

Универзитет Св. „Кирил и Методиј“ во Скопје
Факултет за електротехника и информациски технологии
Институт за телекомуникации

Докторска дисертација

КООПЕРАТИВНИ КОМУНИКАЦИИ ПРЕКУ БЕЗЖИЧНИ РЕЛЕЈНИ КАНАЛИ

Ментор:

проф. д-р Зоран Хаџи-Велков

Кандидат:

Јован Стошиќ

декември 2014

Посветено на мојот син Иван и сопруга Светлана

Содржина

Листа на акроними	1
1 Вовед	4
1.1 Предности и недостатоци на кооперативните релејни комуникации	6
1.2 Карактеризација на релејните јазли во кооперативните системи	7
1.2.1 Однесување на релејните јазли	7
1.2.2 Методи за обработка на податоците во релето	8
1.3 Метрики на перформансите на кооперативните релејни канали	11
1.3.1 Капацитет	11
1.3.2 Веројатност на испад и капацитетен испад	12
1.3.3 Средна веројатност на грешка	13
1.3.4 Компромис меѓу добивките во диверзитет и мултиплексирање	13
1.4 Карактеризација на фединг каналите	14
1.4.1 Главни карактеристики на фединг каналите	15
1.5 Моделирање на фединг каналите	16
1.5.1 Повеќепатен фединг	16
1.6 Краток преглед на докторската дисертација	17
2 Капацитет на кооперативните релејни канали	19
2.1 Горна пресечна граница на капацитетот	20
2.2 Декодирај-и-проследи релеен канал	24
2.2.1 Каскаден релеен канал	25
2.2.2 Кохерентен каскаден релеен канал	27
2.2.3 Декодирај-и-проследи релеен канал	28
2.3 Компримирај-и-проследи релеен канал	32
2.4 Гаусов релеен канал	39
2.4.1 Горна пресечна граница и капацитет за DF, DT и каскаден Гаусов RC	39
2.4.2 Гаусов канал со компримирај-и-проследи	44
2.4.3 Гаусов релеен канал со фреквентна распределба во дестинацијата	46
2.4.4 Линеарен Гаусов RC со фреквентна распределба во дестинацијата	51
2.4.5 Гаусов релеен канал со засили-и-проследи	52
2.4.6 Капацитет на AF каскаден релеен канал	54
3 Перформанси на МИМО релеен канал со две делници и две антени по јазол	56
3.1 Релеен канал со една антена по јазол	56
3.2 Приеман и предавателен диверзитет	59
3.3 Модел на каналот	61
3.3.1 2x1x1 МИМО канал со две делници	61
3.3.2 Раздвојување за 222 OSTBC за 2x1 систем	63
3.3.3 2x2x1 и 2x2x2 МИМО системи со две делници	64
3.3.4 Раздвојување за 222 OSTBC за 2x2 систем	65
3.4 Веројатност на испад	67
3.5 Нумерички и симулациски резултати	70

