{31} = 0$ :

$$C_L^{(1)} = C \left( \frac{\gamma_{21} \gamma_{32}}{\gamma_{21} + \gamma_{32} + 1} \right) \quad (2.248)$$

**Доказ:** Истиот израз може да се добие доколку на сликата 2.10 се гледа само горната гранка:

$$Y_2 = g_{21} \cdot X_1 + Z_2, \quad \gamma_{21} = \frac{|g_{21}|^2 P}{N}, \quad \gamma_{32} = \frac{|g_{32}|^2 P}{N} \quad (2.249)$$

$$Y''_3 = g_{32} \cdot X_2 + Z''_3 = g_{32} \cdot A \cdot Y_2 + Z''_3 = g_{32} \cdot A \cdot (g_{21} \cdot X_1 + Z_2) + Z''_3 = g_{32} \cdot A \cdot g_{21} \cdot X_1 + g_{32} \cdot A \cdot Z_2 + Z''_3 \quad (2.250)$$

$$Z''_3 \sim N(0, N) \quad Z_2 \sim N(0, N) \quad A = \sqrt{\frac{P}{g_{21}^2 P + N}} \quad (2.251)$$

Ако се замени (2.251) во (2.250) се добива:

$$Y''_3 = Y''_{31} = g_{32} \cdot X_2 + Z''_3 = g_{32} \cdot g_{21} \cdot \sqrt{\frac{P}{g_{21}^2 P + N}} \cdot X_1 + g_{32} \cdot \sqrt{\frac{P}{g_{21}^2 P + N}} Z_2 + Z''_3 \quad (2.252)$$

Капацитетот на каналот е даден со изразот (2.230) кој за случај на засили-и-проследи без директна компонента се сведува на барање на максимум од следнава здружена информација:

$$\begin{aligned} I(X; Y_3'') &= h(Y_3'') - h(Y_3''|X_1) = \\ &= h\left(g_{32} \cdot g_{21} \cdot \sqrt{\frac{P}{g_{21}^2 P + N}} \cdot X_1 + g_{32} \cdot \sqrt{\frac{P}{g_{21}^2 P + N}} \cdot Z_2 + Z_3''\right) - h(g_{32} \cdot A \cdot Z_2 + Z) = \\ &= \frac{1}{2} \log 2\pi e \left( g_{32}^2 \cdot g_{21}^2 \cdot \frac{P}{g_{21}^2 P + N} \cdot P + \frac{g_{32}^2 \cdot P}{g_{21}^2 P + N} \cdot N + N \right) - \frac{1}{2} \log 2\pi e \cdot \left( \frac{g_{32}^2 \cdot P \cdot N}{g_{21}^2 P + N} + N \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{g_{32}^2 \cdot \frac{g_{21}^2 P}{g_{21}^2 \cdot \frac{P}{N} + 1} \cdot P + \frac{g_{32}^2 \cdot P}{g_{21}^2 P + N} \cdot N + N}{\left(N \cdot \frac{g_{32}^2 P}{g_{21}^2 P + N} + N\right)} = \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{\frac{g_{32}^2 \cdot P \cdot \gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1}}{N \cdot \left(\frac{g_{32}^2 P}{g_{21}^2 N} + 1\right)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{\frac{\gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1} \cdot \gamma_{32}}{\left(\frac{\gamma_{32}}{\gamma_{21} + 1} + 1\right)} \right) = \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{\gamma_{32} \cdot \gamma_{21}}{\gamma_{32} + \gamma_{21} + 1} \right), \end{aligned} \quad (2.253)$$

со што се докажува изразот (2.248).

# 3 Перформанси на МИМО релеен канал со две делници и две антени по јазол

Во безжичните комуникациски системи веројатноста на грешка (ЕР) и веројатност на испад (ОР) се најважните метрики на перформансите на системот. Во оваа глава ќе ги анализираме ЕР и ОР перформансите на релеен канал со две делници, кој се состои од извор (со две антени), реле (со една или две антени) и дестинација (со една или две антени), кои го користат OSTBC кодирањето на Аламути [17] во случај на Рейлиев фединг ([19], [18]). OSTBC кодот на Аламути е високо ефикасна техника која ги користи расположивите степени на слобода на комуникацискиот канал (или делница) со две предавателни антени со удвојување на добивката во капацитет и диверзитет [17].

Во оваа глава се користи варијанта на засили-и-проследи релејна метода, наречана раздвои-и-проследи (DCF), врз основ на која релето ги раздвојува OSTBC сигналите примени од изворот во две независни податочни низи, ги засилува секоја од нив независно и ги испраќа кон дестинацијата. Во DCF методата ќе користиме променливо засилување (VG) во релето [6] за кое е потребно познавање на каналните информации во релето и дестинацијата.

Во продолжението на оваа глава ќе спроведеме теоретска анализа на ОР перформансите на овие канали и ќе ги споредиме со каналите со две делници кои имаат по една антена во изворот, релето и дестинацијата и со точка-точка каналите кои имаат по две антени. Резултатите добиени од теоретската анализа ќе ги спроедиме со резултатите добиени со Монте-Карло симулации.

Со користење на Монте-Карло симулации ќе ги анализираме ЕР перформансите на овие релејни канали и ќе ги споредиме со декодирај-и-проследи релејната метода. Освен тоа со помош на симулации ќе го споредиме разгледуваниот систем кој корити релеи со променливо засилување (VG) со системот кој користи релеи со фиксно засилување (FG).

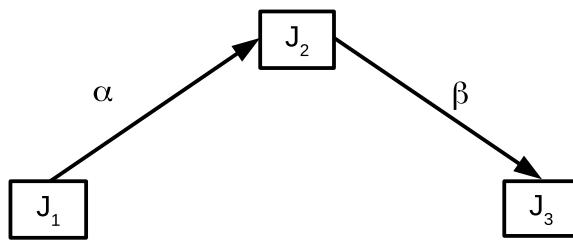
Во трудот [33] е дадена анализа на веројатноста за грешка на DCF систем со две делници со две антени во изворот, релето и дестинацијата. Во трудот [34] е дадена анализа на веројатноста за грешка за DCF систем со две делници и повеќе антени во изворот и дестинацијата и една антена во релето.

Оваа глава е организирана на следниов начин. Во глава 3.1 ќе дадеме краток осврт на системите кои користат по една антена во јазлите. Во наредната глава (3.2) накратко ќе ги проучиме основните системи со диверзитет во приемникот и предавателот кои се базични за понатамошната анализа. Главата 3.4 го презентира моделот на системот и на каналот. Во главата 3.4 ќе го изведеме изразот за крај-крај односот сигнал-шум (SNR) и функцијата за генерирање на моменти (MGF) кои се неопходни за успешна анализа на веројатноста за испад на овие системи. Резултатите ќе бидат презентирани во глава 3.5.

## 3.1 Релеен канал со една антена по јазол

Во зависност од природата и комплексноста на релето, релејните канали можат да се класифицираат во две основни категории: регенеративни и транспарентни (нерегенеративни) системи. Во регенеративните системи релето во целост го декодира

сигналот испратен од изворот преку првата делница и ја проследува декодираната верзија во втората делница. Од друга страна транспарентните системи користат поедноставни релеи кои само го засилуваат и проследуваат примениот сигнал без да вршат декодирање. Релеите во транспарентните системи можат да се поделат на: (1) релеи со променливо засилување кои имаат CSI за првата делница и (2) „слепи“ релеи [6]. Транспарентните системи со релеи со променливо засилување го користат моменталниот CSI за првата делница за да го контролираат засилувањето на релето така што на излез од релето се добие константна моќност. На системите со „слепи“ релеи на релеите не им е потребно да го знаат моменталниот CSI на првата делница. Релеите во овие системи користат засилувачи со фиксно засилување поради што на излезот од релето се добива сигнал со променлива моќност. Иако за системите со слепи релеи не се очекува да имаат перформанси како системите со променливо засилување во релето, нивната едноставност и лесна имплементација (заедно со нивните споредливи перформанси) ги прави атрактивни од практична гледна точка.



**Слика 3.1:** Безжичен комуникациски систем каде јазолот  $J_2$  го проследува сигналот од јазолот  $J_1$  кон  $J_3$

Да го разгледуваме безжичниот комуникациски систем прикажан на 3.1. Во системот јазолот  $J_1$  комуницира со јазолот  $J_3$  преку јазолот  $J_2$  кој се однесува како реле. Да претпоставиме дека јазолот  $J_1$  го испраќа сигналот  $x(t)$  со средна моќност  $E_1$ . Приемниот сигнал во терминалот  $J_2$  е:

$$r_2(t) = \alpha \cdot x(t) + n_2(t) \quad (3.1)$$

каде  $\alpha$  е амплитудата на федингот на каналот од  $J_1$  до  $J_2$ , и  $n_2(t)$  е додавачки бел Гаусов шум (AWGN) со моќност  $N_{02}$  на влезот на  $J_2$ . Кај транспарентните системи, приемниот сигнал во јазолот  $J_2$  се множи со фактор на засилување  $A$ , и потоа се проследува кон јазолот  $J_3$ . Приемниот сигнал во терминалот  $J_3$  е:

$$r_3 = \beta \cdot A \cdot (\alpha \cdot x(t) + n_2(t)) + n_3(t) = \alpha \cdot \beta \cdot A \cdot x(t) + \beta \cdot A \cdot n_2(t) + n_3(t) \quad (3.2)$$

каде  $\beta$  е амплитудата на федингот на каналот помеѓу јазлите  $J_2$  и  $J_3$  и  $n_3(t)$  е бел додавачки Гаусов шум со моќност  $N_{03}$  на влез од јазолот  $J_3$ . Од (3.2) може да се добие крај-крај односот сигнал-шум:

$$\gamma_{eq} = \frac{\alpha^2 \cdot \beta^2 \cdot A^2 \cdot E_1}{\beta^2 \cdot A^2 \cdot N_{02} + N_{03}} = \frac{\alpha^2 \cdot \beta^2 \cdot A^2 \cdot E_1}{A^2 \cdot N_{02} \cdot N_{03} \cdot \left( \frac{\beta^2}{N_{03}} + \frac{1}{A^2 \cdot N_{02}} \right)} = \frac{\frac{\alpha^2 \cdot E_1}{N_{02}} \cdot \frac{\beta^2}{N_{03}}}{\frac{\beta^2}{N_{03}} + \frac{1}{A^2 \cdot N_{02}}} \quad (3.3)$$

Од (3.3) јасно е дека изборот на факторот на засилување го дефинира крај-крај односот сигнал-шум.

