

5. Математичко програмирање

5.1. Оптимални решенија

Различни проблеми во науката, бизнисот, инженерингот и во мрежното планирање можат да се формулираат математички. Математичката формулација се состои од два дела. Првиот дел е **целната функција (objective function)**. Таа е математичка функција која ни кажува, за секое предложено решение колкава ќе е "цената". Додека во бизнисот цената обично се мери во облик на пари, во другите сфери може да се користи големина која се однесува на перформансите или сигурноста. Променливите кои го опишуваат можното решение се нарекуваат **променливи на одлуката (decision variables)**.

Вториот дел од математичката формулација е множество од **ограничувања (constraints)** изразени како множество од математички равенства т.е. неравенства. Тоа наметнува едно или повеќе ограничувања на опсегот на прифатливи решенија. На пример, некои големина можат да бидат само позитивни, некои можат да имаат долно или горно ограничување, или сумата од извесен број на големина може да биде ограничена на ваков начин. Сè заедно, множеството од сите ограничувања го одредува **просторот на можни решенија (feasible solution space)**. Ова е множество на сите решенија "кои имаат смисол" во поглед на лимитите наметнати од ограничувањата.

Целната функција и придруженото множество на ограничувања се нарекува **математички програм**. Првото прашање што се поставува, откако математичкиот програм е формулиран за даден проблем, е дали постои оптимално решение. Оптимално решение е она кое ја минимизира, или во некои случаи максимизира целната функција и исто така ги исполнува поставените ограничувања.

Некои проблеми од математичкото програмирање имаат едно, единствено оптимално решение. Сепак може да се случи да математичкиот програм има едно, единствено **глобално оптимално** решение но исто така и многу **локални оптимални** решенија. Глобалните оптимални решенија се оптимални во поглед на целиот простор на можни решенија. Од друга страна, локалните оптимални решенија се оптимални во поглед на ограничен дел од просторот на можни решенија. Постоенето на локални оптимални решенија обично го отежнува барањето на глобално оптимално решение.

Математичките програми често можат да се решат со алгоритми. Тоа се процедури за решавање кои се состојат од извесен број на чекори и можат да бидат имплементирани на компјутер. Некои алгоритми за некои проблеми се егзактни и гарантираат дека секогаш ќе дадат глобално оптимално решение. Понекогаш не може да се пронајде алгоритам кој ќе даде глобално оптимално решение, или алгоритмите кои се на располагање се премногу спори за да се справат со проблем со одредена големина (број на променливи и ограничувања). За ваквите случаи може да се користат хеуристички алгоритми (heuristic algorithms) кои користат интуитивни¹⁸ процедури за да дојдат до оптималното решение.

Во оваа глава ќе биде опишан многу корисен тип на математичко програмирање наречен **линеарно програмирање (linear programming)**. Тоа и неговите роднини долго време се користи во мрежното планирање за да се оптимизира дизајнот на телекомуникациските мрежи. Главите кои следат прво го опишуваат основното (стандардно) издание на проблем во линеарното програмирање. Потоа ќе бидат опишани неколку типови на практични вакви проблеми. Во главата нема да се опишуваат техниките за решавање на линеарните проблеми поради тоа што веќе долго време на пазарот постојат низа комерцијални солвери кои можат да се користат за нивно решавање. Во овој труд се користи CPLEX 7.1 солверот од производителот ILOG.

¹⁸ Се мисли на процедури кои се базираат на претходно стекнато искуство преку експерименти

5.2. Линеарно програмирање

5.2.1. Поставување на проблемот

Линеарното програмирање се однесува на дадениот тип на поставување на линеарниот проблем и соодветната техника за негово решавање. Формулацијата на проблемот и simplex техниката за решавање, е развиена од George Dantzing во 1947 година. Пристапот стана еден од најчесто користените процедури во компјутерските науки. Стандардната форма на проблемот се состои од два дела. Едниот е целната функција која треба да се минимизира т.е. максимизира:

$$\min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n \quad \text{ф. 5.1}$$

Во овој исказ x_i ($i=1,2,\dots,n$) се променливи на одлука чија оптимална вредност треба да се пронајде, а c_i ($i=1,2,\dots,n$) се пропорционални цени кои го множат секое x_i . Z претставува вкупната цена, а x_i и c_i се реални броеви, иако обично се ненегативни. Доколку имаме алгоритам кој го минимизира Z , тогаш истиот проблем може да се реши со максимизација на $-Z$ како целна функција. Вториот дел од стандардната (канонична) форма е множеството на ограничувања. Постојат m линеарни ограничувања за променливите на одлука:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad \text{ф. 5.2}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad \text{ф. 5.3}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \quad \text{ф. 5.4}$$

Во горните равенства a_{ij} и b_i се константи. Исто така, во секојдневните проблеми за мрежно планирање се јавуваат ограничувања од следниот тип:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad \text{ф. 5.5}$$

Се забележува дека и целната функција и ограничувањата се линеарни функции од x_i ($i=1,2,\dots,n$). Оттука потекнува зборот "линеарно" во фразата линеарно програмирање. Програмирање се однесува повеќе на аспектите на планирање на проблемот отколку на актуелните компјутерски програми – иако линеарните програми скоро секогаш се решаваат на компјутер. Како што може да се претпостави, постои област наречена нелинеарно програмирање која се занимава со решавање на нелинеарни модели.

Каноничната форма на линеарно програмирање може да се напише во векторска нотација. Ако се дефинираат:

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{ф. 5.6}$$

тогаш целната функција прикажана во облик на матрици ќе биде:

$$\min Z = c^T x \quad \text{ф. 5.7}$$

а множеството на ограничувања може да се напише како:

$$Ax = b \quad \text{ф. 5.8}$$

тука $x \geq 0$ на база на елемент по елемент. Матриците **A** и **b** се:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{ф. 5.9}$$

5.2.2. Проширувања на линеарниот програм

Во ова глава ќе бидат опишани две проширувања кои ја унапредуваат употребливоста на каноничната формулација на линеарно програмирање елаборирана во претходната глава. Првото проширување дозволува да се вклучат линеарни ограничувања кои се всушност неравенства. На пример нека се разгледува следниов линеарен програм:

$$\min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n \quad \text{ф. 5.10}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \quad \text{ф. 5.11}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \quad \text{ф. 5.12}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \quad \text{ф. 5.13}$$

и исто така:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad \text{ф. 5.14}$$

Ако се воведат ненегативни променливи y_i ($i=1,2,\dots,m$) неравенствата во множеството на ограничувања можат да се претворат во равенства. Овие y_i променливи се нарекуваат занемарливи променливи (slack variables).

$$\min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n \quad \text{ф. 5.15}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1 \quad \text{ф. 5.16}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2 \quad \text{ф. 5.17}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + y_m = b_m \quad \text{ф. 5.18}$$

при што:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad \text{ф. 5.19}$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0 \quad \text{ф. 5.20}$$

Променливите y_i може да се смета дека се нарекуваат занемарливи променливи, затоа што тие прават занемарлива разлика помеѓу левата страна од i -то ограничување и b_i . Линеарниот програм ќе се реши по x_i и y_i , но се разбира само решенијата за x_i се од главен интерес.

Линеарниот програм со занемарливи променливи може да се претстави со матрици:

$$\min Z = c^T x \quad \text{ф. 5.21}$$

со ограничувања:

$$[A \ I] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b \quad \text{ф. 5.22}$$

каде што I е единечна матрица, а:

$$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad \text{ф. 5.23}$$

Од друга страна доколку се има неравенка од типот:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i \quad \text{ф. 5.24}$$

може да се користи вишок променлива (surplus variable)

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - y_i = b_i \quad \text{ф. 5.25}$$

каде што

$$y_i \geq 0 \quad \text{ф. 5.26}$$

Терминот вишок променлива се однесува на позитивната разлика помеѓу левата страна од ограничувањето и b_i . Природно линеарниот програм може да користи и занемарливи и вишок променливи заедно со обични ограничувања (равенство).

Второто проширување на каноничната формулација на линеарниот програм користи слободни променливи (free variables). Тие претставуваат x_i променливи кои имаат опсег $-\infty < x_i < \infty$. Со ваквиот линеарен програм може да се постапи на начин така што се воведат две променливи:

$$v \geq 0, \quad w \geq 0 \quad \text{ф. 5.27}$$

Ако се претпостави дека $-\infty < x_i < \infty$, тогаш нека

$$x_i = v_i - w_i \quad \text{ф. 5.28}$$

На овој начин v_i и w_i ќе примаат позитивни вредности а x_i ќе биде или позитивна или негативна.

Во математичкиот програм се заменува x_i со $v_i - w_i$. Проблемот се решава со следниве променливи:

$$v_1, w_1, x_2, x_3, \dots, x_n \quad \text{ф. 5.29}$$

5.3. Примери за проблеми од линеарно програмирање

Во оваа глава ќе бидат опишани неколку специјални случаи на проблеми од линеарно програмирање. Има смисла да се препознаваат овие модели не само за да се стекне увид во типовите на проблеми за кои може да се примени линеарното програмирање но и поради тоа што специјална математичка структура е придружена со секој од овие проблеми. Освен тоа специјални алгоритми постојат за решавање на овие специјални случаи. Некои од овие проблеми можат да се трансформираат еден во друг. Секој од опишаните проблеми може да се претвори во проблем на минимална цена на протокот (min cost flow problem). Иако постојат алгоритми со специјална намена за овие проблеми, трансформацијата дозволува користење на генерални алгоритми за линеарно програмирање како симплекс (simplex) методот или алгоритмите со внатрешна точка (interior point algorithms).

5.3.1. Транспортен проблем

Во овој модел дадени количини на еден ист продукт $a_1, a_2, \dots, a_M$ се транспортираат од M локации. Продуктите се примаат во N одредишта во количини $b_1, b_2, \dots, b_N$. Цената на транспорт на единична количина на продукт изнесува c_{ij} . Променливата x_{ij} го опишува количеството на проток од јазелот i кон јазелот j . Целта е да се минимизира вкупната цена на транспорт:

$$\min Z = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij} x_{ij} \quad \text{ф. 5.30}$$

Во транспортниот проблем постојат два основни типа на ограничување.