4	Перформанси на МИМО релеен канал со повеќе антени по јазол	74
4.1	Модел на каналот	75
4.2	Веројатност на грешка	77
4.2.1	Апроксимација на EP за произволен однос сигнал-шум	77
4.2.2	Апроксимација на EP за голем однос сигнал-шум	80
4.2.3	Раздвојување на OSTBC кодовите од повисок ред	81
4.2.4	Нумерички и симулациски резултати	83
4.3	Веројатност на испад	89
4.4	МИМО релеен канал: Вклучување на директна патека во анализата	92
4.4.1	Едноставен израз за PDF за МИМО RC без директна патека	92
4.4.2	PDF на односот сигнал-шум на AF МИМО RC со директна патека	93
4.4.3	OP на AF МИМО релеен канал со директна патека	95
5	Веројатност на испад во релеен канал со повеќе делници	98
5.1	Модел на каналот	98
5.2	Нумерички и симулациски резултати	100
6	МИМО релеен канал од информациско-теоретски аспект	106
6.1	Точка-точка МИМО канал	106
6.1.1	Капацитет на точка-точка канал со една антена по јазол	107
6.1.2	Капацитет на точка-точка МИМО канал	108
6.1.3	Капацитет на точка-точка МИМО со OSTBC	110
6.1.4	Веројатност на капацитетен испад	112
6.2	Ергодичен капацитет	117
6.2.1	Каскаден AF МИМО релеен канал	117
6.2.2	AF МИМО релеен канал со директна патека	120
6.3	Веројатност на капацитетен испад	122
6.3.1	Каскаден AF МИМО релеен канал	122
6.3.2	AF МИМО релеен канал со директна патека	126
7	Заклучок	129
8	Додатоци	132
8.1	Релеен канал на Сато	132
8.2	Капацитет на CF за RC со сума по модул 2	133
8.3	CUB за релеен канал со сума по модул 2	135
8.4	CUB за Гаусов релеен канал	136
8.5	Капацитет на деградиран Гаусов RC	137
8.6	Моментален капацитет на точка-точка МИМО канал	142
9	Објавени трудови од темата на докторската дисертација	145
	Литература	146

Листа на акроними

AF	Amplify and Forward
AWGN	Additive White Gaussian Noise
BEP	Bit Error Probability
BMC	Block Markov Coding
BPSK	Binary Phase Shift Keying
CDF	Cumulative Distribution Function
CDMA	Code Division Multiple Access
CF	Compress and Forward
CSI	Channel State Information
CUB	Cutset Upper Bound
DCF	Decouple-and-Forward
DF	Decode and Forward
DMC	Discrete Memoryless Channel
DMRC	Discrete Memoryless Relay Channel
DMT	Diversity Multiplexing Tradeoff
DT	Direct Transmission
EF	Estimate and Forward
EP	Error Probability
EVCM	Equivalent Virtual Channel Matrix
FG	Fixed Gain
i.i.d.	Independent and Identically Distributed
LAN	Local Area Networks
LF	Linear-Process and Forward
LLN	Law of Large Numbers
LOS	line-of-sight
LTE	Long-Term Evolution

MGF Moment Generating Function
MIMO Multiple Input Multiple Output
MISO Multiple-Input Single-Output
MRC Maximum Ratio Combining
nLF Nonlinear Process and Forward
NNC Noisy Network Coding
OC Outage Capacity
OP Outage Probability
OSTBC Orthogonal Space-Time Block Coding
PDF Probability Density Function
PF Purge and Forward
QoS Quality of Service
RB Random Binning
RC Relay Channel
RFD Receiver Frequency Division
SIMO Single-Input Multiple-Output
SISO Single Input - Single Output
SNR Signal-to-Noise Ratio
SSR Service Sustainability Rate
VG Variable Gain

Апстракт

Кооперативните комуникации претставуваат важна област на истражување во безжичните комуникации. Тие ги користат својствата на безжичниот канал за да се зголеми ефикасноста и робусноста на телекомуникацискиот систем. Соседните безжични јазли (т.н. партнери или релеја) меѓусебно си помагаат во процесот на комуникацијата преку отстапување на дел од ресурсите за пренос на податоците испратени од партнерот. Ваквата комуникација е возможна поради дифузната природа на радиоканалот, и затоа сигналот испратен од изворот, освен до дестинацијата, може да стаса и до релето (т.н. дифузен канал точка - повеќе точки). Посредството на релето при комуникацијата меѓу изворот и дестинацијата оформува систем со виртуелен просторен диверзитет, со што се подобруваат перформансите на комуникацијата извор-дестинација. При координирано праќање на информација од изворот и релето кон дестинацијата се формира еквивалентен повеќепристапен канал (т.н. релеен канал) чиј капацитет е поголем од директниот канал извор-дестинација. Добивката од кооперација може дополнително да се зголеми ако изворот, дестинацијата и релето располагаат со повеќе антени, при што дополнителната добивка се должи на појавата на просторниот диверзитет низ фединг канал.