Во случај на постоење на CSI во јазолот  $J_2$ , во [21] е предложено засилување:

$$A^2 = \frac{E_2}{E_1 \alpha^2 + N_{02}} \quad (3.4)$$

каде  $E_2$  е моќност на сигналот на излез од релето. Ваквиот избор на факторот на засилување има за цел да го инвертира фединг ефектот на првата делница но исто така ја ограничува излезната моќност на релето доколку амплитудата на федингот  $\alpha$ , е мала. Сепак на релеите со променливо засилување им е потребна постојана естимација на амплитудата на федингот во првата делница што го прави ваквиот избор на засилување тешко остварлив од практична гледна точка. Ако се замени (3.4) во (3.3) се добива:

$$\begin{aligned}\gamma_{eq1} &= \frac{\frac{\alpha^2 \cdot E_1}{N_{02}} \cdot \frac{\beta^2}{N_{03}}}{\frac{\beta^2}{N_{03}} + \frac{E_1 \alpha^2 + N_{02}}{E_2 \cdot N_{02}}} = \frac{\frac{\alpha^2 \cdot E_1}{N_{02}} \cdot \frac{\beta^2}{N_{03}}}{\frac{\beta^2 \cdot E_2 \cdot N_{02} + N_{03} \cdot E_1 \alpha^2 + N_{03} N_{02}}{E_2 \cdot N_{02} \cdot N_{03}}} = \\ &= \frac{\frac{\alpha^2 \cdot E_1}{N_{02}} \cdot \frac{\beta^2 \cdot E_2}{N_{03}}}{\frac{\beta^2 \cdot E_2}{N_{03}} + \frac{\alpha^2 E_1}{N_{02}} + 1} = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2 + 1} \quad (3.5)\end{aligned}$$

каде  $\gamma_1 = \frac{\alpha^2 \cdot E_1}{N_{02}}$  и  $\gamma_2 = \frac{\beta^2 \cdot E_2}{N_{03}}$  се моменталните односи сигнал-шум за првата и втората делница, соодветно. Перформансите на релејните канали кои користат релеи со променливо засилување согласно 3.4 во Рејлиев фединг се анализирани во [21], [22] и [23], а анализата на перформансите за Накагами фединг е дадена во [24].

Системите со „слепи“ релеи користат фиксен фактор на засилување без оглед на амплитудата на федингот во првата делница. Доколку во (3.3) земеме  $C = E_2 / (A^2 N_{02})$  се добива:

$$\gamma_{eq2} = \frac{\frac{\alpha^2 \cdot E_1}{N_{02}} \cdot \frac{\beta^2 \cdot E_2}{N_{03}}}{\frac{\beta^2 \cdot E_2}{N_{03}} + \frac{E_2}{A^2 \cdot N_{02}}} = \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_2}{C + \gamma_2} \quad (3.6)$$

каде  $C$  е константа за фиксно  $A$ .

Може да претпоставиме дека релето не го знае моменталниот CSI за првата делница, но има статистички CSI за првата делница односно ја знае средната моќност на федингот  $\Omega = E[\alpha^2]$  која се менува споро во спроедба со  $\alpha$ . Ваквото реле не мора постојано да го мониторира каналот, како што е случај за релеите со променливо засилување. Ваквите релеи ќе ги нарекуваме „полу-слепи“. Засилувањето во „полу-слепите“ релеи се избира согласно [6, eq.(13)]:

$$A^2 = E \left[ \frac{E_2}{E_1 \cdot \alpha^2 + N_{02}} \right] \quad (3.7)$$

На овој начин релето со променливо засилување (3.4) и полу-слепото реле (3.7) во просек внесуваат исто засилување. За рејлиев фединг (1.22) факторот на засилување даден со (3.7) се сведува на:

$$A^2 = \int_0^\infty \frac{E_2}{N_{02} \cdot (\gamma_1 + 1)} \cdot \frac{1}{\bar{\gamma}_1} \cdot e^{-\frac{\gamma_1}{\bar{\gamma}_1}} d\gamma \quad (3.8)$$

Изразот (3.8) доколку се употреби дефиницијата за експоненцијален интеграл [39, eq. (5.1.1)] се сведува на:

$$A^2 = \frac{E_2}{E_1 \cdot \Omega} \cdot e^{\frac{1}{\bar{\gamma}_1}} \cdot E_1 \left( \frac{1}{\bar{\gamma}_1} \right) \quad (3.9)$$

Следователно за  $C$  добиваме:

$$C = \frac{E_2}{A^2 N_{02}} = \frac{E_2}{N_{02} \cdot \frac{E_2}{E_1 \cdot \Omega} \cdot e^{\frac{1}{\bar{\gamma}_1}} \cdot E_1 \left( \frac{1}{\bar{\gamma}_1} \right)} = \frac{(E_1 \cdot \Omega) / N_{02}}{e^{\frac{1}{\bar{\gamma}_1}} \cdot E_1 \left( \frac{1}{\bar{\gamma}_1} \right)} = \frac{\bar{\gamma}_1}{e^{\frac{1}{\bar{\gamma}_1}} \cdot E_1 \left( \frac{1}{\bar{\gamma}_1} \right)} \quad (3.10)$$

каде  $\bar{\gamma}_1 = E_1 \cdot \Omega / N_{02}$  е средниот однос сигнал-шум за делницата од изворот до дестинацијата. Доколку (3.10) се замени во (3.6) ќе се добие:

$$\gamma_{eq2} = \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_2}{\gamma_2 + \bar{\gamma}_1 / [e^{1/\bar{\gamma}_1} E_1 (1/\bar{\gamma}_1)]} \quad (3.11)$$

Во трудот [6] е покажано дека за средни до големи вредности на средниот однос сигнал-шум, системот со променливо засилување (3.4) покажува подобри перформанси од системот со фиксно засилување (3.9). Во истиот труд е покажано дека системот со релеи со фиксно засилување имаат подобри перформанси во поглед на веројатноста на испад од релите со променливо засилување за мали до средни вредности на средниот однос сигнал-шум. Ова се должи на фактот дека релите со променливо засилување имаат максимално засилување  $E_2/N_{02}$  во случај кога  $\alpha$  е многу мало, што е релативно чест случај во регионот на мали до средни вредности на средниот однос сигнал-шум. Овој регион може да се прошири и на десно со зголемување на прагот  $\gamma_{th}$  (види (1.7)).

## 3.2 Приемен и предавателен диверзитет

Системите кои имаат повеќе антени во приемникот велиме дека имаат приемен диверзитет, а системите кои имаат повеќе антени во предавателот велиме дека имаат предавателен диверзитет. Од системите со приемен диверзитет во оваа глава ќе ги разгледуваме системи кои во дестинацијата користат комбинирање со максимален сооднос (анг. MRC - Maximum Ratio Combiner). За таа цел ќе разгледуваме систем со  $N$  приемни антени во дестинацијата и една предавателна антена во изворот.

Во  $i$ -та приемна антена приемниот сигнал е:

$$y_i = h_i x + n_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.12)$$

Каде  $h_i$  е комплексна случајна променлива која го опишува федингот во каналот од предавателната антена до  $i$ -та приемна антена,  $x$  е испратениот симбол и  $n_i$  е шумот во  $i$ -та приемна антена. Изразот (3.12) може да се претстави со користење на матрици:

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}x + \mathbf{n} \quad (3.13)$$

каде:

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T \quad \mathbf{h} = [h_1, h_2, \dots, h_N]^T \quad \mathbf{n} = [n_1, n_2, \dots, n_N]^T \quad (3.14)$$

Доколку во дестинацијата се користи MRC естимацијата на испратениот симбол се добива на следниот начин:

$$\tilde{x} = \frac{\mathbf{h}^H \cdot \mathbf{y}}{\mathbf{h}^H \cdot \mathbf{h}} = \frac{\mathbf{h}^H \cdot \mathbf{h} \cdot x}{\mathbf{h}^H \cdot \mathbf{h}} + \frac{\mathbf{h}^H \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{h}^H \cdot \mathbf{h}} = x + \frac{\mathbf{h}^H \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{h}^H \cdot \mathbf{h}} \quad (3.15)$$

каде:

$$\mathbf{h}^H \cdot \mathbf{h} = \sum_{i=1}^N |h_i|^2 \quad (3.16)$$

Доколку се претпостави дека шумот има нулта средна вредност и варијанса  $N_0$ , компонентите на шумот во различни временски интервали се идентично распределени и меѓусебно независни (i.i.d - Independent and Identically Distributed) и  $E_s$  е средната испратена моќност по симбол, од изразот (3.15) може да се добие моменталниот однос сигнал-шум на овој систем:

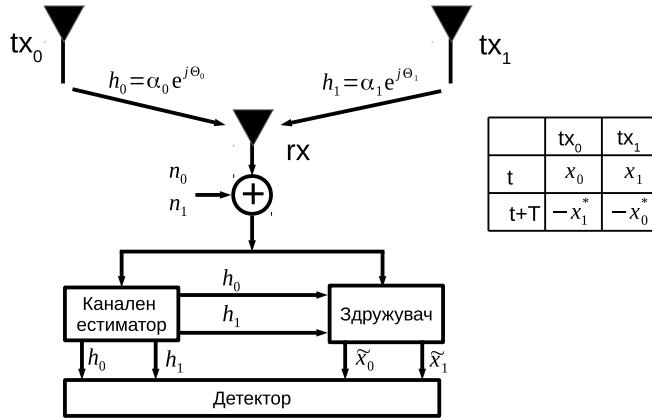
$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{E_s}{E \left[ \left( \sum_{i=1}^N h_i^* n_i \right)^2 \right] - E^2 \left[ \sum_{i=1}^N h_i^* n_i \right]} \cdot \left( \sum_{i=1}^N |h_i|^2 \right)^2 = \frac{E_s}{N_0 \cdot \sum_{i=1}^N |h_i|^2} \cdot \left( \sum_{i=1}^N |h_i|^2 \right)^2 \\ &\gamma = \frac{E_s}{N_0} \cdot \sum_{i=1}^N |h_i|^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Доколку средната квадратна вредност на федингот е:  $E [|h_{ij}|^2] = 1$ , средниот однос сигнал-шум е:

$$\bar{\gamma} = E [\gamma] = N \cdot \frac{E_s}{N_0} = N \cdot \bar{\gamma}_0 \quad (3.18)$$

Каде  $\bar{\gamma}_0 = E_s/N_0$  е средниот однос сигнал-шум на системот со една предавателна и една приемна антена. Од (3.18) може да се заклучи дека средниот однос сигнал-шум во систем со  $N$  приемни антени во дестинацијата е  $N$  пати поголем од средниот однос сигнал-шум од системот со една предавателна и една приемна антена.

Во исклучителниот труд на С. М. Аламути [17] е покажано дека е можно да се генерира иста вакава добивка со користење на систем со *предавателен диверзитет*. На сликата 3.2 е прикажан таков систем со две предавателни и една една приемна антена.



**Слика 3.2:** Систем со предавателен диверзитет и една антена во дестинацијата

Се претпоставува дека влијанието на федингот во каналот е моделиран со комплексен мулиплективен коефициент  $h_0$  во едната предавателна антена и со  $h_1$  во другата предавателна антена. Се претпоставува дека федингот е константен во два последователни симболи т.е.:

$$h_0(t) = h_0(t+T) = h_0 = \alpha_0 \cdot e^{j\theta_0} \quad h_1(t) = h_1(t+T) = h_1 = \alpha_1 \cdot e^{j\theta_1} \quad (3.19)$$

каде  $T$  е времетраење на симболот. Во овој случај приемниот сигнал е:

$$r_0 = r(t) = h_0 x_0 + h_1 x_1 + n_0 \quad r_1 = r(t+T) = -h_0 x_1^* + h_1 x_0^* + n_1 \quad (3.20)$$

каде  $r_0$  и  $r_1$  се сигналите во приемната антена во моментот  $t$  и  $t+T$ , а  $n_0$  и  $n_1$  се комплексни случајни променливи кои го претставуваат шумот во приемникот и интерференцијата.

Здружувачот (анг. combiner) на слика 3.2 ги дава на излез следниве два здружени сигнали кои потоа се испраќаат до детекторот:

$$\tilde{x}_0 = h_0^* r_0 + h_1^* r_1 \quad \tilde{x}_1 = h_1^* r_0 - h_0^* r_1. \quad (3.21)$$

Доколку се заменат (3.19) и (3.20) во (3.21) се добива:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= \alpha_0 e^{-j\theta_0} \cdot (\alpha_0 e^{j\theta_0} \cdot x_0 + \alpha_1 e^{j\theta_1} \cdot x_1 + n_0) + \alpha_1 e^{j\theta_1} (-\alpha_0 e^{j\theta_0} \cdot x_1^* + \alpha_1 e^{j\theta_1} \cdot x_0^* + n_1)^* = \\ &= \alpha_0^2 \cdot x_0 + \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot e^{j(\theta_1 - \theta_0)} \cdot x_1 + n_0 \cdot \alpha_0 e^{-j\theta_0} + \alpha_1 \cdot e^{j\theta_1} (-\alpha_0 e^{-j\theta_0} \cdot x_1 + \alpha_1 e^{-j\theta_1} \cdot x_0 + n_1^*) = \\ &= \alpha_0^2 \cdot x_0 + \cancel{\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot e^{j(\theta_1 - \theta_0)} \cdot x_1} + n_0 \cdot \alpha_0 e^{-j\theta_0} - \cancel{\alpha_1 \cdot \alpha_0 \cdot e^{j(\theta_1 - \theta_0)} \cdot x_1} + \alpha_1^2 \cdot x_0 + n_1^* \alpha_1 \cdot e^{j\theta_1} = \end{aligned}$$

$$= (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) \cdot x_0 + h_0^* \cdot n_0 + h_1 \cdot n_1^* \quad (3.22)$$

На сличен начин се добива естимацијата на вториот испратен симбол:

$$\tilde{x}_1 = (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) \cdot x_1 - h_0 n_1^* + h_1^* \cdot n_0. \quad (3.23)$$

Од изразот (3.22) односно (3.22) може да се добие моменталниот однос сигнал-шум:

$$\gamma = \frac{(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^2 \cdot E_s}{(\alpha_0^2 + \alpha_1^2) \cdot N_0} = \frac{E_s}{N_0} \cdot \sum_{i=0}^1 |h_i|^2 \quad (3.24)$$

Од (3.24) може да се забелеши дека моменталниот однос сигнал-шум на системот со предавателен диверзитет е идентичен со изразот (3.17) што се добива со системот со две гранки во дестинацијата кој користи комбинирање со максимален сооднос. Оваа метода воведена од С. М. Аламути потоа ќе се генерализира и ќе стане позната како просторно-временско блоковско кодирање (STBC).

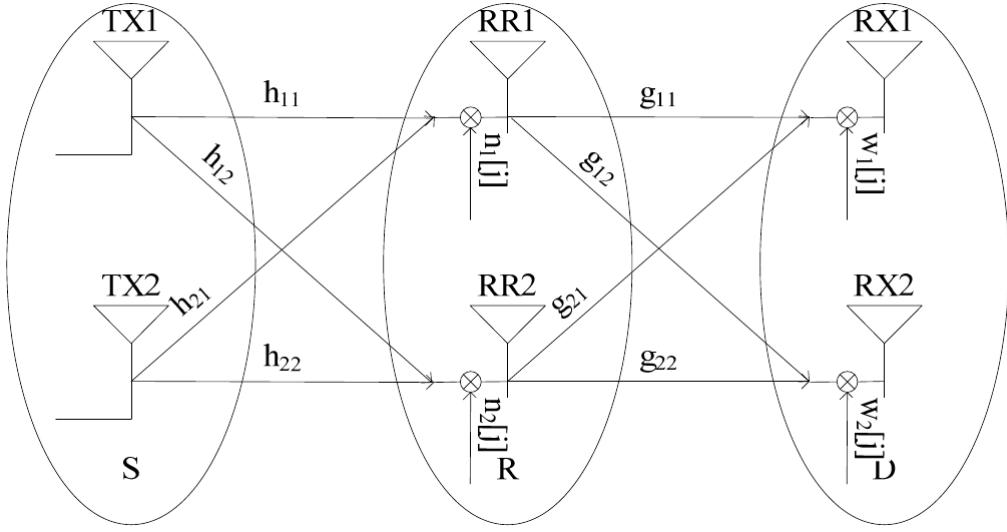
### 3.3 Модел на каналот

Во оваа глава ќе анализираме МИМО релејни канали кои ја користат методата на Аламути во три различни системски конфигурации со две делници: 2x1x1 МИМО релеен канал (каде само изворот е екипиран со две антени), 2x2x1 МИМО релеен канал (каде изворот и релето се екипирани со две антени), и 2x2x2 МИМО релеен канал (каде изворот, релето и дестинацијата се екипирани со две антени). На слика 3.3 е прикажан 2x2x2 МИМО релеен канал (како најопшта конфигурација која ги вклучува другите два специјални случаи), каде изворот, релето и дестинацијата се обележани со  $S$ ,  $R$  и  $D$ , соодветно. Делниците  $S-R$  и  $R-D$  се претпоставува дека се независни 2x2 МИМО Релејни канали со содветни канални матрици:  $H = [h_{11}, h_{12}; h_{21}, h_{22}]$  и  $G = [g_{11}, g_{12}; g_{21}, g_{22}]$ . Елементите  $h_{ij}$  и  $g_{ij}$  на овие матрици ги претставуваат каналните коефициенти помеѓу содветните парови од  $i$ -та предавателна антена и  $j$ -та приемна антена, и се смета дека се независни циркуларно-симетрични комплексни Гаусови случајни променливи со нулта средна вредност и единична варијанса. Затоа, квадратот на амплитудата на сигналот пренесен преку каналот  $h_{ij}$  ( $g_{ij}$ ) ја следи експоненцијалната опаѓачка функција на густина на веројатност [35] со идентични средни квадратни вредности  $E[|h_{ij}|^2] = E[|g_{ij}|^2] = 1$ . Предавателните моќности од секоја предавателна антена се сметаат за идентични и еднакви на  $E$ . Релето и дестинацијата имаат целосно познавање на CSI за претходната делница и не постои директна комуникација помеѓу изворот и дестинацијата.