1) Едното тврди дека сумата од продуктите кои го напуштаат изворот i не може да го надмине a_i .

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} \leq a_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, M \quad \text{ф. 5.31}$$

2) Другото ограничување вели дека вкупното количество на продукти пристигнати на одредиштето j треба да биде поголемо или еднакво на барањето b_j .

$$\sum_{i=1}^M x_{i,j} \geq b_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, N \quad \text{ф. 5.32}$$

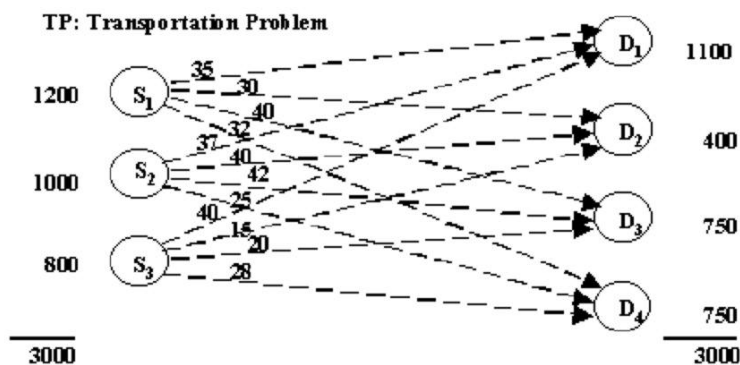
3) Освен овие две ограничувања важи и ограничувањето за конзервација на протокот т.е. дека сумата на испратени продукти е еднаква на сумата на примени продукти:

$$\sum_{i=1}^M a_i = \sum_{j=1}^N b_j \quad \text{ф. 5.33}$$

Ова не претставува ограничување за променливаат $x_{i,j}$ но мора да биде исполнето за да моделот е решлив. При што:

$$x_{i,j} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N$$

ф. 5.34



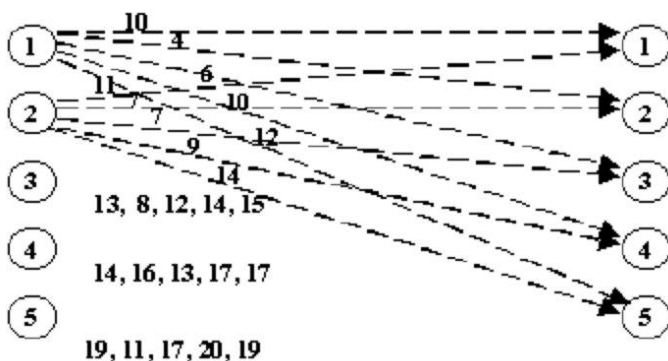
слика 5.1 Илустрација на транспортен проблем

Овој модел може да најде примена во мрежното планирање. Може да се земе во предвид следниов телекомуникациски пример каде треба да се поврзат M комутациони центри (главни центри), при што секоја има капацитет $a_1, a_2, \dots, a_M$ со N локални т.е. крајни центри со капацитет $b_1, b_2, \dots, b_N$. Цената на една врска од крајната централа i со комутациониот центар j е c_{ij} .

Освен во мрежното планирање овој тип на модел е применлив во класичните транспортни проблеми од каде и потекнува неговото име. На пример,

еден доставувач на продукти има M склади при што секој i -ти склад може дневно да испорача a_i продукти. Овој доставувач треба да испорача роба до N географски раштркани центри за продажба на мало, при што секој j -ти центар има дневна побарувачка од b_j продукти. Целта на овој доставувач е да ги минимизира трошоците за транспорт. За таа цел тој може да го користи линеарниот програм за класичен транспортен проблем.

5.3.2. Проблем за доделување на работни задачи



слика 5.2 Илустрација на моделот за доделување на работни задачи

Стандардната форма на моделот за доделување на работни задачи е да се доделат N работни задачи на N работници (види слика 5.2). Во типичен случај постојат N работници кои аплицираат за N работни задачи при што C_{ij} е цената за доделување на работната задача j на работникот i . Целта е да се додели една работна задача на секој од работниците на таков начин што се постигне минимална вкупна цена. За таа цел се дефинира бинарна променлива x_{ij} која има вредност 1 ако работната задача j му е доделена на работникот i , во спротивно нејзината вредност е 0. Може да се смета

дека проблемот на доделување на работни задачи е специјален случај на транспортниот проблем за прилив 1 и одлив 1. Во овој случај се претпоставува дека еден доставувач т.е. склад со продукти ќе му се додели на еден продажен центар.

Да претпоставиме дека сакаме да поставиме услов дека работникот i не смее да ја извршува работната задача j ниту работникот k смее да ја извршува работната задача m . Тоа во математичка

форма би значело $x_{i,j} \cdot x_{k,m} = 0$. Овој нелинеарен услов е еквивалентен на следнава линеарна формулација:

$$x_{i,j} + x_{k,m} \leq 1 \quad \text{ф. 5.35}$$

Доколку постои таков случај ова ограничување треба да му се додаде на на стандардното множество на ограничувања за проблемот за доделување на работни задачи. Во стандардната формулација треба да се минимизира следнава функција:

$$\text{MIN } Z = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{i,j} x_{i,j} \quad \text{ф. 5.36}$$

За следново множество на ограничувања:

1) Еден работник може да биде доделен на една работна задача:

$$\sum_{j=1}^N x_{i,j} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad \text{ф. 5.37}$$

2) Една работна задача може да му биде доделена само на еден работник.

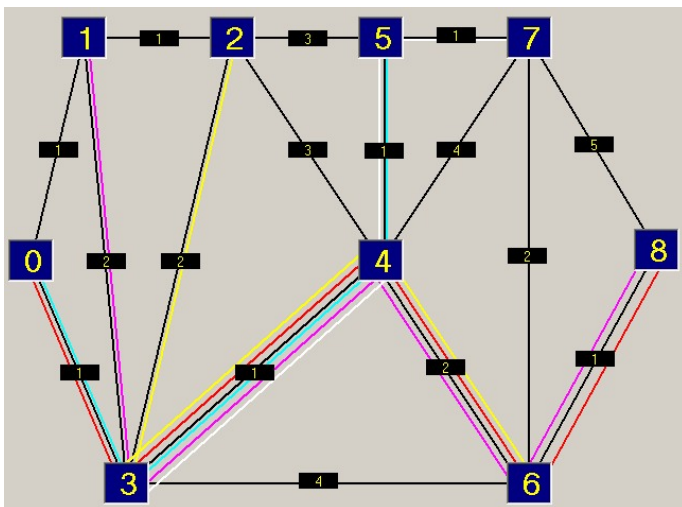
$$\sum_{i=1}^N x_{i,j} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, N \quad \text{ф. 5.38}$$

3) $x_{i,j}$ е бинарна променливата:

$$x_{i,j} \in \{0,1\} \quad \forall i, j \quad \text{ф. 5.39}$$

5.3.3. Мрежен модел за најкратки патеки

Проблемот се состои во тоа да се определи најдобриот пат низ мрежата за да се стигне од изворот до одредиштето за што пониска цена. Ако се претпостави дека во дадена мрежа има N јазли ($n=1,2,\dots,N$) и L ребра ($j=1,2,\dots,L$) и за секој од тие линкови е доделена цена C_j . Проблемот за најкратки патеки (SP-Shortest Path) се состои во пронаоѓање на најкраткиот пат (т.е. патеката со најмала цена) од изворишниот јазол s до одредишниот d . Цената на патеката е сума од цените на линковите (ребрата) во патеката. Се дефинира бинарна променлива UL_j^m која прима вредност 1 доколку патеката m ($m=s,d$) минува низ линкот j ($j=a,b$). Постојат два типа на специјални јазли, наречени извор и одредиште. Целта е да се пронајде најкратката патека помеѓу изворот и одредиштето.



слика 5.3 Илустрација на моделот а најкратки патеки

Во мрежата за илустрација на слика 5.3 се доделени различни цени на линковите, така на пример цената на линкот 1-2 изнесува 1, а на линкот 2-5 е 3. Целната функција ја зема во предвид цената за поминување низ даден линк во патеката од изворот до одредиштето. Ограничувањата се всушност раздвоени во три групи. Ограничувањето за изворишните јазли кажува дека мора да се напушти јазолот 0 и да се оди кон јазолот 1 или 3. Ограничувањето за средниот јазол вели дека доколку патеката од изворот до одредиштето дојде до овој јазол таа мора да го напушти истиот. Ограничувањето за одредишниот јазол е слично на ограничувањето за изворишниот јазол со тоа што патеката доаѓа до него од еден од соседните јазли.

Во моделот се користи следнава векторска променлива која треба да се адаптира со користење на оптимизационата техника:

UL_j^m	Бинарна променлива која прима вредност 1 доколку патеката m ($m=s,d$) минува низ линкот j ($j=a,b$), во спротивно 0.
----------	--

следниов скалар кој се задава во графичкиот модел¹⁹:

C_j	Цена на единичен проток низ линкот j .
-------	--

и следниве индекси:

$j=\{a,b\}$	Дводимензионален индекс кој го опишува линкот j ($j:1\dots L$) чии соседни јазли се a,b ($a:1\dots N$, $b:1\dots N$).
$m=\{s,d\}$	Дводимензионален индекс кој го опишува s,d сообраќајниот пар.