Во докторската дисертација се анализирани перформансите на кооперативните релејни канали од информациско-теоретски и од комуникациско-теоретска перспектива. Анализирани се релејните канали со една влезна и една излезна антена, како и релејните канали со повеќе влезни и повеќе излезни антени (МИМО). За релејните канали со една влезна и една излезна антена, анализирана е горната граница на капацитетот, како и границите на достижните информациски брзини за основните релејни техники.

За МИМО релејните канали, анализирани се системи со две делници со посебен осврт кон МИМО системите со блоковско ортогонално просторно-временско кодирање (OS-TBC) во фединг канал. Претпоставено е дека релето користи посебен тип на засили-и-проследи релејна техника, наречена раздвои-и-проследи, при што релето и дестинацијата имаат целосни информации за статусот на каналот. Во засили-и-проследи релето, влезниот сигнал се раздвојува, засилува и проследува кон дестинацијата. За таквата конфигурација, се изведени прецизна и груба апроксимација за веројатноста за грешка за произволен однос сигнал-шум. За големи вредности на односот сигнал-шум прецизната апроксимација е упростена во едноставен асимптотски израз. Добиените апроксимации за веројатноста за грешка се споредени со веројатноста за грешка добиена со употреба на методот на момент-генерирачка функција и веројатноста за грешка добиена со Монте Карло симулации. Исто така, изведени се прецизни и груби апроксимации за веројатноста на испад за разгледуваниот засили-и-проследи МИМО релеен канал. Апроксимациите на веројатноста на испад се споредени со точните резултати добиени со нумеричка интеграција базирана на момент-генерирачка функција и веројатноста на испад добиена со Монте Карло симулации. Освен тоа, изведени се во затворена форма апроксимации на веројатноста на испад на засили-и-проследи МИМО релејниот канал со директна патека до дестинацијата. На крајот се изведени изрази за ергодичен капацитет и капацитетен испад на засили-и-проследи МИМО релејниот канал со и без директна патека до дестинацијата. Каналите со директна патека покажуваат значително подобри перформанси од каналите без директна патека во поглед на ергодичниот капацитет и капацитетниот испад.

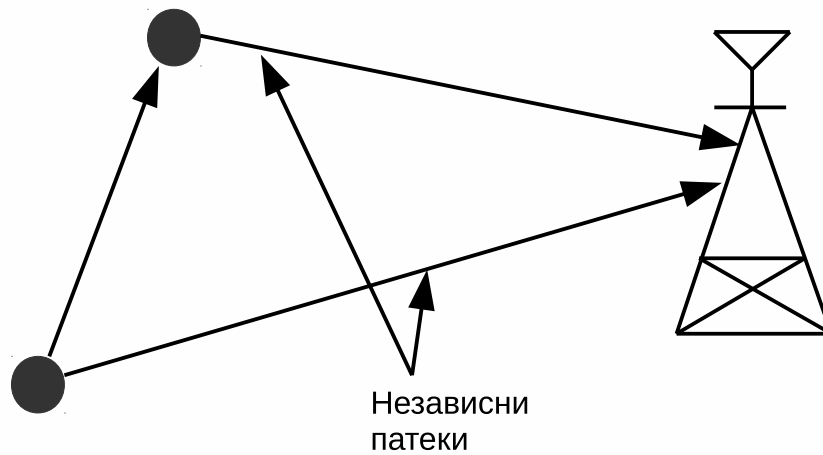
1 Вовед

Технологијата со повеќе влезови и излези (анг. MIMO - Multiple Input Multiple Output) стандардно се применува во современите телекомуникациски системи бидејќи таа нуди значителни подобрувања на перформансите во смисол на нивниот капацитет и издржливост, кои се постигнуваат преку искористување на повеќепатното простирање во безжичниот медиум. MIMO системите со 2 до 4 антени во моментот се користат во безжичните LAN (Local Area Networks) мрежи (802.11n, 802.11ac) или се развиваат за безжичните системи како 3GPP-LTE и LTE-advanced.