Согласно слика 3.3 ќе разгледуваме МИМО полудуплексен релеен канал каде комуникацискиот процес е поделен во две фази (фаза 1 и фаза 2). Изворот  $S$  испраќа кон  $R$  за време на фазата 1, потоа  $R$  испраќа кон  $D$  за време на фаза 2. Ќе претпоставиме дека изворот  $S$  користи Аламути OSTBC. Поточно, групи од 2 независни симболи ( $x_1$  и  $x_2$ ) се испраќаат преку две предавателни антени (со користење на ортогоналната предавателна матрица  $[x_1, x_2; -x_2^*, x_1^*]$ ) во два последователни симболни интервали од фазата 1 (символни интервали 1 и 2). За време на фазата 2,  $R$  испраќа два засилени раздвоени симболи за време на симболните интервали 3 и 4. Во овој контекст се и ознаките во слика 3.3 каде подзнакот во ознаките за шумот  $n_i[j], w_i[j]$  означува приемна антена, а индексот во средните загради означува симболен интервал.

#### 3.3.1 2x1x1 МИМО канал со две делници

За анализа на 2x1x1 системот претпоставуваме дека само една антена во релето и дестинацијата е активна. Во симболните интервали 1 и 2 приемните сигнали во една



**Слика 3.3:** МИМО релеен канал со две делници и две антени во јазлите

антена во релето (означени со подзнакот) се дадени со:

$$y_1 [1] = \sqrt{E_s} (h_{11} \cdot x_1 + h_{21} \cdot x_2) + n_1 [2], \quad (3.25)$$

$$y_1 [2] = \sqrt{E_s} (-h_{11} \cdot x_2^* + h_{21} \cdot x_1^*) + n_1 [2], \quad (3.26)$$

каде  $n_1 [1]$  и  $n_1 [2]$  го означуваат додавачкиот комплексен бел Гаусов шум (AWGN) во симболниот интервал 1 и 2 во релејната антена, и  $E_s$  е предавателната моќност на секоја од двете предавателни антени во изворот<sup>1</sup>. Гаусовиот шум има нулта средна вредности и варијанса  $N_0$ . Со користење на  $y_1 [1]$  и  $y_1 [2]$ , релето ги раздвојува испратените симболи  $x_1$  и  $x_2$  (со мултиплекција на применетот сигнал со матрицата за раздвојување  $[h_{11}^*, h_{21}; h_{21}^*, h_{11}]$ ) но при тоа релето не врши детекција (види глава 3.3.2). После раздвојувањето релето ги засилува раздвоените симболи  $\tilde{x}_1$  и  $\tilde{x}_2$  со засилувачки фактор  $A_1$  и ги испраќа кон дестинацијата преку делницата  $R-D$  во симболните интервали 3 и 4.

Оваа релејна метода ја нарекуваме раздвои-и-проследи (DCF) релејна метода. Во споредба со декодирај-и-проследи (DF), DCF методата поедноставно се имплементира, а притоа дава споредливи перформанси (како што ќе биде презентирано во глава 3.5). Раздвоените симболи во релето се:

$$\tilde{x}_1 = h_{11}^* y_1 [1] - h_{21} y_1^* [2] = \sqrt{E_s} \Delta_1 x_1 + \xi_1, \quad (3.27)$$

$$\tilde{x}_2 = h_{21}^* y_1 [1] - h_{11} y_1^* [2] = \sqrt{E_s} \Delta_1 x_2 + \xi_2, \quad (3.28)$$

каде:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \|H\|_F^2 = |h_{11}|^2 + |h_{21}|^2, & \xi_1 &= h_{11}^* n_1 [1] + h_{21} n_1^* [2] \\ & & \xi_2 &= h_{21}^* n_1 [1] - h_{11} n_1^* [2]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Во (3.29)  $\Delta_1 = \|H\|_F^2$  претставува квадрат на Фробениусовата норма за  $2 \times 1$  каналниот вектор за  $S-R$  делницата, и  $\xi_1$  и  $\xi_2$  се додавачките гаусови компоненти на шумот кои се со нулта средна вредност и варијанса  $\Delta_1 N_0$ . После засилувањето,  $R$  ги испраќа раздвоените симболи  $\tilde{x}_1$  и  $\tilde{x}_2$  серијски преку една антена кон  $D$  во двата последователни симболни

<sup>1</sup>Се претпоставува дека средна моќност на симболите  $E [x_i^2] = 1$

интервали 3 и 4. По завршувањето на симболните интервали 3 и 4, приемните сигнали во дестинацијата се:

$$r_1[3] = A_1 g_{11} \tilde{x}_1 + w_1[3], \quad (3.30)$$

$$r_1[4] = A_1 g_{11} \tilde{x}_2 + w_1[4], \quad (3.31)$$

каде  $A_1$  е факторот на засилување на релето, а  $w_1[j]$  го означува AWGN-от во едната приемна антена во дестинацијата  $D$  кој е со нулта средна вредност и варијанса  $N_0$ .

Во понатамошното излагање, фактор на засилување и квадратот на Фробениусовата норма на  $S-R$  и  $R-D$  делниците за секоја системска конфигурација ќе бидат означени со содветен индекс  $k$ , т.е., со  $g_k$ ,  $\Delta_k$  и  $\Lambda_k$ , соодветно. Вредностите на индексот  $k$  ( $k = 1, 2$  и  $3$ ) означуваат 2x1x1, 2x2x1 и 2x2x2 системски конфигурации, соодветно (слика 3.3).

Имајќи во предвид дека е потребно познавање на CSI за првата делница за имплементација на декодерот на Аламути, во релето  $R$  избравме релеен метод со променливо засилување за да го инвертираме ефектот на федингот во делницата  $S-R$  со дополнително ограничување на предавателната моќност на релето доколку сигналот во таа делница е многу ослабнат. Врз база на [6] и [33] и изборот на променливо засилување во релето согласно [6, eq.(4)] за 2x1x1 системот го избирајме следново засилување:

$$A_1 = \sqrt{\frac{E_R}{E_I \Delta_1^2 + \Delta_1 N_0}} \quad (3.32)$$

каде  $E_I$  и  $E_R$  се предавателните моќности на една антена во изворот  $S$  и релето  $R$ .

Во дестинацијата  $D$ , приемниот сигнал [35] се пропушта низ прилагоден филтер [36], [37] (бидејќи  $D$  ги знае каналните коефициенти во делницата  $R-D$ ), после што дестинацијата ги детектира двета независни симболи ( $\tilde{x}_1$  и  $\tilde{x}_2$ ) во нивните симболни интервали 3 и 4.

### 3.3.2 Раздвојување за 222 OSTBC за 2x1 систем

Во оваа глава ќе спроведе анализата на системот разгледуван во глава 3.3.1 со користење на линеарна алгебра, што е неопходно за ефикасна имплементација на системот во софтверските пакети за нумеришка и алгебарска анализа. Векторот кој ги претставува симболите испратени во изворот  $\mathbf{X}$  и каналната матрица (вектор)  $\mathbf{H}$  се:

$$\mathbf{X} = [x_1 \ x_2]; \quad \mathbf{H} = [h_{11} \ h_{21}]; \quad (3.33)$$

За разлика од глава 3.3.1 во оваа глава заради поедноставна анализа претпоставуваме дека симболите не се со единечна моќност т.е. моќноста  $E[x_i^2] = E_s$ . Шумот во делницата од изворот до релето и помошната променлива за шумот се:

$$\mathbf{N} = [n_1 \ n_2]; \quad \mathbf{N}_a = [n_1 \ n_2^*]; \quad (3.34)$$

Кодна матрица за 2x1 Аламути кодот и нејзината транспонрана матрица се:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2^* & x_1^* \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2^* \\ x_2 & x_1^* \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Еквивалентната виртуелна канална матрица (анг. EVCM - Equivalent Virtual Channel Matrix) ( $\Omega$ ) и нејзината хермитска матрица се дадени со:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21}^* \\ h_{21} & -h_{11}^* \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Omega}^H = \begin{bmatrix} h_{11}^* & h_{21}^* \\ h_{21} & -h_{11} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Приемниот сигнал во релето е:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} x_1 h_{11} + x_2 h_{21} + n_1 \\ -x_2^* h_{11} + x_1^* h_{21} + n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

каде индексот  $i$  на приемниот сигнал во релето  $y_i$  го означува симболниот интервал. Модифицираната верзија од сигналот даден со (3.37) е:

$$\mathbf{Y}_a = \begin{bmatrix} y_1 & y_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 h_{11} + x_2 h_{21} + n_1; & -x_2 h_{11}^* + x_1 h_{21}^* + n_2^* \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Раздвоениот сигнал во релето е:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{Y}_a \cdot \boldsymbol{\Omega}^H &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{11}^* & h_{21}^* \\ h_{21} & -h_{11} \end{bmatrix} = \\ &= [y_1 h_{11}^* + y_2^* h_{21}, y_1 h_{21}^* - y_2^* h_{11}] = \\ &= [(h_{11}^2 + h_{21}^2) x_1 + n_2^* h_{21} + n_1 h_{11}^*, (h_{11}^2 + h_{21}^2) x_2 + n_1 h_{21}^* - n_2^* h_{11}] \end{aligned} \quad (3.39)$$

Компонентата на шумот во раздвоениот сигнал може да се добие и директно без да се пресметува (3.39):