Целта е да се минимизира следнава функција:

$$\text{MIN } TotalCost = \sum_m \sum_j C_j \cdot UL_j^m \quad \text{ф. 5.40}$$

При следново ограничување за конзервација на протокот, според кое колку проток ќе влезе во даден јазол толку треба да излезе.

$$\sum_{b=1}^N UL_{a,b}^{s,d} - \sum_{b=1}^N UL_{b,a}^{s,d} = \begin{cases} 1 & \text{за } s = a \\ -1 & \text{за } d = a \\ 0 & \text{за други} \end{cases} \quad \forall s,d,a; \quad \text{ф. 5.41}$$

табела 5.1 Рутирање на најкратките патеки за мрежата од слика 5.3

s	d	a	b	UL_j^m
0	5	0	3	1.0000
0	5	3	4	1.0000
0	5	4	5	1.0000
0	8	0	3	1.0000
0	8	3	4	1.0000
0	8	4	6	1.0000
0	8	6	8	1.0000
1	8	1	3	1.0000
1	8	3	4	1.0000
1	8	4	6	1.0000
1	8	6	8	1.0000
2	6	2	4	1.0000
2	6	4	6	1.0000
3	7	3	4	1.0000
3	7	4	5	1.0000
3	7	5	7	1.0000

Како што може да се забележи во горното ограничување можат да се разликуваат три случаи: изворишен, транзитен и одредишен јазол како што беше претходо опишано. Имено трите вида на ограничување се здружени во едно единственото ограничување заради прегледност.

За моделот од слика 5.3 се бараат најкратки патеки за сообраќајните парови 0-8, 0-5, 1-8, 2-6 и 3-7. На сликата е прикажано рутирањето на овие патеки во различни бои, а исто така тоа е дадено и во табела 5.1. Ознаката на линкот од сликата укажува на цената на користење на истиот.

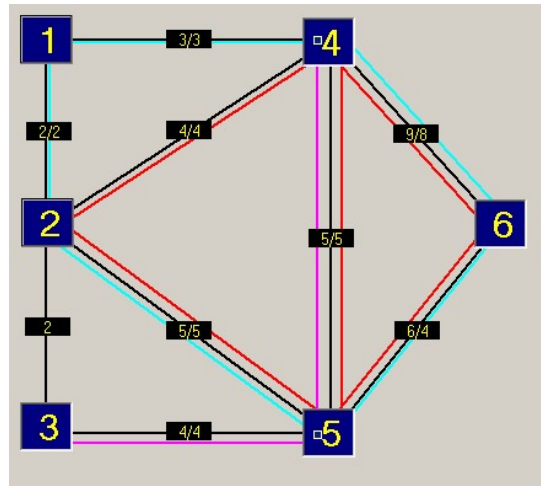
Оптималната вредност на целната функција изнесува 22. Имплементацијата на моделот за најкратки патеки во MPL (Mathematical Programming Language) е даден во глава 9.7.2.

5.3.4. Мрежен проблем за максимален проток

Во овој модел се разгледува мрежа со дефинирани капацитети на линковите, а проблемот е да се одреди максималниот можен проток од изворот до одредиштето така што не се надмине максималниот дозволен капацитет на линковите. Разгледуваната мрежа е со N јазли и L линкови. Се дефинира променлива UL_j^m која го дава протокот на m -от сообраќаен пар (s,d) низ линкот j (a,b).

¹⁹ За потребите на овој магистерски труд развиена е интегрирана објектна околина која се користи за едноставен графички дизајн на мрежата и внесување на потребните мрежни параметри (види 7.2.1)

На секој линк му се придружува одредена вредност за капацитет. На слика 5.4 ознаката x/y на линкот укажува на капацитетот на линкот (x) и доделениот проток низ него после решавање на моделот. Во ваквата мрежа сакаме да го пронајдеме максималниот проток од јазолот s кон јазолот d . Во LP (Linear Programming) формулацијата целта е да се максимизира променливата SOR_s^m која го содржи протокот кој извира во јазолот s и се рутира по различни патеки низ мрежата. За секој транзитен јазол протокот што влегува мора да го напушти (конзервација на проток за транзитен јазол).



слика 5.4 Илустрација на моделот за максимален проток

Овој тип на модел наоѓа примена во телекомуникационите мрежи каде што помеѓу даден извор и одредиште треба да се најде максималниот број на врски кои можат да се воспостават така што не се надмине максимално дозволениот капацитет на линковите.

Во моделот се користат следниве векторски променливи кои треба да се адаптираат со користење на оптимизационата техника:

UL_j^m	(UsedLink) Ненегативна целобројна променлива со вредност еднаква на делот од протокот од m -от сообраќаен пар (s,d) кој минува низ линкот j , во спротивно 0.
SOR_s^m	Ненегативна целобројна променлива со вредност еднаква на максималниот проток кој извира во јазолот s и кој се упатува кон одредиштето d .
DES_d^m	Ненегативна целобројна променлива со вредност еднаква на максималниот проток кој терминира во јазолот d и кој доаѓа од изворот s .

следниов скалар кој се задава во графичкиот модел:

CAP_j	Капацитет на линкот j
---------	-------------------------

и следниве индекси:

$j=\{a,b\}$	Дводимензионален индекс кој го опишува линкот j ($j:1...L$) чии соседни јазли се a,b ($a:1...N$, $b:1...N$).
$m=\{s,d\}$	Дводимензионален индекс кој го опишува s,d сообраќајниот пар.

Целта е да се максимизира следнава функција:

$$MAX \quad TotalFlow = \sum_m \sum_s SOR_s^m \quad \text{ф. 5.42}$$

За следново множество на ограничувања:

1) Ограничување за конзервација на протокот. Колку проток ќе влезе во даден јазол толку треба да излезе.

$$\sum_{b=1}^N UL_{a,b}^{s,d} - \sum_{b=1}^N UL_{b,a}^{s,d} = \begin{cases} SOR_s^{s,d} & \text{за } s = a \\ -DES_d^{s,d} & \text{за } d = a \\ 0 & \text{за други} \end{cases} \quad \forall s,d,a; \quad \text{ф. 5.43}$$

Како што може да се забележи од гориниот израз се разликуваат три случаи: изворишен, транзитен и одредишен јазол.

2) Протокот низ даден линк не смее да го надмине капацитетот на тој линк.

$$\sum_m UL_j^m \leq CAP_j \quad \forall j \quad \text{ф. 5.44}$$

табела 5.2 Рутирање на протоците низ мрежа со користење на моделот за максимален проток

s	d	a	b	UL_j^m
1	6	1	2	2.0000
1	6	1	4	3.0000
1	6	2	5	2.0000
1	6	4	6	3.0000
1	6	5	6	2.0000
2	6	2	4	4.0000
2	6	2	5	3.0000
2	6	4	6	5.0000
2	6	5	4	1.0000
2	6	5	6	2.0000
3	4	3	5	4.0000
3	4	5	4	4.0000

На слика 5.4 е прикажана мрежа во која треба да се најде максималниот проток за сообраќајните парови 1-6, 2-6, и 3-4. После решавањето на моделот се добива дека максималните протоци помеѓу овие сообраќајни парови изнесуваат 5, 7 и 4, соодветно (види слика 5.4). Рутирањето на овие протоци низ мрежата може да се види на слика 5.4 како и на табела 5.2.

Оптималната вредност на целната функција изнесува 16. Имплементацијата на моделот за максимален проток во MPL (Mathematical Programming Language) е даден во глава 9.7.3.

5.3.5. Мрежен проблем за минимална цена на протокот

Сите претходно опишани мрежни проблеми се специјален случај на проблемот за минимална цена на протокот. Како проблемот за максимален проток, тој разгледува протоци во мрежа со специфицирани капацитети на линковите, како проблемот за најкраток пат, тој ја зема во предвид цената на протокот низ ребро. Како транспортниот проблем, тој дозволува повеќе извори и дестинации. Затоа сите овие проблеми можат да се сметаат како специјален случај на проблемот за минимална цена на протокот.

Во моделот се користат следниве векторски променливи кои треба да се адаптираат со користење на оптимизационата техника:

UL_j^m	(UsedLink) Ненегативна целобројна променлива со вредност еднаква на делот од приливот во јазолот s кој се упатува кон одредиштето d доколку линкот j се користи за негово рутирање, во спротивно 0.
SOR_s^m	Ненегативна целобројна променлива со вредност еднаква на делот од приливот во јазолот s кој се упатува кон одредиштето d .
DES_d^m	Ненегативна целобројна променлива со вредност еднаква на делот од одливот во јазолот d кој доаѓа од изворот s .

следниве скалари кои се задаваат во графичкиот модел:

C_j	Цена на единичен проток низ линкот j
CAP_j	Капацитет на линкот j
D_n	(Demand) Одлив на јазолот n
S_n	(Supply) Прилив во јазолот n

и следниве индекси:

j	Дводимензионален индекс кој го опишува линкот j ($j:1...L$) чии соседни јазли се a, b ($a:1...N$, $b:1...N$).
m	Дводимензионален индекс кој го опишува s, d парот
n	Овој индекс ги означува јазлите во мрежата ($n:1...N$).

Целта е да се минимизира следнава функција:

$$\text{MIN } MinCost = \sum_m \sum_j C_j \cdot UL_j^m \quad \text{ф. 5.45}$$

За следново множество на ограничувања:

1) Ограничување за конзервација на протокот. Колку проток ќе влезе во даден јазол толку треба да излезе.

$$\sum_{b=1}^N UL_{a,b}^{s,d} - \sum_{b=1}^N UL_{b,a}^{s,d} = \begin{cases} SOR_s^{s,d} & \text{за } s = a \\ -DES_d^{s,d} & \text{за } d = a \\ 0 & \text{за други} \end{cases} \quad \forall s, d, a; \quad \text{ф. 5.46}$$

Како што може да се забележи од гориниот израз се разликуваат три случаи: изворишен, транзитен и одредишен јазол.

2) Следново ограничување тврди дека сумата од различните делови од приливот кои се упатени кон различни одредишта не може да го надмине приливот за даден јазол.