Делумно поттикнато од MIMO концептот, корисничката кооперација неодамна се јави како дополнителен развоен концепт во безжичните комуникации, наречен кооперативен диверзитет, кој има потенцијал да направи револуција во комуникациските системи од следната генерација со нудење на дополнителен капацитет и подобрувања од аспект на стабилност со мало дополнително процесирање на сигнали и мали дополнителни трошоци [1]. Некои кооперативни (т.е. релејни) техники се веќе дел од LTE-Advanced стандардот [2]. Соседните безжични јазли (кои исто така се нарекуваат релее или партнери) го помагаат меѓусебниот процес на комуникација со доделување на дел од нивните ресурси за пренос на дел (или сите) информации од партнерот. Со правилно координирање на различни просторно дистрибуирани јазли во единствен безжичен систем, може ефективно да се синтетизира виртуелно антенско поле за постигнување на просторен диверзитет, слично како во MIMO системите. Комбинацијата од MIMO и кооперативните релејни канали ги искористува бенефициите од диверзитет и добивките од мултиплексирање карактеристични за MIMO системите и добивките за надминување на засенувањето (shadowing), намалување на непотребно високата предавателна моќност и намалување на интерференцијата кои се карактеристични за радио-релејните системи.

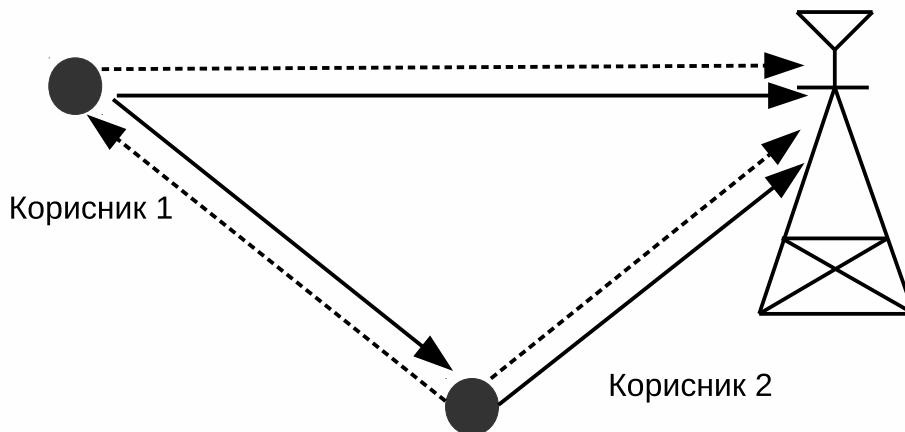
Мобилниот безжичен канал е под силно влијание на фединг, што предизвикува слабењето на сигналот значително да варира во текот на преносот. Користењето на независни копии од сигналот создава *диверзитет* што ефективно се справува со штетните ефекти на федингот. На пример, може да се создаде просторен диверзитет со испраќање на сигналите од различни локации, со што се овозможува да пристигнат во дестинацијата независно заслабнати верзии од сигналот. Кооперативните комуникации го создаваат овој диверзитет на нов и интересен начин. За иницијално објаснување на идеата за кооперативни комуникации ќе ја разгледуваме сликата 1.1. Оваа слика покажува две мобилни станици кои комуницираат со иста дестинација. Секоја од станиците има една антена и не може да генерира просторен диверзитет. Сепак можно е едната мобилна станица да ги прими податоците од другата и да ги испрати кон дестинацијата заедно со сопствените податоци. Бидејќи патеките од двете станици се независни тие се под влијание на независен фединг што во дестинацијата создава просторен диверзитет. На сликите користиме икони кои претставуваат базни станици и мобилни станици заради впечатлива графичка репрезентација. Сепак, идејата за кооперативност е генерална, и е дури повеќе својствена за ад-хок безжичните мрежи и безжичните сензорски мрежи отколку за клеточните мрежи.