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{N}_a \cdot \boldsymbol{\Omega}^H = \begin{bmatrix} n_1 h_{11}^* + n_2^* h_{21} & n_1 h_{21}^* - n_2^* h_{11} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Модифицираната верзија на приемниот сигнал во релето  $\mathbf{Y}_a$  може да се добие на алтернативен начин со користење на еквивалентната виртуелна канална матрица :

$$\mathbf{Y}_a = \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{N}_a = \begin{bmatrix} x_1 h_{11} + x_2 h_{21} + n_1; & -x_2 h_{11}^* + x_1 h_{21}^* + n_2^* \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

### 3.3.3 2x2x1 и 2x2x2 МИМО системи со две делници

За овие две системски конфигурации, приемниот сигнал во антената 1 во симболниот интервал 1 и 2 се дадени со:

$$\begin{aligned} y_1[1] &= \sqrt{E_s} h_{11} \cdot x_1 + \sqrt{E_s} h_{21} \cdot x_2 + n_1[1]. \\ y_1[2] &= -\sqrt{E_s} h_{11} \cdot x_2^* + \sqrt{E_s} h_{21} \cdot x_1^* + n_1[2]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Сигналите во антената 2 од релето во симболните интервали 1 и 2 се:

$$\begin{aligned} y_2[1] &= \sqrt{E_s} h_{12} \cdot x_1 + \sqrt{E_s} h_{22} \cdot x_2 + n_2[1], \\ y_2[2] &= -\sqrt{E_s} h_{12} \cdot x_2^* + \sqrt{E_s} h_{22} \cdot x_1^* + n_2[2], \end{aligned} \quad (3.43)$$

каде  $n_i[j]$  се AWGN компонентите во првата и втората антена во симболните интервали 1 и 2. Раздвоените сигнали во релето се (види глава 3.3.4):

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= h_{11}^* y_1[1] + h_{21} y_1^*[2] + h_{12}^* y_2[1] + h_{22} y_2^*[2] = \\ &= \sqrt{E_s} \Delta_2 x_1 + \eta_1, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2 &= h_{21}^* y_1[1] - h_{11} y_1^*[2] + h_{22}^* y_2[1] - h_{12} y_2^*[2] \\ &= \sqrt{E_s} \Delta_2 x_2 + \eta_2, \end{aligned} \quad (3.45)$$

Каде:

$$\Delta_2 = \Delta_3 = |h_{11}|^2 + |h_{12}|^2 + |h_{21}|^2 + |h_{22}|^2 \quad (3.46)$$

$$\eta_1 = h_{11}^* n_1 [1] + h_{21}^* n_1 [2] + h_{12}^* n_2 [1] + h_{22}^* n_2 [2], \quad (3.47)$$

$$\eta_2 = h_{21}^* n_1 [1] - h_{11}^* n_1 [2] + h_{22}^* n_2 [1] - h_{12}^* n_2 [2], \quad (3.48)$$

Каде  $\eta_1$  и  $\eta_2$  означуваат циркуларно-симетричен комплексен AWGN со нулта средна вредност и варијанса  $\Delta_2 N_0 = \Delta_3 N_0$ . Сигналите  $\tilde{x}_1$  и  $\tilde{x}_2$  потоа се засилуваат со соодветниот релеен фактор на засилување. Слично на 2x1x1 конфигурацијата, ги земаме во предвид (3.44), (3.45) и [6, eq.(4)] и за 2x2x1 и 2x2x2 системите го избирааме следниот фактор на засилување:

$$A_2 = A_3 = \sqrt{\frac{E_R}{E_I \cdot \Delta_2^2 + \Delta_2 N_0}}. \quad (3.49)$$

После засилувањето, во симболните интервали 3 и 4 релето  $R$  ги испраќа симболите  $\tilde{x}_1$  и  $\tilde{x}_2$  кон дестинацијата со користење на Аламути OSTBC преку неговите две антени. Дестинацијата  $D$  го раздвојува сигналот примен од  $R$  во овие два симболни интервали. Овие раздвоени симболи потоа се испраќаат во детекторот на  $D$ , чии перформанси ќе бидат мерени од аспект на ОР и ЕР.

Во случај на 2x2x1 систем раздвоените симболи во дестинацијата се (види глава 3.3.4):

$$\hat{x}_1 = A_2 \Lambda_2 \tilde{x}_1 + \zeta_1, \quad (3.50)$$

$$\hat{x}_2 = A_2 \Lambda_2 \tilde{x}_2 + \zeta_2, \quad (3.51)$$

каде:

$$\Lambda_2 = \|G\|_F^2 = |g_{11}|^2 + |g_{21}|^2 \quad (3.52)$$

$$\zeta_1 = g_{11}^* w_1 [3] - g_{21}^* w_1^* [4]. \quad (3.53)$$

$$\zeta_2 = g_{21}^* w_1 [3] - g_{11}^* w_1^* [4]. \quad (3.54)$$

Во (3.52)  $\Lambda_2 = \|G\|_F^2$  го претставува квадрат на Фробениусовата норма на 2x1 каналниот вектор на делницата  $R-D$ ,  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  се додавачките Гаусови компоненти на шумот со нулта средна вредност и варијанса  $\Lambda_2 N_0$ . Во случај на 2x2x2 МИМО систем раздвоените симболи во дестинацијата се:

$$\hat{x}_1 = A_3 \Lambda_3 \tilde{x}_1 + \mu_1, \quad (3.55)$$

$$\hat{x}_2 = A_3 \Lambda_3 \tilde{x}_2 + \mu_2, \quad (3.56)$$

каде:

$$\Lambda_3 = \|G\|_F^2 = |g_{11}|^2 + |g_{12}|^2 + |g_{21}|^2 + |g_{22}|^2$$

$$\mu_1 = g_{11}^* w_1 [3] + g_{21}^* w_1^* [4] + g_{12}^* w_2 [3] + g_{22}^* w_2^* [4], \quad (3.57)$$

$$\mu_2 = g_{21}^* w_1 [3] - g_{11}^* w_1^* [4] + g_{22}^* w_2 [3] - g_{12}^* w_2^* [4]. \quad (3.58)$$

Во изразите (3.57) и (3.58),  $\mu_1$  и  $\mu_2$  означуваат гаусов шум со нулта средна вредност и варијанса  $\Delta_3 N_0$  и  $\Delta_3$  е Фробениусовата норма на 2x2 каналната матрица на делнитцата  $R-D$ .

### 3.3.4 Раздвојување за 222 OSTBC за 2x2 систем

Во оваа глава анализата на првата делница на системот разгледуван во глава 3.3.3 ќе ја спроведеме со користење на линеарна алгебра. Векторот кој ги претставува симболите испратени во изворот  $X$  и каналната матрица  $H$  се:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Шумот во делницата од изворот до релето и помошната променлива за шумот се:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_a = [n_{11} \ n_{12}^* \ n_{21} \ n_{22}^*] \quad (3.60)$$

Заради едноставна претстава во облик на матрици и вектори во оваа анализа вториот индекс  $j$  за шумот  $n_{ij}$  го означува симболниот интервал. Во просторно-временскиот код на Аламути [17], два последователни симболи  $[x_1, x_2]$  се мапираат во матрица на кодни зборови  $\mathbf{C}$  согласно следново мапирање:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2^* & x_1^* \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2^* \\ x_2 & x_1^* \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

За разлика од глава 3.3.3 во оваа глава заради поедноставна анализа претпоставуваме дека симболите не се со единечна моќност т.е. моќноста  $E[x_i^2] = E_s$ . Со оваа дефиниција на матрицата  $\mathbf{C}$ , редиците означуваат временски диверзитет, а колоните означуваат просторен диверзитет и примениот сигнал после  $L = 2$  употреби на каналот може да се изрази во следнава форма:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} x_1 h_{11} + x_2 h_{21} + n_{11} & x_1 h_{12} + x_2 h_{22} + n_{21} \\ -x_2^* h_{11} + x_1^* h_{21} + n_{12} & -x_2^* h_{12} + x_1^* h_{22} + n_{22} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Еквивалентната виртуелна канална матрица  $\Omega$  и нејзината хермитска матрица се:

$$\Omega = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21}^* & h_{12} & h_{22}^* \\ h_{21} & -h_{11}^* & h_{22} & -h_{12}^* \end{bmatrix} \quad \Omega^H = \begin{bmatrix} h_{11}^* & h_{21}^* \\ h_{21} & -h_{11} \\ h_{12}^* & h_{22}^* \\ h_{22} & -h_{12} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Симболите во првата антена во моментот  $t$  и  $t + T_s$ , каде  $T_s$  е симболниот интервал, се:

$$y_{11} = x_1 h_{11} + x_2 h_{21} + n_{11} \quad y_{12} = -x_2^* h_{11} + x_1^* h_{21} + n_{12}, \quad (3.64)$$

а симболите во втората антена од релето во моментот  $t$  и  $t + T_s$  се:

$$y_{21} = x_1 h_{12} + x_2 h_{22} + n_{21} \quad y_{22} = -x_2^* h_{12} + x_1^* h_{22} + n_{22}. \quad (3.65)$$

каде вториот индекс  $j$  во ознаката на приемниот сигнал во релето  $y_{ij}$  го означува симболниот интервал.