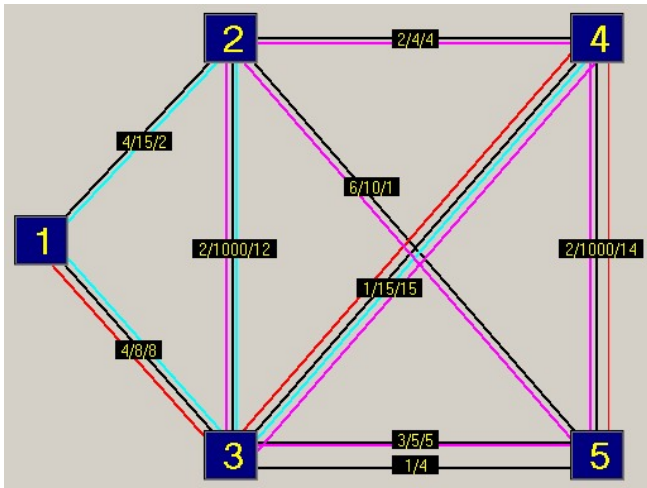
$$\sum_m SOR_s^m = S_{n=s} \quad \forall s \quad \text{ф. 5.47}$$

3) Следново ограничување тврди дека сумата од различните делови од одливот примени од различни извори не може да го надмине одливот за даден јазол.

$$\sum_m DES_d^m = D_{n=d} \quad \forall d \quad \text{ф. 5.48}$$

4) Протокот низ даден линк не смее да го надмине капацитетот на тој линк.

$$\sum_m UL_j^m \leq CAP_j \quad \forall j \quad \text{ф. 5.49}$$



слика 5.5 Илустрација на модел за минимална цена на протокот

Овој модел може да се користи за оптимизација на протокот на податоци од множество на сервери за бази на податоци (изворишта) кон корисниците (одредишта). Вкупната цена може да претставува фактори како на пример растојанието помеѓу секој корисник и серверот за бази на податоци, цената на комуникациите по даден линк, или цената на услугата од даден сервер за бази на податоци.

На слика 5.5 е даден пример на мрежа која е оптимизирана со користење на моделот за минимална цена на протокот. Во примерот јазолот 1 има прилив 10, јазолот 2 има прилив 15, јазолот 4 има одлив 5 и јазолот 5 има одлив 20. Во ознаката на линковите $x/y/z$ е дадена цената на линкот (x), капацитетот на линкот (y) и после решавање на проблемот колкав е протокот низ тој линк (z). Патеците по кои

приливите од јазлите 1 и 2 се рутираат до јазлите 4 и 5 се прикажани на истата слика, а исто така и во табела 5.3. Оптималната вредност на целната функција изнесува 136. Имплементацијата на моделот за минимална цена на протокот во MPL (Mathematical Programming Language) е дадена во глава 9.7.1.

табела 5.3 Рутирање на приливите од s кон d

s	d	a	b	UL_j^m
1	4	1	2	2.0000
1	4	1	3	3.0000
1	4	2	3	2.0000
1	4	3	4	5.0000
1	5	1	3	5.0000
1	5	3	4	5.0000
1	5	4	5	5.0000
2	5	2	3	10.0000
2	5	2	4	4.0000
2	5	2	5	1.0000
2	5	3	4	5.0000
2	5	3	5	5.0000
2	5	4	5	9.0000

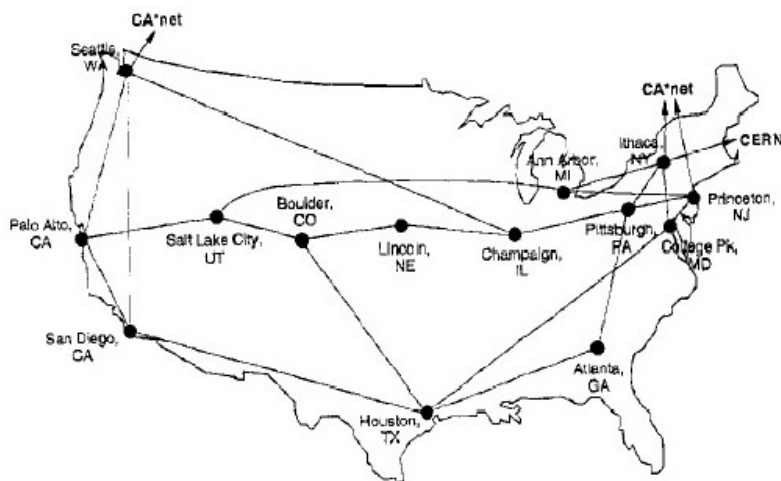
6. Некои принципи за дизајн на WDM мрежи со рутирање на светлосни патеки

6.1. Дизајнирање на виртуелна топологија

6.1.1. Архитектура на мрежата

Во оваа глава ќе бидат разгледани принципите за дизајн на оптичките мрежи со рутирање на светлосни патеки, кои користат WDM и кои се наменети за национално или глобално покривање. Овие мрежи користат мултиплексери на бранови должини и оптички комутатори во рутирачките јазли, така што произволна виртуелна топологија може да се вгради во дадена физичка топологија. Виртуелната топологија, која функционира како пакетски комутирана²⁰ мрежа се состои од множество на светлосни патеки кои се воспоставени за да се искористи релативната моќ и на оптиката и на електротинката. Пакетите со информација се пренесуваат низ виртуелната топологија се додека тоа е можно во оптички домен со користење на оптички комутирани канали, но пренесувањето на пакети од светлосна патека на светлосна патека се изведува со електронско комутирање на пакети, каде што тоа е потребно.

Оптичкото комутирање во јазлите се остварува со користење на комутатор за упатување на бранови должини (WRS), кој е во состојба оптички да ја пропушти светлосната патека од влезното влакно на излезното, без електронско процесирање. Бидејќи нема претворувачи на бранови должини во WRS, брановата должина на светлосната патека останува иста во излезното оптичко влакно како што била во влезното.



слика 6.1 Физичка архитектура на NSFNET

биде потребно воспоставување на нова мрежа со повеќе скока т.е нова виртуелна топологија. Предизвик е да се изведе потребната реконфигурација со минимално пореметување на работењето на мрежата.

Архитектурата на виртуелна топологија е комбинација на пристапите за "еден скок"²¹ и "повеќе скокови"²², и таа се обидува да ги користи карактеристиките и на двата. Светлосната патека во оваа архитектура обезбедува комуникација со еден-скок. Сепак, поради тоа што се користат ограничен број на бранови должини, не е можно да се воспостават светлосни патеки помеѓу сите сообраќајни парови, па затоа е можно да е потребна комуникација со повеќе скокови (тоа подразбира електронска комутација). Доколку дојде до значителна промена на сообраќајната матрица, можно е да

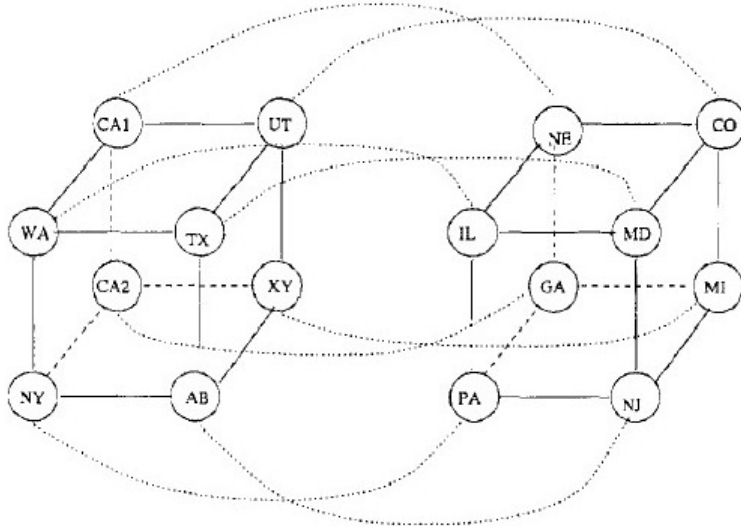
²⁰ Виртуелната топологија може да се однесува и на мрежи кои оперираат со патеки од понизок ред. На пример кај SDH мрежите, мрежата формирана од оптички влакна ја претставува физичката топологија. Над неа се гради виртуелна топологија од патеки од повисок ред (AU-4). Низ оваа виртуелна топологија се рутираат патеките од понизок ред (TU-12). Ваквата нивовска организација на SDH мрежите е слична на нивовската организација разгледувана во оваа глава со таа разлика што патеките од понизок ред се пакетски комутирани, а не перманентни E1 врски воспоставени со комутација на кола. Сепак изложените модели важат и во двата случаи без никакви измени.

²¹ Single-hop

²² Multi-hop

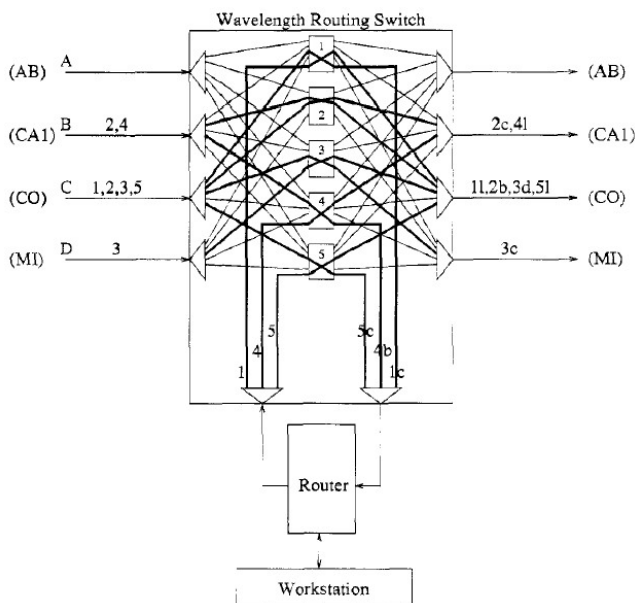
Проблемот на дизајн на виртуелна топологија се формулира како оптимизационен проблем кој ја избира оптималната виртуелна топологија во зависност од примопредавателите²³ и ограничувањата на бранови должини, со една од две можни целни функции:

- За дадена сообраќајна матрица, да се минимизира просечното доцнење на пакети низ мрежата (што одговара на решението на проблемот за дадената сообраќајна матрица)²⁴.
- Максимизирање на факторот за проширување (scale factor) со кој што може сообраќајната матрица да се зголеми (да се обезбеди максимално капацитет за надградба при идни сообраќајни барања).