Во кооперативните безжични комуникации, ќе разгледуваме клеточни или ад-хок безжични мрежи, каде безжичните станици се нарекуваат корисници. Корисниците можат да го зголемат квалитетот на услуга (мерен на физичко ниво со веројатност на грешка или веројатност на испад) со користење на кооперативни постапки. Во кооперативниот



Слика 1.1: Кооперативни комуникации

комуникациски систем, секој безжичен корисник се претпоставува дека испраќа податоци но исто така се однесува како кооперативен агент за другиот корисник (слика 1.2).



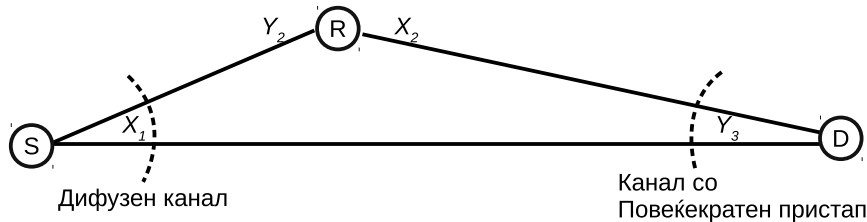
Слика 1.2: Во кооперативните комуникации секоја мобилна станица е корисник и реле

Кооперацијата води кон интересни компромиси од аспект на брзината на пренесување на податоците и моќноста за испраќање. Од аспект на моќноста на испраќање може да се тврди дека од една страна повеќе моќност ќе биде потребна за секој корисник, кога тој работи во кооперативен режим, бидејќи тој испраќа за двата корисника. Од друга страна, моќноста кај двата корисника ќе се намали заради добивката во диверзитет (види глава 1.3). Од аспект на овој компромис, се очекува да дојде до вкупна редукција на предавателната моќност, доколку другите параметри од интерес останат непроменети.

Слични прашања се поставуваат за брзината на пренесување на податоците во системот. Со оглед на тоа што во кооперативните комуникации секој корисник ги испраќа неговите податоци како и податоците од неговиот партнер на прв поглед изгледа дека тоа ќе предизвика намалување на брзината на пренесување на податоците во системот. Сепак, спектралната ефикасност на секој корисник се подобрува бидејќи со кооперативните комуникации може да се зголемат брзините на каналните кодови.

Базичните идеи за кооперативните комуникации се дадени во исклучително важниот

трудот [3] каде се анализирани информациско-теоретските својства на релејниот канал. Во овој труд се анализирани капацитетот на мрежа со три јазли која се состои од извор S , реле R и дестинација D . Претпоставено е дека сите јазли работат во ист опсег, така што системот може да се подели во дифузен дел гледано од аспект на изворот и канал со повеќекратен пристап гледано од аспект на дестинацијата (слика 1.3).



Слика 1.3: Релеен канал

Многу од идеите кои подоцна се јавија во литературата се базираат на [3]. Сепак, во неколку аспекти кооперативните комуникации се разликуваат од релејниот канал. Прво, последните истражувања се базираат на концептот на диверзитет во федин канал додека во [3] воглавно се анализира канал со додавачки бел Гаусов шум (анг. AWGN - Additive White Gaussian Noise). Второ, во релејниот канал, основна цел на релето е да му помогне на главниот канал, додека во кооперативните системи вкупните системски ресурси се фиксирани и корисниците се однесуваат и како извори на информација и како релеи. Во продолжението на ова глава ќе ги карактеризираме релејните јазли и основните кооперативни постапи односно методите за обработка на податоците во релето.