Модифицираната верзија од сигналот даден со (3.37) е:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_a &= [Y_{11}, Y_{12}^*, Y_{21}, Y_{22}^*] = \\ &= [x_1 h_{11} + x_2 h_{21} + n_{11}, -x_2^* h_{11} + x_1^* h_{21} + n_{12}^*, \\ &\quad x_1 h_{12} + x_2 h_{22} + n_{21}, -x_2^* h_{12} + x_1^* h_{22} + n_{22}^*] \end{aligned} \quad (3.66)$$

Раздвоенот сигнал во релето е:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{Y}_a \cdot \Omega^H = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2] \quad (3.67)$$

$$\tilde{x}_1 = (|h_{11}|^2 + |h_{21}|^2 + |h_{12}|^2 + |h_{22}|^2) x_1 + h_{11}^* n_{11} + h_{21} n_{12}^* + h_{12}^* n_{21} + h_{22} n_{22}^* \quad (3.68)$$

$$\tilde{x}_2 = (|h_{11}|^2 + |h_{21}|^2 + |h_{12}|^2 + |h_{22}|^2) x_2 + h_{21}^* n_{11} - h_{11} n_{12}^* + h_{22}^* n_{21} - h_{12}^* n_{22}^* \quad (3.69)$$

Компонентата на шумот во раздвоениот сигнал може да се добие и директно без да се пресметува (3.39):

$$\Theta = \mathbf{N}_a \cdot \boldsymbol{\Omega}^H = [ h_{11}^* n_{11} + h_{21} n_{12}^* + h_{12}^* n_{21} + h_{22} n_{22}^* ; h_{21}^* n_{11} - h_{11} n_{12}^* + h_{22}^* n_{21} - h_{12} n_{22}^* ] \quad (3.70)$$

Модифицираната верзија на приемниот сигнал во релето  $\mathbf{Y}_a$  може да се добие на алтернативен начин со користење на еквивалентната виртуелна канална матрица :

$$\mathbf{Y}_a = \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{N}_a =$$

$$= [ x_1 h_{11} + x_2 h_{21} + n_{11}, \quad x_1 h_{21}^* - x_2 h_{11}^* + n_{12}^*, \quad x_1 h_{12} + x_2 h_{22} + n_{21}, \quad x_1 h_{22}^* - x_2 h_{12}^* + n_{22}^* ] \quad (3.71)$$

## 3.4 Вeroјатност на испад

Веројатноста на испад е дефинирана како веројатност дека моменталниот SNR ќе падне под одреден претходно дефиниран праг -  $\gamma_{th}$ :

$$P_{out} = P(\gamma_k < \gamma_{th}) = 1 - P(\gamma_k > \gamma_{th}) = 1 - P\left(\frac{1}{\gamma_k} < \frac{1}{\gamma_{th}}\right) \quad (3.72)$$

каде  $\gamma_k$  го претставува еквивалентниот крај-крај моментален SNR на релејниот канал со две делници. Вредностите на индексот  $k$  ( $k = 1, 2$  or  $3$ ) означуваат 2x1x1, 2x2x1 и 2x2x2 системски конфигурации, соодветно (слика 3.3). Подолу ќе го изведеме крај-крај односот сигнал-шум за 2x1x1, 2x2x1, и 2x2x2 релеен канал со две делници. За 2x1x1 МИМО систем, ако се земат во предвид (3.27) и (3.30) приемниот сигнал ов дестинацијата во симболниот интервал 3 е:

$$r_1[3] = A_1 g_{11} \tilde{x}_1 + w_1[3] = A_1 g_{11} \left( \sqrt{E_s} \Delta_1 x_1 + \xi_1 \right) + w_1[3] = \quad (3.73)$$

$$= A_1 g_{11} \sqrt{E_s} \Delta_1 x_1 + A_1 g_{11} \xi_1 + w_1[3]. \quad (3.74)$$

Соодветниот прмен сигнал во симболниот интервал 4,  $r_1[4]$ , го опфаќа симболот  $x_2$ , но дава ист крај-крај однос сигнал-шум. Затоа, следново изведување на крај-крај односот сигнал-шум се однесува на двата симболи. Моменталната моќност на сигналот е:

$$P_s = \left| A_1 g_{11} \sqrt{E_s} \Delta_1 \right|^2 = E_s \cdot A_1^2 \cdot |g_{11}|^2 \cdot \Delta_1^2 \quad (3.75)$$

и моменталната моќност на шумот е:

$$P_N = |A_1 g_{11}|^2 \cdot (|h_{11}|^2 N_0 + |h_{21}|^2 N_0) + N_0 = A_1^2 |g_{11}|^2 \Delta_1 N_0 + N_0. \quad (3.76)$$

Оттука крај-крај моменталниот однос сигнал-шум на влез од детекторот од  $D$  за 2x1x1 за релеен канал со две делници е:

$$\gamma_1 = \frac{P_s}{P_N} = \frac{E_s}{N_0} \cdot \frac{A_1^2 |g_{11}|^2 \Delta_1^2}{A_1^2 |g_{11}|^2 \Delta_1 + 1}. \quad (3.77)$$

каде индексот 1 во  $\gamma_1$  се однесува на 2x1x1 системска конфигурација.

За 2x2x1 МИМО систем, ако го замениме (3.44) во (3.50) се добива:

$$\hat{x}_1 = A_2 \Lambda_2 \Delta_2 \sqrt{E_s} x_1 + A_2 \Lambda_2 \eta_1 + \zeta_1. \quad (3.78)$$

Ако се следат истите чекори како во (3.75)-(3.77) почнувајќи од (3.78) лесно се покажува дека моменталнот крај-крај однос сигнал-шум за 2x2x1 систем е:

$$\gamma_2 = \frac{E_s}{N_0} \cdot \frac{A_2^2 \Lambda_2 \Delta_2^2}{A_2^2 \Lambda_2 \Delta_2 + 1}, \quad (3.79)$$

На сличен начин може да се покаже дека за 2x2x2 систем крај-крај SNR-от е:

$$\gamma_3 = \frac{E_s}{N_0} \cdot \frac{A_3^2 \Lambda_3 \Delta_3^2}{A_3^2 \Lambda_3 \Delta_3 + 1}. \quad (3.80)$$

За полесна математичка анализа на релејниот канал со две делници, ќе ги апроксимираме  $A_1, A_2$  и  $A_3$  од (3.32) и (3.49) со [6]:

$$A_k \cong \frac{1}{\Delta_k}. \quad (3.81)$$

Со промена на (3.81) во (3.77), (3.79) или (3.80) се добива априксимативниот моментален крај-крај SNR -  $\gamma_k$  во следнава форма:

$$w_k = \frac{1}{\gamma_k} = \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot \Delta_k} + \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot \Lambda_k} = u_k + v_k, \quad (3.82)$$

каде  $\bar{\gamma} = E_s/N_0$  е средниот однос сигнал-шум,  $U_k = 1/(\bar{\gamma} \Delta_k)$  и  $V_k = 1/\bar{\gamma} \Lambda_k$ . Имајќи во предвид дека моменталната моќност на каналот ја следи експоненцијалната дистрибуција,  $\Delta_k$  ја следи гама дистрибуција:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\theta}}, \text{ for } x \geq 0, \wedge \alpha, \theta > 0, \quad (3.83)$$

со единечен параметар на размер  $\theta = 1$  и параметар на облик  $\alpha$ . Бидејќи  $E[|h_{ij}|^2] = E[|g_{ij}|^2] = 1$ , функциите на густина на веројатност на квадратот на Фробениусовата норма за разгледуваните конфигурации се:

$$f_{\Delta_1}(x) = \frac{x}{\Gamma(2)} e^{-x}, \quad f_{\Delta_2}(x) = f_{\Delta_3}(x) = \frac{x^3}{\Gamma(4)} e^{-x}, \quad x \geq 0, \quad (3.84)$$

$$f_{\Lambda_1}(x) = e^{-x}, \quad f_{\Lambda_2}(x) = \frac{x}{\Gamma(2)} e^{-x}, \quad x \geq 0 \quad f_{\Lambda_3}(x) = \frac{x^3}{\Gamma(4)} \cdot e^{-x}, \quad x \geq 0, \quad (3.85)$$

Со користење на функционална трансформација на случајните променливи  $u_k = 1/(\bar{\gamma} \cdot \Delta_k)$  и  $v_k = 1/(\bar{\gamma} \cdot \Lambda_k)$  може да се покаже дека тие ја следат инверзната гама функција на густина на веројатност:

$$f(x) = \frac{x^{-\alpha-1}}{\bar{\gamma}^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{\frac{-1}{x\bar{\gamma}}}, \quad \text{for } x > 0, \wedge \alpha, \theta > 0, \quad (3.86)$$

со параметар на размер еднаков на  $1/\bar{\gamma}$ , затоа, нивните функции на густина на веројатност се дадени со:

$$f_{U_1}(x) = \frac{x^{-3}}{\bar{\gamma}^2 \Gamma(2)} e^{-\frac{1}{x\bar{\gamma}}}, \quad f_{U_2}(x) = f_{U_3}(x) = \frac{x^{-5}}{\bar{\gamma}^4 \Gamma(4)} e^{-\frac{1}{x\bar{\gamma}}} \quad (3.87)$$

$$f_{V_1}(x) = \frac{x^{-2}}{\bar{\gamma}} e^{\frac{-1}{x\bar{\gamma}}} \quad f_{V_2}(x) = \frac{x^{-3}}{\bar{\gamma}^2 \Gamma(2)} e^{-\frac{1}{x\bar{\gamma}}} \quad f_{V_3}(x) = \frac{x^{-5}}{\bar{\gamma}^4 \Gamma(4)} e^{\frac{-1}{x\bar{\gamma}}}, \quad x > 0, \quad (3.88)$$

Со помош на [38, eq.(3.471.9)] лесно се наоѓа дека функцијата за генерирање на моменти (MGF) за случајните променливи  $U_k$  и  $V_k$  е:

$$M(-s) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{s}{\bar{\gamma}} \right)^{\frac{\alpha}{2}} K_{\alpha} \left( 2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}} \right), \quad (3.89)$$