слика 6.2 Виртуелна топологија на хипер-коцка вградена во NSFNET физичката топологија

демултиплексерите и мултиплексерите да се употребат оптички комутатори со просторна комутација, еден за секоја бранова должина. Овие комутатори можат да се реконфигурираат со електронска контрола, за да се адаптира виртуелната топологија по барање. Друг пристап е да се вградат локални ласери/филтри кои нормално функционираат на фиксна бранова должина, но да постои можност тие да се наместат на друга бранова должина (променливи примопредаватели).



слика 6.3 Можна архитектура на јазлите во мрежата (на пример јазолот UT)

Архитектурата на јазолот за имплементација на ваква мрежа треба да се состои од оптичка и електронска компонента. Оптичката компонента е комутатор за упатување на бранови должини (WRS), кој може оптички да ги пропушта светлосните патеки, и кој локално ги терминира. Електронската компонента е електронски упатувач на пакети (на пример, ATM комутатор или IP упатувач), кој служи како складирај и проследи (store and forward) електронско ниво над оптичката виртуелна топологија. На слика 6.3 е прикажана една можна архитектура на јазлите во мрежата. Дизајнот на WRS може да има неколку форми. Привлечен избор е помеѓу

За илустрација се зема физичката топологија на NSFNET мрежата прикажана на слика 6.1, а како виртуелна топологија хипер-коцка со 16 линкови прикажана на слика 6.2, иако во наредната глава ќе бидат простудирани алгоритми за вградување на произволна виртуелна топологија во дадена физичка топологија. Треба да се забележи дека секој виртуелен линк во виртуелната топологија од слика 6.2 претставува светлосна патека со електронска терминација на своите два краја. Во зависност од тоа како е поврзан локалниот упатувач можат да се добијат две виртуелни топологии, една со 5, а друга со 7 бранови должини по оптичко влакно. Доколку се користи само едно оптичко влакно за поврзување на упатувачот со WRS, секоја светлосна патека која што излегува/завршува во дадениот јазол ќе мора да биде на различна бранова должина за да се избегнат конфликти на бранови должини во локалното влакно. Согласно со тоа ова решение инсистира на користење на повеќе бранови должини во

виртуелната топологија (случајот со 7 бранови должини). Доколку се користат повеќе оптички влакна

²³ Предавател и приемник (transceiver - transmitter&receiver)

²⁴ Оваа целна функција ќе се користи во наредната глава.

за поврзување на упатувачот со WRS, тогаш од ист јазол можат да излезат повеќе светлосни патеки со иста бранова должина, па затоа помалку бранови должини ќе бидат потребни во хипер-коцка виртуелната топологија (случај на виртуелна топологија со 5 бранови должини).

На слика 6.3 ознаките 1l, 2b, 3d, 5l на излезното влакно кон СО укажуваат на тоа дека влакното UT-CO користи четири бранови должини 1,2,3,5, со тоа што брановите должини 2,3 се оптички комутирани канали низ UT комутаторот, а брановите должини 1l и 5l поврзуваат два локални ласери.

За виртуелната топологија со 5 бранови должини (упатувачот поврзан со повеќе влакна) WRS комутаторот ќе биде поинаков од оној прикажан на слика 6.3, бидејќи ќе има повеќе влакна кои го поврзуваат електронскиот упатувач на WRS. Големината на WRS ќе треба да биде 7x7 наместо 4x4.

6.1.2. Формулација на оптимизациониот проблем

За архитектурата на мрежа опишана во 6.1.1, во оваа глава ќе биде изложена LP формулација за комплетен дизајн на виртуелната топологија, што вклучува избор на светлосни патеки кои ќе се користат, рутите на овие светлосни патеки, и интензитетот на пакетскиот сообраќај низ овие светлосни патеки²⁵. Тоа се остварува со користење на целна функција за минимизирање на средната вредност на скоковите на пакетот (APHD-Average Packet Hop Distance²⁶) и со непочитување на ограничувањето за континуитет на бранови должини (т.е. со претпоставка дека секој јазол има претворувачи на бранови должини). На овој начин се покажува дека проблемот на дизајн на оптичката мрежа може да се линеаризира, а со тоа и да се реши оптимално.

Како што беше речено, целната функција е да се минимизира APHD која е инверзно пропорционална на вкупната мрежна пропустливост (throughput) при складни (balanced) протоци низ светлосните патеки. Може да се користи LP формулацијата за да се дизајнира складна мрежа, така што се максимизира употребата на оптичките примопредаватели и бранови должини, поради што се намалува цената на мрежната опрема. Исто така, LP формулацијата може да се користи за минимална реконфигурација на виртуелната топологија при промена на сообраќајните барање (види [51] глава 9.5).

Доколку капацитетот на каналот (светлосната патека) изнесува C , вкупниот број на светлосни патеки во мрежата L , и средната вредност на скокови на пакетот H , тогаш пропустливоста на мрежата е ограничена на:

$$T \leq \frac{CL}{H} \quad \text{ф. 6.1}$$

Затоа минимизирање на H е еквивалентно на зголемување на мрежната пропустливост во асимптотска смисла кога е исполнето равенството. Од оваа причина е развиена LP формулација која го минимизира H , за мрежа со рутирање на бранови должини базирана на виртуелна топологија. Од резултатите добиени со решавање на моделот се покажува дека и покрај тоа што е претпоставено дека секој јазол има претворувачи на бранови должини, во реалноста се потребни само неколку претворувачи на бранови должини.

Во моделот се користат следниве векторски променливи кои треба да се адаптираат со користење на оптимизационата техника:

$V_{i,j}^c$	Бинарна променлива со вредност 1 ако постои светлосна патека помеѓу јазлите i и j во виртуелната топологија, во спротивно 0. Ако постојат повеќе виртуелни патеки помеѓу овие два јазли тие ќе бидат индексирани по c .
$\lambda_{i,j,c}^{s,d}$	Оваа променлива се однесува на рутирањето на сообраќајот низ виртуелната топологија. Таа има вредност еднаква на делот од сообраќајното барање на s,d парот кое се рутира по виртуелната патека $V_{i,j}^c$. Со други зборови сообраќајното барање на s,d парот може да се рутира по повеќе од една патека, а секоја патека може да минува низ една или повеќе виртуелни патеки т.е линкови.

²⁵ Може да се користи истата формулација и за комутација на кола.

²⁶ APHD се дефинира како број на светлосни патеки кои пакетот треба да би помине во просек, и е функција од виртуелната топологија

$P_{m,n}^{i,j,c}$	Бинарна променлива која се однесува на рутирањето на виртуелните патеки низ физичката топологија. Таа има вредност 1 доколку виртуелната (светлосната) патека $V_{i,j}^c$ минува низ линкот m,n , во спротивно 0.
-------------------	---

следниве скалари кои се зададени во графичкиот модел:

$P_{m,n}$	Овој скалар ја опишува физичката топологија, т.е. бројот на оптички влакна што ги поврзува јазлите m и n . Доколку помеѓу јазлите m и n има директен физички линк тогаш $P_{m,n} > 0$, во спротивно 0. $P_{m,n}$ е исто така 0 за несоседни јазли. $P_{m,n} = P_{n,m}$ што значи дека постои ист број на оптички влакна за двете насоки на поврзување на соседните јазли. $\sum_{m,n} P_{m,n} = M$ го дава вкупниот број на оптички влакна во мрежата.
T_i	Број на предаватели (ласери) во јазелот i ($T_i \geq 1$)
R_i	Број на приемници (филтри) во јазелот i ($R_i \geq 1$)
$\Lambda_{s,d}$	Сообраќајно барање помеѓу сообраќајниот пар s,d . Ако се работи за комутација на пакети $\Lambda_{s,d}$ ја означува средната брзина на сообраќајниот проток (pack/sec) од јазелот s до јазелот d . Ако се работи за електронска комутација на кола (на пример E1 врски) тогаш укажува на сообраќајното барање на s,d парот во број на вакви перманентни врски.
$W_{m,n}$	Максимален број на бранови должини по оптичко влакно.
C	Капацитет на каналот, т.е. битска брзина. На пример, ако се работи за рутирање на E1 низ AU-4 канали тогаш капацитетот на AU-4 каналот е $63 \cdot E1$. Ако се работи за WDM канал неговиот капацитет може да биде 1, 4, 16, 64, 256 AU-4 канали, т.е. брзини 155Mb/s, 622Mb/s, 2,4 Gb/s, 10Gb/s, 40Gb/s.

и следниве индекси:

s,d	Овие индекси укажуваат на изворот (s) и дестинацијата (d).
i,j	Индекси кои укажуваат на почетокот и крајот на светлосната патека.
m,n	Овие два индекси укажуваат на крајните точки од физичкиот линк.
$node$	Овој индекс се однесува на јазлите во мрежата ($node=1,2,\dots,N$).
k	Индекс кој се користи за опишување на средишните јазли во врска со повеќе скока (multihop).
c	Доколку постојат повеќе светлосните патеки помеѓу ист i,j пар овој индекс ги нумерира ²⁷ .