1.1 Предности и недостатоци на кооперативните релејни комуникации

Главните предности од користење на поддржувачки или кооперативни релеи во системот се:

- Добивка во перформанси која се должи на добивката во надминување на слабеењето, добивката во диверзитет и добивка од мултиплексирање. Овие добивки резултираат во намалување на предавателните моќности, поголем капацитет или подобро покривање. Диверзитетот кој се мери врз основ на градиентот на кривата на веројатноста на грешка за голем однос сигнал-шум (анг. SNR - Signal-to-Noise Ratio) за системите со кооперацијата изнесува 2 што одговара на диверзитетот што се обезбедува од стандардните дво-антенски предавателни или приемни постапки. Кооперативните комуникации обезбедуваат подобрувања во веројатноста на грешка дури и кога квалитетот на каналот меѓу корисниците е полош од каналот до дестинацијата.
- Балансиран квалитет на сервис. Во традиционалните телекомуникациски системи корисниците кои се наоѓаат во области со слабо покривање добиваат послаб квалитет на сервис (QoS - Quality of Service). Релејните системи дозволуваат да се избалансира овој недостаток односно на овие корисници да им се даде скоро ист квалитет на сервис.
- Имплементација без постоење на инфраструктура. Користењето на релеи дозволува имплементација на систем кој има минимална инфраструктура пред

имплементацијата. На пример, во области после ненадејна временска катастрофа, можат да се користат релеи за да се овозможат комуникации дури и во случај кога клеточниот систем не функционира.

- Во споредба со решенијата кои користат само клеточен пристап за обезбедување на одредено QoS ниво, користењето на релеи резултира во решенија со намалени севкупни трошоци.

Кооперативните комуникации, како што беа претходно опишани, претпоставуваат дека дестинацијата може да ги раздвои сигналите испратени од изворот и од партнерот (релето). Тоа се остварува со ортогонално испраќање на двата дела така што тие можат да се издвојат. Наједноставен начин на издвојување е во време, т.е. корисничките податоци и податоците од релето да се испраќаат во временски интервали кои не се преклопуваат. Во [1], се користи методата со повеќекратен пристап со распределба на кодови (анг. CDMA - Code Division Multiple Access) кои обезбедуваат ортогоналност при паралелниот пренос на информациите од двата партнери. Освен тоа возможно е издвојувањето да се оствари во фреквентен домен.

Традиционалните релејни канали работат во полу-дуплексен режим, каде комуникацијата во делницата од изворот до дестинацијата и во делницата од релето до дестинацијата е ортогонална што се обезбедува со користење на фреквентана или временска распределба. Од друга страна, во дуплексниот режим на работа изворот и релето може да делат заеднички временски или фреквентен домен, така што релето може истовремено да предава и прима. Полу-дуплексниот режим има лоша спектраната ефикасност поради што има двојно помал капацитет од системите кои работат во дуплексен режим. Сепак, дуплексниот режим е тежок за имплементација во пракса заради интерференцијата која се јавува во приемната антена како резултат на сигналот од предавателната антена на тој јазол.

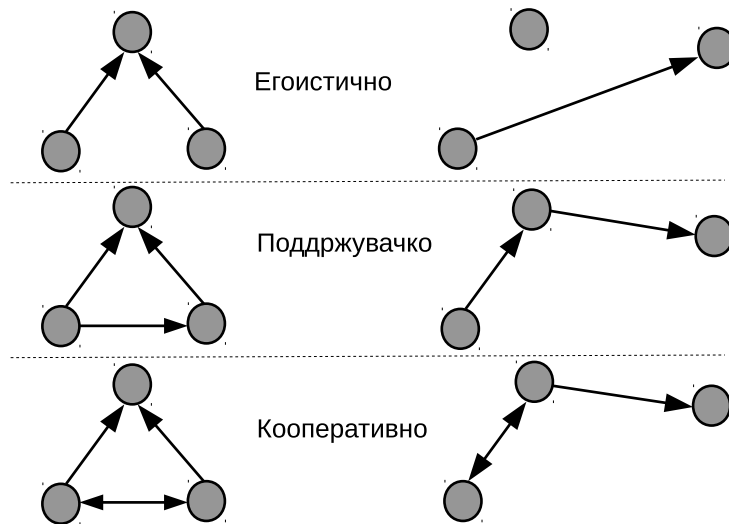
1.2 Карактеризација на релејните јазли во кооперативните системи

Во оваа глава ќе ги карактеризираме различните типови на однесувања на релејните јазли и како во нив се обработуваат информациите.