каде  $\alpha$  го означува производот на предавателни антени и приемни антени  $N_{Tx}N_R$  за дадената делница и  $K_{\alpha}$  означува Беселова функција од втор тип и  $\alpha$ -ти ред. Ако се земе во предвид (3.89) соодветните MGF-и за  $U_k$  и  $V_k$  за 2x1x1, 2x2x1 и 2x2x2 МИМО релеен канал се:

$$M_{U_1}(-s) = \frac{2}{\Gamma(2)} \frac{s}{\bar{\gamma}} K_2 \left( 2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}} \right), \quad M_{U_2}(-s) = M_{U_3}(-s) = \frac{2}{\Gamma(4)} \cdot \left( \frac{s}{\bar{\gamma}} \right)^2 K_4 \left( 2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}} \right) \quad (3.90)$$

$$M_{V_1}(-s) = 2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}} K_1 \left( 2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}} \right), \quad M_{V_2}(-s) = \frac{2}{\Gamma(2)} \cdot \frac{s}{\bar{\gamma}} \cdot K_2 \left( 2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}} \right) \quad (3.91)$$

$$M_{V_3}(-s) = \frac{2}{\Gamma(4)} \cdot \left( \frac{s}{\bar{\gamma}} \right)^2 \cdot K_4 \left( 2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}} \right). \quad (3.92)$$

Со оглед на тоа дека првата и втората делница во релејниот канал се под влијание на независен Рејлиев фединг,  $U_k$  и  $V_k$  се независни случајни променливи и MGF-от од нивната сума е производ од нивните MGF-и:

$$M_{w_1} = \frac{4}{\Gamma(2)} \left( \frac{s}{\bar{\gamma}} \right)^{\frac{3}{2}} K_2 \left( 2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}} \right) K_1 \left( 2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}} \right), \quad (3.93)$$

$$M_{w_2}(-s) = \frac{4}{\Gamma(4)\Gamma(2)} \left( \frac{s}{\bar{\gamma}} \right)^3 K_4 \left( 2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}} \right) K_2 \left( 2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}} \right), \quad (3.94)$$

$$M_{w_3}(-s) = \frac{4}{\gamma^2(4)} \left( \frac{s}{\bar{\gamma}} \right)^4 \left( K_4 \left( 2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}} \right) \right)^2 \quad (3.95)$$

Со оглед на тоа што го имаме MGF-от на  $w_k = 1/\gamma_k$  за анализираните релејни канали со две делници можеме да ја најдеме ОР со користење на [35]:

$$P(\gamma_k < \gamma_{th}) = 1 - \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{M_{w_k}(-s)}{s} \right) \Big|_{1/\gamma_{th}}, \quad (3.96)$$

што претставува веројатност дека моменталниот крај-крај SNR ќе падне под претходно одреден праг  $\gamma_{th}$ . Операторот  $\mathcal{L}^{-1}$  означува инверзна Лапласова трансформација. Со користење на (3.93), (3.94) и (3.95) и Ојлеровата техника за нумеричка инверзија на Лапласовата трансформација, веројатноста на испад за сите три системски конфигурации може да се пронајде нумерички [35, Appendix 9B.1], [53]. Покрај тоа, може да се најдат точните изрази во затворена форма за ОР за 2x2x2 системската конфигурација. Од [54, eq.(3.16.6.6)] може да се најде инверзната Лапласова трансформација за изразот во заградите во (3.95):

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma^2(4)\bar{\gamma}^4}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{M_{w_3}(-s)}{s^4} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[ 2 \left( K_4 \left( \sqrt{\frac{2s}{\bar{\gamma}}} \right) \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{w_3} e^{\frac{-2}{\bar{\gamma}w_3}} K_4 \left( \frac{2}{\bar{\gamma}w_3} \right). \end{aligned} \quad (3.97)$$

Со користење на [34, eq.(9)] ОР може да се изрази како трет извод од инверзната Лапласова трансформација од количникот  $M_{w_3}(-s)/s^4$ :

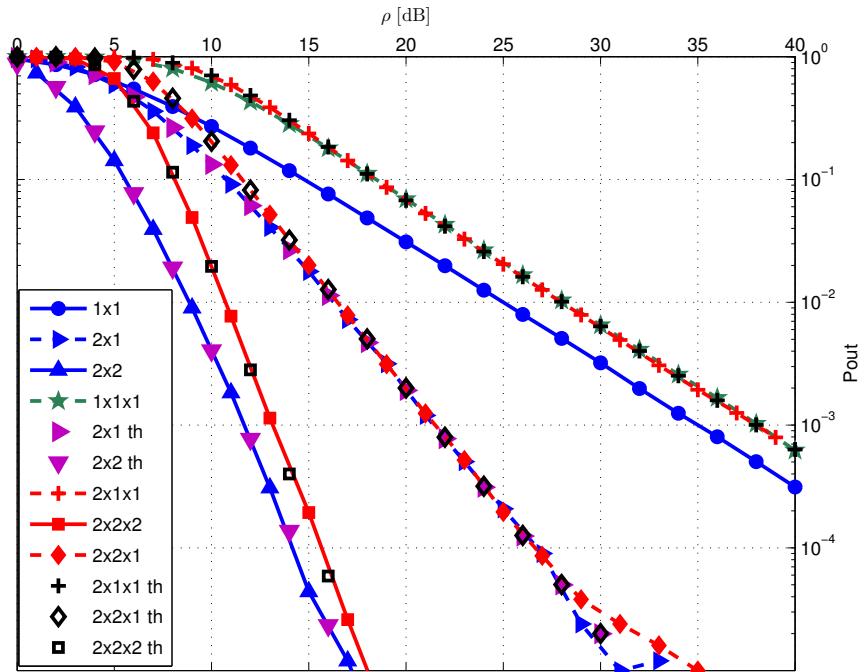
$$\begin{aligned} P(\gamma_3 < \gamma_{th}) &= 1 - \left\{ \frac{d^3}{dw_3^3} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{M_{w_3}(-s)}{s^4} \right] \right\} \Big|_{w_3=\frac{1}{\gamma_{th}}} = \\ &= 1 - \frac{2}{\gamma^2 (4) \bar{\gamma}^4} \left\{ \frac{d^3}{dw_3^3} \left[ \frac{e^{\frac{-2}{\bar{\gamma} w_3}}}{w_3} K_4 \left( \frac{2}{\bar{\gamma} w_3} \right) \right] \right\} \Big|_{w_3=\frac{1}{\gamma_{th}}}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Изразот (3.98) може да се најде во затворена форма со користење на формулата за извод од модифицирана Беселова функција [39, eq. (9.6.29)] или со користење на систем за компјутерска алгебра<sup>2</sup>. Во глава 4.3 ќе бидат прикажани многу точни апроксимации на веројатноста на испад кои можат да се користат наместо точниот израз (3.98).

## 3.5 Нумерички и симулацијски резултати

Во оваа глава за системот од 3.3 ќе ги споредиме резултатите за ОР добиени со теоретската анализа во 3.4 со резултатите што се добиваат со Монте-Карло симулации. За симулациите избравме бинарна фазна модулација (BPSK). Резултатите за анализираните системски конфигурации ќе ги споредиме со:

- резултатите за релеен канал со две делници и една по јазол со променливо засилување во релето како горна граница, и
- резултатите за точка-точка канал со приемен диверзитет со 4 антени и комбинирање со максимален сооднос (MRC) во дестинацијата како долна граница.



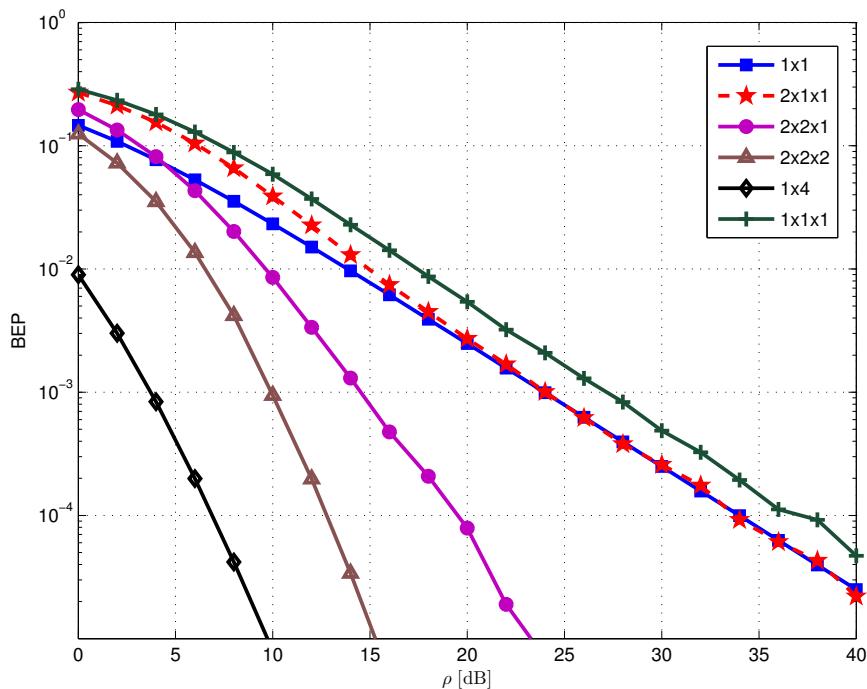
**Слика 3.4:** Споредба на теориските и симулацијските резултати за ОР за 2x1x1, 2x2x1 и 2x2x2 DCF систем ( $\gamma_{th} = 5 dB$ )

<sup>2</sup>На пример: Maxima, Maple Soft Maple® или Wolfram Mathematica®.

Покрај тоа за системот од глава 3.3 ќе извршиме анализа на резултатите за ВЕР добиени со Монте-Карло симулации и ќе ги споредиме со ВЕР резултатите за претходно наведените референтни системи за споредба.