Целта е да се минимизира следнава функција:

$$TotalFlow = \sum_{s,d} \frac{1}{\Lambda_{s,d}} \sum_{s,d} \sum_{i,j,c} \lambda_{i,j,c}^{s,d} \quad \text{ф. 6.2}$$

Целната функција ја минимизира средната вредност на скокови на пакетот во мрежаа. Таа е линеарна функција бидејќи $\sum_{s,d} \sum_{i,j,c} \lambda_{i,j,c}^{s,d}$ е линеарна сума од променливи, додека $\sum_{s,d} \Lambda_{s,d}$ е константа за дадена сообраќајна матрица

При што променливите се лимитирани со следново множество на ограничувања:

1) Ограничување кое се однесува на поврзувањето на виртуелната топологија:

$$\sum_{j,c} V_{i,j,c} \leq T_i \quad \forall i \quad \text{ф. 6.3}$$

$$\sum_{i,c} V_{i,j,c} \leq R_j \quad \forall j \quad \text{ф. 6.4}$$

$$V_{i,j,c} \in \{0,1\}^* \quad \text{ф. 6.5}$$

Првите две ограничувања осигуруваат дека бројот на светлосни патеки кои излегуваат од јазелот е ограничен од бројот на предаватели во тој јазол, додека бројот на светлосни патеки кои терминираат во јазелот се ограничени од бројот на приемници. $V_{i,j,c}$ променливата може да прими само бинарни

²⁷ Овој индекс е придонес на овој труд. Имено во [51] во глава 9 е изложена изворната формулација која е база за развој на моделот изложен во оваа глава. Сите други поважни придонеси ќе бидат означени со "*".

вредности²⁸. Можно е да помеѓу два јазли да постојат повеќе виртуелни патеки (кои следат иста или различна рута) во тој случај тие ќе бидат индексирани по c .

2) Ограничувања кои се однесуваат на поврзувањето на физичката топологија, т.е. на рутирањето на виртуелната низ физичката топологија. Тие се базираат на принципот за конзервација на протокот.

$$\sum_m p_{m,k}^{i,j,c} = \sum_n p_{k,n}^{i,j,c} \quad \forall i,j,c,k \quad k \neq i,j \quad \text{ф. 6.6}$$

$$\sum_n p_{i,n}^{i,j,c} = V_{i,j,c} \quad \forall i,j,c \quad \text{ф. 6.7}$$

$$\sum_m p_{m,j}^{i,j,c} = V_{i,j,c} \quad \forall i,j,c \quad \text{ф. 6.8}$$

$$\sum_{i,j,c} p_{m,n}^{i,j,c} \leq W_{m,n} P_{m,n} \quad \forall m,n \quad \text{ф. 6.9}$$

$$\sum_n p_{j,n}^{i,j,c} + \sum_m p_{m,i}^{i,j,c} = 0 \quad \forall i,j,c^* \quad \text{ф. 6.10}$$

$$p_{m,n}^{i,j,c} \in \{0,1\} \quad \forall i,j,c,m,n \quad \text{ф. 6.11}$$

Равенките ф. 6.6 до ф. 6.8 се базирани на теоријата на проток со повеќе производи (multicommodity flow) и всушност го опишуваат рутирањето на светлосните патеки од изворот до дестинацијата. Неравенката ф. 6.9 гарантира дека бројот на светлосни патеки кои минуваат низ оптичкото влакно не го надминува максималниот број на дозволени бранови должини ($W_{m,n}$).

Преку експерименти со користење на MPL имплементацијата на овој модел е констатирано дека се јавуваат затворени јамки и тоа најчесто во i,j јазлите. За да се избегне ова се користи ограничувањето ф. 6.10 кое вели дека виртуелната патека V_{ij} не може да содржи физички линк чиј почеток е j ниту линк чиј крај е i .

Треба да се забележи дека равенките не го следат ограничувањето за континуитет на бранови должини. Затоа решението добиено од оваа формулација може да инсистира некои од јазлите во мрежата да содржат претворувачи на бранови должини.

Првите три ограничувања можат да се прикажат со еден исказ:

$$\sum_{\substack{m \\ \text{IF } k \neq i,j}} p_{m,k}^{i,j,c} - \sum_{\substack{n \\ \text{IF } k \neq i,j}} p_{k,n}^{i,j,c} + \sum_{\substack{n \\ \text{IF } k=i}} p_{k,n}^{i,j,c} + \sum_{\substack{m \\ \text{IF } k=j}} p_{m,k}^{i,j,c} = \begin{cases} V_{i,j,c} & k=i,j \\ 0 & k \neq i,j \end{cases} \quad \forall i,j,k,c \quad \text{ф. 6.12}$$

Во MPL (Mathematical Programming Language) овој модел е имплементиран како што е прикажано во 9.8.1 со користење на ф. 6.12. Во експериментите се покажува дека доколку моделот е формулиран со независните ограничувања ф. 6.6 до ф. 6.8 не се добиваат точни резултати.

3) Ограничувања кои се однесуваат на рутирањето на сообраќајот низ виртуелната топологија.

$$\sum_{j,c} \lambda_{s,j,c}^{s,d} = \Lambda_{s,d} \quad \forall s,d \quad \text{ф. 6.13}$$

$$\sum_{i,c} \lambda_{i,d,c}^{s,d} = \Lambda_{s,d} \quad \forall s,d \quad \text{ф. 6.14}$$

$$\sum_{i,c} \lambda_{i,k,c}^{s,d} = \sum_{j,c} \lambda_{k,j,c}^{s,d} \quad \forall s,d,k \quad k \neq s,d \quad \text{ф. 6.15}$$

²⁸ Во [51] за оваа променлива е дозволено да прима целобројни ненегативни вредности. Ако помеѓу i и j има повеќе светлосни патеки $V_{ij} > 1$. Ваквиот пристап не е избран како соодветен во овој труд поради невозможната контрола на излезните резултати и нивната лоша структурираност.

$$\sum_c \lambda_{i,j,c}^{s,d} \leq \Lambda_{s,d} \sum_c V_{i,j,c} \quad \forall i,j,s,d \quad \text{ф. 6.16}$$

$$\sum_{s,d} \lambda_{i,j,c}^{s,d} \leq C \cdot V_{i,j,c} \quad \forall i,j,c \quad \text{ф. 6.17}$$

Ограничувањето ф. 6.13 укажува на тоа дека сообраќајот што извира од јазолот s може да биде разгранет и да се рутира низ различни виртуелни патеки, но при тоа сумата на сообраќајот рутиран низ овие различни патеки мора да биде еднаков на сообраќајното барање на s,d парот. Слично ограничување важи и за одредишниот јазол (види ф. 6.14). Равенката ф. 6.15 укажува на конзервацијата на протокот за средишните јазли. Ограничувањето ф. 6.16 вели дека сообраќајот може да биде рутиран само низ постоечките светлосни патеки, а ф. 6.17 дека сообраќајот што минува низ светлосната патека $V_{i,j,c}$ не може да биде поголем од капацитетот на каналот.

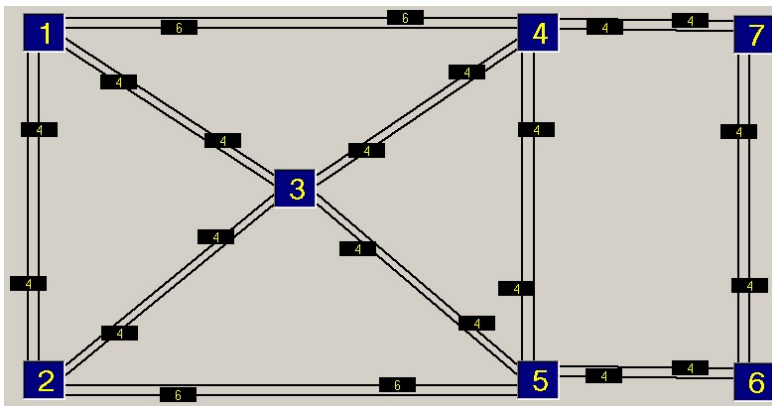
Ограничувањата ф. 6.13 до ф. 6.15 можат да се преточат во еден израз:

$$\sum_{\substack{i,c \\ \text{IF } k \neq s,d}} \lambda_{i,k,c}^{s,d} - \sum_{\substack{j,c \\ \text{IF } k \neq s,d}} \lambda_{k,j,c}^{s,d} + \sum_{\substack{j,c \\ \text{IF } k=s}} \lambda_{k,j,c}^{s,d} + \sum_{\substack{i,c \\ \text{IF } k=d}} \lambda_{i,k,c}^{s,d} = \begin{cases} \Lambda_{s,d} & k=s,d \\ 0 & k \neq s,d \end{cases} \quad \forall s,d,k \quad \text{ф. 6.18}$$

Во MPL формулацијата се користи овој израз и само во тој случај се добиваат коректни резултати.

6.1.3. Резултати

Изложената LP формулација за наоѓање на виртуелна топологија и рутирање на сообраќајот низ неа е применета врз мрежата прикажана на слика 6.4.



	1	2	3	4	5	6	7
1		101	118	97	62	22	
2	101		69	83	97	48	48
3	118	69		101	150		
4	97	83	101		42		
5	62	97	150	42			
6	22	48					
7		48					

слика 6.4 Физичка топологија на разгледуваната мрежа.

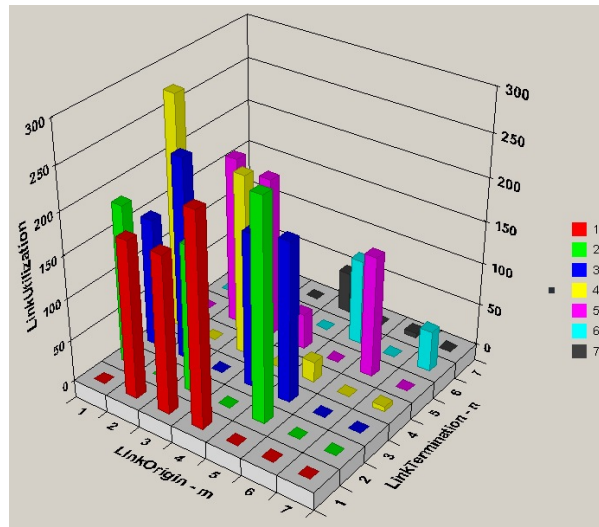
На истата слика е прикажана употребената сообраќајната матрица. Заради едноставна претстава на целиот проблем претпоставено е дека вредностите во матрицата се сообраќајните барања на s,d парот изразени во број на E1 притоки. Виртуелната топологија се гради од AU-4 треилови т.е. "светлосни патеки" со капацитет од 63·E1 (ова е само претпоставка за едноставно разбирање на моделот и добиените резултати).

Моделот се решава за 24 сек на Petium III 850MHz со 128MB RAM. Добиената вредност за средната вредност на бројот на скокови изнесува 1,0482. Значи може да се претпостави дека поголемиот дел од сообраќајот се рутира по светлосни патеки без електронска комутација (види слика 6.7). На слика 6.5 е прикажано искористувањето на линковите од физичката топологија, како и средното искористување на мрежата (53%). Исто така, прикажан е исечок од рутирањето на виртуелната низ физичката топологија. Така на пример светлосната патека 1-2 се рутира по две различни рути ($c=1,2$). Првата рута е директна и го користи линкот 1-2, а втората има три скока и ги користи линковите 1-4-3-2.

На слика 6.6 е прикажано искористувањето на виртуелната топологија за рутирање на сообраќајните барања. Како што може да се забележи поголемиот број на виртуелни патеки се максимално искористени т.е. протокот изнесува 63. Од табелата прикажана во рамките на истата слика може да се

учи дека виртуелната патека $V_{1,2,1}$ е делумно искористена за пренесување на сообраќајот помеѓу $s=1$ и $d=2$ (38·E1) но истата се искористува до нејзиниот максимален капацитет, затоа што сообраќајните парови 3-2 и 4-2 ја искористуваат истата за пренесување на нивните сообраќајни барања (5 и 20 соодветно; види слика 6.7).

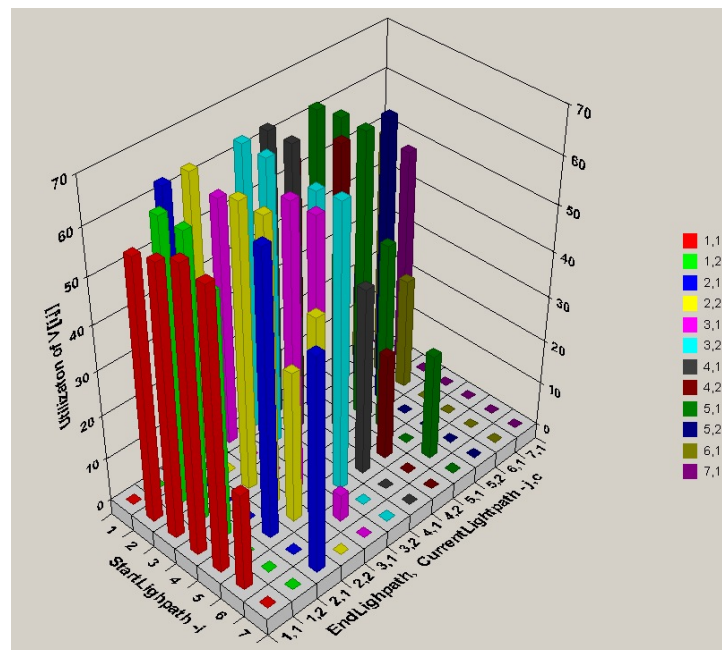
1	2	189	252	75
1	3	152	252	60,3
1	4	277	378	73,3
2	1	185	252	73,4
2	3	237	252	94
2	5	198	378	52,4
3	1	185	252	73,4
3	2	173	252	68,7
3	4	212	252	84,1
3	5	188	252	74,6
4	1	248	378	65,6
4	3	181	252	71,8
4	5	42	252	16,7
4	7	48	252	19
5	2	258	378	68,3
5	3	188	252	74,6
5	4	24	252	9,5
5	6	101	252	40,1
6	5	143	252	56,7
6	7	6	252	2,4
7	4	6	252	2,4
7	6	48	252	19
AvUtil				53



	i	j	c	m	n	p_ijmn
1	1	2	1	1	2	1
2	1	2	2	1	4	1
3	1	2	2	3	2	1
4	1	2	2	4	3	1
5	1	3	1	1	4	1
6	1	3	1	4	3	1
7	1	3	2	1	2	1
8	1	3	2	2	3	1
9	1	4	1	1	4	1
10	1	4	2	1	4	1
11	1	5	1	1	3	1
12	1	5	1	3	5	1
13	1	6	1	1	3	1
14	1	6	1	2	5	1
15	1	6	1	3	2	1
16	1	6	1	5	6	1
17	2	1	1	2	1	1
18	2	1	2	2	1	1

слика 6.5 Искористување на физичката топологија

	s	d	i	j	c	l_sdij
1	1	2	1	2	1	38
2	1	2	1	2	2	63
3	1	3	1	3	1	55
4	1	3	1	3	2	63
5	1	4	1	4	2	54
6	1	4	1	4	1	43
7	1	5	1	5	1	62
8	1	6	1	6	1	22
9	2	1	2	1	1	38
10	2	1	2	1	2	63
11	2	3	2	3	2	63
12	2	3	2	6	1	6
13	2	3	6	3	1	6
14	2	4	1	4	1	20
15	2	4	2	1	1	20
16	2	4	2	4	1	63
17	2	5	2	5	2	34
18	2	5	2	5	1	63
19	2	6	2	6	1	48
20	2	7	2	7	1	48
21	3	1	3	1	1	55
22	3	1	3	1	2	63
23	3	2	1	2	1	5
24	3	2	6	2	2	1
25	3	2	3	2	2	63
26	3	2	3	1	1	5
27	3	2	3	6	1	1



слика 6.6 Искористување на виртуелната топологија

Како што беше претходно речено поголемиот дел од сообраќајот се рутира во оптички домен без користење на електронска комутација. Ако се анализира слика 6.7 ќе се констатира дека рутирање во електронски домен се јавува само за сообраќајните парови $s,d=2,3; 2,4; 3,2; 4,2; 3,5; 5,3$. Така на пример, за сообраќајниот пар 2-4 кој има сообраќајно барање 83, 63 E1 врски директно се рутираат во оптички домен низ виртуелната патека 2-4. Останатите 20E1 врски се рутираат низ две светлосни т.е. виртуелни патеки 2-1 и 1-4. Во јазолот 1 е потребно да се изврши О-Е-О коневрзија, а 20-те E1 врски да се комутираат во електронски домен. Интересно е да се забележи дека не постои симетрија за рутирање на патеките помеѓу ист сообраќаен пар во различните насоки особено во случајот кога има електронска комутација. Ова е последица на тоа што во моделот не е вметнато ограничување за симетричност. Во реалноста тоа секогаш треба да биде исполнето, особено за глобални мрежи кај кои

виртуелните патеки можат да бидат долги илјадници километри. За таквите случаи може да се јави разлика во временското доцнење за појдовната и дојдовната насока.

Овој тип на модел е многу корисен бидејќи денешните транспортни мрежи се повеќе-нивовски и се базираат на виртуелни патеки, контејнери и слично. Широко е применлив како за WDM така за SONET/SDH, ATM и IP/MPLS базираните мрежи.

	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	2,1	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	3,1	3,2	3,4	3,5	4,1	4,2	4,3	4,5	5,1	5,2	5,3	5,4	6,1	6,2	7,2
1,2,1	38												5				20									
1,2,2	63																									
1,3,1		55																								
1,3,2		63																								
1,4,1			43					20																		
1,4,2			54																							
1,5,1				62																						
1,6,1					22																					
2,1,1						38		20																		
2,1,2						63																				
2,3,2							63																			
2,4,1								63																		
2,5,1									63																	
2,5,2										34																
2,6,1								6			48															
2,7,1											48															
3,1,1												55	5													
3,1,2												63														
3,2,2													63													
3,4,1														38												
3,4,2														63												
3,5,1															63											
3,5,2															63											
3,6,1													1	24												
4,1,1																63										
4,1,2																34	20									
4,2,2																	63									
4,3,1																		63								
4,3,2																		38					24			
4,5,1																			42							
5,1,1																				62						
5,2,1																					63					
5,2,2																					34					
5,3,1																						63				
5,3,2																						63				
5,4,1																							42			
5,4,2																							24			
6,1,1																								22		
6,2,2													1												48	
6,3,1								6																		
6,5,1															24											
7,2,1																										48

слика 6.7 Матрица за рутирање на сообраќајот

6.2. Рутирање и доделување на бранови должини – базичен модел

Комплетното множество на светлосни патеки се смета дека формира виртуелна топологија (види глава 6.1) и низ неа треба да се рутира пакетски сообраќај. Откако множеството на светлосни патеки е избрано, треба тие да се рутираат низ мрежата и да им се додели бранова должина. Ова се нарекува проблем на рутирање и доделување на бранови должини (RWA-Routing and Wavelength Assignment).

RWA проблемот може да се дефинира како што следи: за зададено множество на светлосни патеки кои треба да се воспостават во мрежата, и при зададени ограничувања на бројот на бранови должини, да се одредат рутите преку кои овие светлосни патеки ќе се воспостават и исто така да се одреди брановата должина која треба да им се додели.

Додека рутите со најкраток-пат може да бидат најпогодни, треба да се забележи дека овој избор понекогаш мора да се прекрши, со цел да се дозволи воспоставување на поголем број на светлосни патеки. Со оглед на ова, може да се дозволат неколку алтернативни рути за воспоставување на светлосните патеки. Светлосните патеки кои не можат да се воспостават поради ограничувањата на рутите и брановите должини се вели дека се блокирани, па затоа соодветниот проблем за мрежна оптимизација е да се минимизира веројатноста на блокирање.

Во овој поглед, треба да се забележи дека најчесто светлосната патека работи на иста бранова должина низ сите оптички влакна по кои минува, во кој случај се вели дека светлосната патека го

задоволува ограничувањето за континуитет на бранова должина (wavelength-continuity constraint). Со оглед на ова, на две светлосни патеки кои делат заедничко оптичко влакно не треба да им се доделат исти бранови должини. Сепак доколку јазлите се екипирани со претворувачи на бранови должини, тогаш ограничувањето за континуитет на бранова должина не важи, и светлосните патеки може да зафаќаат различни бранови должини во линковите содржани во нивната рута.