Обично, во апликациите од реалноста предавателната моќност на јазлите е ограничена. Од тие причини во симулациите ќе ја ограничиме предавателната моќност. Со цел да имаме идентична вкупна предавателна моќност од две предавателни антени со моќноста на една антена, енергијата алоцирана на секој симбол се дели со  $2^3$ . Од тие причини резултатите ќе бидат дадени во зависност од вкупниот среден однос сигнал-шум  $\rho$  кој заради употребата на две антени и OSTBC код со единствена брзина е двојно поголем од средниот однос сигнал-шум т.е.:  $\rho = 2 \cdot \bar{\gamma}$ .

На слика 3.4 се споредени резултатите добиени со Монте-карло симулација и теоретските резултати за ОР за разгледуваните системски конфигурации. Со цел на подобра споредба на истата слика се прикажани резултатите за точка-точка канал со една антена (означен со: 1x1), релеен канал со две делници и една антана (означен со: 1x1x1), точка-точка 2x1 систем и точка-точка 2x2 систем. На истата слика се претставени резултатите од теоретската анализа (означени со "th") добиени врз основ на (3.96). Од сликата се гледа дека за резултатите за веројатноста на испад добиени со користење на нумерички пристап во (3.96) се идентични со резултатите добиени со Монте Карло симулација. Освен тоа, од слика 3.4 јасно е дека 2x1x1 системот има слични ОР перформанси како 1x1x1 системот. ОР перформансите за 2x2x1 и 2x2x2 системите се подобри од перформансите на 1x1x1 за 16dB и 25dB на ОР од  $10^{-3}$ . Сепак овие два системи покажуваат послаби ОР перформанси во споредба со точка-точка 2x1 и 2x2 системите од 0dB до 4dB.

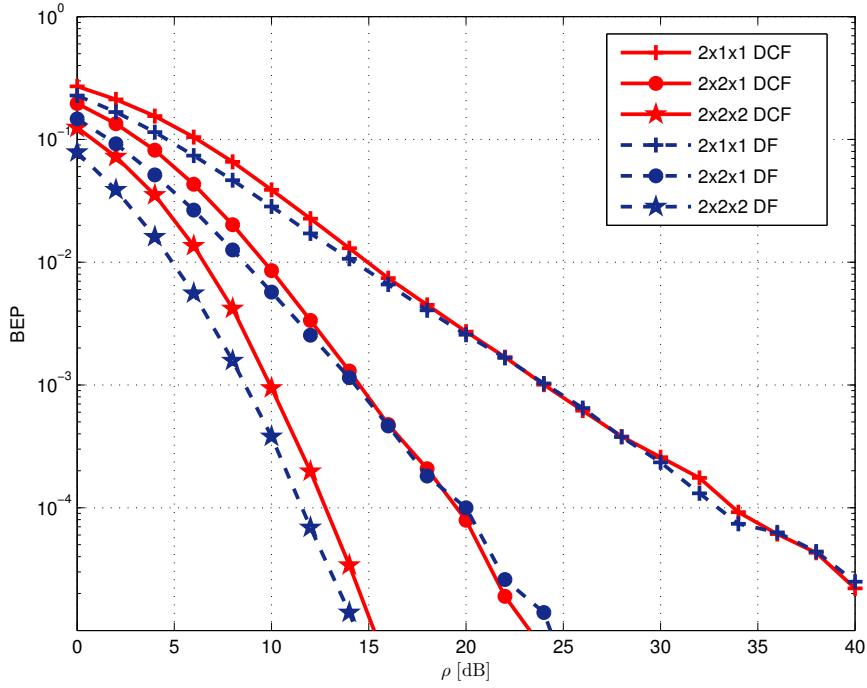


**Слика 3.5:** ВЕР за DCF систем со две антени добиени со Монте Карло симулација

Резултатите за ВЕР добиени со симулација за 2x1x1, 2x2x1, и 2x2x2 системите се дадени на слика 3.5. Од сликата 3.5 може да се забележи дека за 2x2x1 МИМО каналот добиваме

<sup>3</sup>Во општи случај, кога се користат OSTBC коди кои не се со цела брзина како што е случај за Аламути кодот, тогаш за да се задоволи ограничувањето на вкупна моќност, моќноста по симбол се зема да биде согласно 4.46.

добивка од диверзитет од 16dB на ВЕР од  $10^{-4}$  во споредба со  $1 \times 1 \times 1$  системот, а за  $2 \times 2 \times 2$  МИМО каналот имаме добивка од 23dB на ВЕР of  $10^{-4}$ . Тие резултати се слични со добивката од диверзитет за точка-точка МИМО системите добиени во [17]. На слика 3.6 е дадена споредба на ВЕР за не-регенеративниот DCF систем со ВЕР перформансите на регенеративниот декодирај-и-проследи (DF) систем. DF системот има занемарливо подобри перформанси од DCF системот. Разликата во перформанси се зголемува како бројот на приемни антени во релето и дестинацијата се зголемува и среднот однос сигнал-шум се намалува.

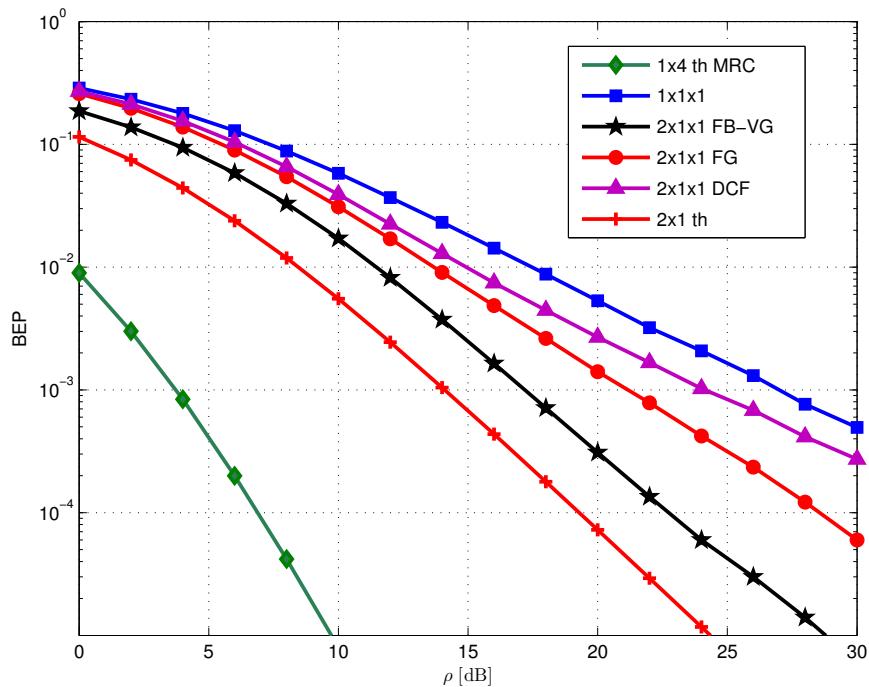


Слика 3.6: Споредба на ВЕР за DCF и DF системите

На слика 3.7 се прикажани ВЕР перформансите за  $2 \times 1 \times 1$  DCF систем кој користи полуслепо реле со фиксно засилување (3.9):

$$A = \sqrt{e^{\frac{1}{\gamma}} \cdot E_1\left(\frac{1}{\gamma}\right)} \quad (3.99)$$

ВЕР перформансите на овој систем се споредуваат со перформансите со систем со повратна спрега и променливо засилување (FB-VG) т.е. систем со формирање на зрак (анг. Beamforming) во предавателните антени на релето. Каде FB-VG системот потребно е изворот да поседува CSI за каналот меѓу изворот и релето. Таа информација се обезбеува со повратната спрега. Од сликата може да се забележи дека FB-VG системот има подобри перформанси од FG и DCF системот. DCF покажува најлоши ВЕР перформанси. Сепак, FG и FB-VG системите имаат свои предности и недостатоци. Во FG системот релето работи со методата на засили-и-проследи што многу лесно се имплементира. Сепак тоа подразбира поголема сложеност и цена во дестинацијата бидејќи таа треба во целост да имплементира Аламути декодер и има целосно знаење на каналните коефициенти во првата и втората делница. Во FB-VG системот релето има поголема сложеност и цена бидејќи тоа треба да ги естимира каналните коефициенти во втората делница со цел да ги компензира варијациите на амплитудата и фазата на каналот во втората



Слика 3.7: Споредба на 2x1x1 DCF, FB-VG, и FG системи

делница со множење на предавателниот сигнал со естимиралиот коефициент. Освен тоа дестинацијата треба да ги естимира каналните коефициенти од првата делница, т.е. крај-крај каналните коефициенти и да имплементира Аламути декодер. Земајќи ги во предвид поголемата комплексност и цена на FG и FB-VG системите, сметаме дека DCF системот постигнува најдобар однос перформанси/цена.

Од друга страна добивката на перформансите на 2x1x1 DCF системот не доволно вредна во споредба со трошоците за имплементација, бидејќи овој систем има слични перформанси со 1x1x1 системот. Употребата на 2x2x1 системот дава значително подобрување на перформансите во споредба со системите со две делници и една антена во изворот, релето и дестинацијата. Сметаме дека ова е нај-изводлива конфигурација во идната инфраструктурна кооперација. На пример, една можна 2x2x1 конфигурација е каде изворната базна станица има две антени, кооперативната базна станица која се однесува како реле има две антени и мобилната станица има една антена. 2x2x2 системот дава најдобри BER и OP перформанси, сепак неговата употреба во идните безжични комуникациски системи изгледа помалку веројатна.