6.2.1. Математичка формулација на базичниот RWA модел

Моделот²⁹ кој ќе биде прикажан во оваа глава се однесува на WP мрежи т.е. за мрежи кај кои светлосните патеки го исполнуваат ограничувањето за континуитет на брановите должини. Во него се користат следниве векторски променливи кои треба да се адаптираат со користење на оптимизационата техника:

F_{max}	Оваа целобројна (integer) променлива ја дава вредноста на проток на максимално оптоварениот линк од мрежата.
$F_{i,j}^{s,d,\lambda}$	Бинарна променлива со вредност 1 доколку патеката меѓу сообраќајниот пар s,d со бранова должина λ , минува низ линкот i,j , во спротивно 0.
$PATHS_{s,d,\lambda}$	Целобројна (integer) променлива која ја дава вредноста на бројот на светлосни патеки на бранова должина λ помеѓу sd парот.

следниве скалари кои се зададени во графичкиот модел:

P_{ij}	Овој скалар ја опишува физичката топологија. Доколку помеѓу јазлите i и j има директен физички линк тогаш $P_{ij}=1$, во спротивно 0. $P_{m,n}$ е исто така 0 за несоседни јазли.
$A_{s,d}$	Сообраќајно барање помеѓу сообраќајниот пар s,d .
W_{ij}	Максимален број на бранови должини по оптичко влакно.

и следниве индекси:

s,d	Овие индекси укажуваат на изворот (s) и дестинацијата (d).
i,j	Индекси кои укажуваат на почетокот и крајот од физичкиот линк.
λ	Индекс кој кажува на која бранова должина е воспоставена светлосната патека.

Целта е да се минимизира протокот на максимално оптоварениот линк што е соодветно на минимизирање на бројот на светлосни патеки кои минуваат низ даден линк:

$$\min F_{\max}$$

ф. 6.19

При следново множество на ограничувања:

1) Следново ограничување ја дефинира променливата која ја содржи вредноста на протокот на линкот со максимален проток. Десната страна на неравенката го дава протокот на даден линк, а левата страна кумулативно ја прима вредноста на линкот кој има поголем проток. Тоа се повторува за секој линк и на крај $F_{\max}$ ја содржи вредноста на протокот на најоптоварениот линк

$$F_{\max} \geq \sum_{s,d} \sum_{\lambda} F_{i,j}^{s,d,\lambda} \quad \forall i,j$$

ф. 6.20

2) Ограничувањето дадено со ф. 6.21 е многу познато од другите мрежни проблеми (најкраток пат, максимален проток и минимална цена) и се нарекува ограничување за конзервација на протокот. Со други зборови, колку проток ќе влезе во даден јазол толку треба да излезе. Првата сума ги поминува сите линкови чиј почетен јазол е јазолот i , втората сума ги поминува сите линкови чиј краен јазол е јазолот i , а десната страна од ограничувањето ги дава граничните услови кога линкот е прв односно последен во патеката. Доколку јазолот i е транзитен јазол ($i \neq s$ и $i \neq d$), тогаш во светлосната патека со бранова должина λ само еден линк може да го има i како почетен јазол (првата сума дава вредност 1) и само еден линк ќе го има i како краен (втората сума ќе даде вредност 1). Тоа важи за сите средни

²⁹ Овој модел е придонес на магистерскиот труд. Тој се базира на идеја од [51] глава 10.

јазли. Десната страна од равенката за сите средни јазли е еднаква на 0. За крајните јазли една од сумите е еднаква на 0. На пример ако јазолот i е почетен јазол на патеката ($i=s$) тогаш првата сума е еднаква на еден, а втората на нула затоа што i не може истовремено да биде и краен јазол на патеката. Во овој случај **PATH** променливата е еднаква на единица³⁰ па равенството е точно. Слично објаснување важи кога јазолот i е краен јазол на патеката ($i=d$).

$$\sum_{\substack{j \\ IF\ i \neq d}} F_{i,j}^{s,d,\lambda} - \sum_{\substack{j \\ IF\ i \neq s}} F_{j,i}^{s,d,\lambda} = \begin{cases} PATH_{s,d,\lambda} & \text{за } s = i \\ -PATH_{s,d,\lambda} & \text{за } d = i \\ 0 & \text{за други} \end{cases} \quad \forall s, d, i \quad \text{ф. 6.21}$$

3) Наредните две ограничувања спречуваат појава на затворени циклуси т.е патеки кои се враќаат во претходно поминат јазол. Ограничувањето ф. 6.22 ја исклучува можноста почетниот јазол на било кој линк биде крај на патеката, како и можноста крајниот јазол на било кој линк биде почеток на патеката. Второто ограничување спречува да унидирекционална патека користи линкови со исти соседни јазли но спротивна насока.

$$\sum_j \sum_\lambda F_{d,j}^{s,d,\lambda} + \sum_i \sum_\lambda F_{i,s}^{s,d,\lambda} = 0 \quad \forall s, d \quad \text{ф. 6.22}$$

$$F_{j,i}^{s,d,\lambda} + F_{i,j}^{s,d,\lambda} \leq 1 \quad \forall s, d, \lambda, i, j \quad \text{ф. 6.23}$$

4) Следново ограничување гарантира дека светлосните патеки кои поминуваат низ даден линк се со различни бранови должини.

$$\sum_{s,d} F_{i,j}^{s,d,\lambda} \leq 1 \quad \forall i, j, \lambda \quad \text{ф. 6.24}$$

5) Ограничување кое вели дека сообраќајното барање на s, d парот треба да биде еднакво на вкупниот број на воспоставени светлосни патеки помеѓу тој пар.

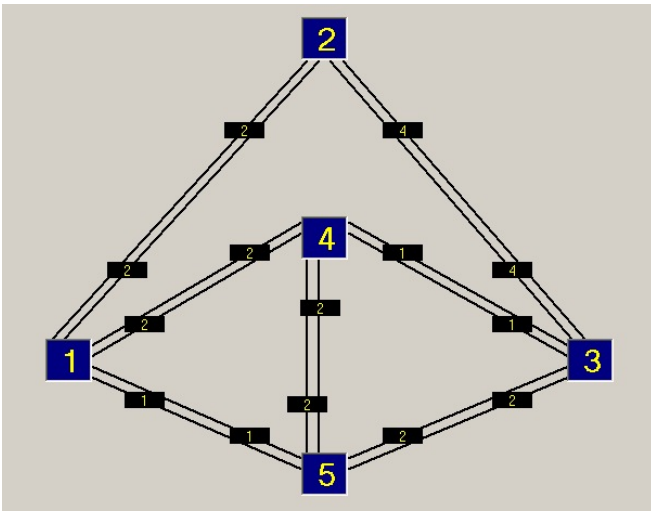
$$\sum_\lambda PATH_{s,d,\lambda} = \Lambda_{s,d} \quad \forall s, d \quad \text{ф. 6.25}$$

6) Протокот низ даден линк не смее да го надмине максимално дозволеениот број на бранови должини т.е. капацитетот на тој линк.

$$\sum_{s,d,\lambda} F_{i,j}^{s,d,\lambda} \leq W_{i,j} \quad \forall i, j \quad \text{ф. 6.26}$$

³⁰ Ќе биде единица само ако помеѓу s, d сообраќајниот пар постои само една патека со бранова должина λ . Доколку постојат две патеки со иста бранова должина (патуваат по различни рути) тогаш и од двете страни на равенката ќе се добие вредност 2, и тн.

6.2.2. Резултати



слика 6.8 Мрежа користена за тестирање на базичниот RWA модел

Овој модел е имплементиран во MPL и програмската листа е прикажана во глава 9.8.2. Применет е на неколку различни мрежни архитектури, а ќе бидат прикажани резултатите за мрежата на слика 6.8. Мрежата е тестирана со многу едноставна сообраќајна матрица. Помеѓу сообраќајниот пар 1-3 барањето изнесува 3, а помеѓу 2-5 барањето изнесува 2. Рутирањето на светлосните патеки е прикажано на табела 6.1. Како што се гледа сообраќајното барање меѓу 1-3 сообраќајниот пар се рутира по 1-2-3 на $\lambda=2$, 1-4-3 на $\lambda=2$ и 1-5-3 на $\lambda=1$. За другиот сообраќаен пар (2-5) сообраќајното барање се рутира по две светлосни патеки на $\lambda=1$ (2-1-4-5 и 2-3-5). Како што може да се забележи на ниту еден линк нема патеки со иста бранова должина.

Моделот е прилично едноставен и дава задоволителни резултати за помали мрежи, не

во смисла на пресметувачката комплексност туку од аспект на структурираноста на излезните податоци. Имено, од табела 6.1 може да се забележи дека патеките не се еднозначно определени. Горната констатација за нивното рутирање беше интуитивна т.е. хеуристичка. Тоа е прифатливо за релативно мало множество на излезни резултати. За посложени мрежи и сообраќајни матрици, интуитивното поврзување на линковите во патеки е прилично тешка процедура. Затоа овој модел може да се прифати од едукативен и искусствен аспект. Модели за RWA кои можат да се користат од професионален аспект се детално изложени во глава 7.

табела 6.1 Рутирање на светлосните патеки во мрежата од слика 6.8

s	d	i	j	λ	$F_{i,j}^{s,d,\lambda}$
1	3	1	2	2	1.0000
1	3	1	4	2	1.0000
1	3	1	5	1	1.0000
1	3	2	3	2	1.0000
1	3	4	3	2	1.0000
1	3	5	3	1	1.0000
2	5	1	4	1	1.0000
2	5	2	1	1	1.0000
2	5	2	3	1	1.0000
2	5	3	5	1	1.0000
2	5	4	5	1	1.0000

s	d	λ	PATHS _{s,d,λ}
1	3	1	1.0000
1	3	2	2.0000
2	5	1	2.0000