1.2.1 Однесување на релејните јазли

Јазлите кои се однесуваат како релеи или како кооперативни јазли играат централна улога во кооперативната мрежа. Нивното однесување има огромно влијание на перформансите на системот и согласно слика 1.4 може да се класифицираат во три основни типови: јазли кои се однесуваат егоистично, поддржувачки и кооперативно.

Егоистично однесување (без помош): Ова е најтипично однесување на јазлите во денешните безжични комуникациски системи. Во овој случај, секој јазол комуницира независно со базната станица доколку тој има податоци за испраќање или останува неактивен доколку тој нема податоци за пренос, иако тој може да му помогне на друг јазол кој има податоци за пренос. Другите јазли се сметаат за натпреварувачи, т.е. за да се зголемат ресурсите за еден јазол потребно е да се намалат ресурсите за другите јазли. Јазлите во ваквите безжични мрежи силно го чувствуваат влијанието на безжичниот канал во тоа што јазлите со добри услови на каналот постигнуваат поголеми брзини на пренесување, додека јазлите со полоши услови на каналот постигнуваат помали брзини за пренесување.



Слика 1.4: Типични форми на однесување на јазлите. Во симетричниот случај (лево), двата јазли може да бидат поддржувачи или соработници, во асиметричниот случај (десно), се избира подобра опција

Поддржувачко однесување (еднострана помош): Вакво однесување е добро познато во ад-хок безжичните мрежи, каде податоците се испраќаат кон дестинацијата преку реле(и) кои немаат сопствени податоци за пренос. Поддржувачките релејни мрежи во последно време го наоѓаат својот пат во безжичните клеточни мрежи (на пример, LTE-Advanced (анг. Long-Term Evolution Advanced)). Во ова сценарио во дадениот момент нема добивка во перформанси за релето, бидејќи тоа само му помага на изворот, сепак, долгорочно гледано, релето (доколку не е дел од планирана инфраструктура) може исто така да биде во ситуација да му е потребна помош и на тој начин да добие поддршка од другите релејни јазли.

Кооперативно однесување (взаемна помош): Вистинското кооперативно однесување се покажува од јазлите кои взаемно си помагаат, т.е. сите инволвирани јазли имаат податоци за пренос и здружено се обидуваат да ги испратат. Системскиот дизајн кој ќе ја го следи концептот на кооперативност е сеуште далеку. Сепак, кооперативноста во општ случај ги намалува негативните ефекти на безжичниот канал така што дури и јазлите кои имаат лоши услови на каналот постигнуваат задоволителни брзини на пренесување на податоци.

Идните безжични мрежи веројатно ќе бидат изградени од јазли кои ќе ги покажуваат трите типа на однесување. Во општ случај може да се каже дека колку мрежата има повисоко ниво на кооперативност ќе има толку подобри перформанси но исто толку ќе биде покомплицирана за имплементација и одржување.

1.2.2 Методи за обработка на податоците во релето

Во литературата може да се најдат низа на различни методи за обработка на податоците во релето. Генерално тие можат да се поделат во две групи : транспарентни и регенеративни методи.

Транспарентни релејни методи: Во фамилијата на транспарентни (не-регенеративни) методи, релето не ја модифицира примената информација. Во релето се вршат само многу едноставни операции, како на пример, засилување и промена на фаза. Со оглед на тоа

што не се вршат дигитални операции врз сигналот, сигналот се прима во еден фреквентен опсег, се засилува и препраќа во друг фреквентен опсег. Пример на методи кои припаѓаат на оваа фамилија на релејни методи се:

Засили-и-проследи: Методата засили-и-проследи (анг. AF - Amplify and Forward) е една од наједноставните и најпопуларните релејни методи, сигналот примен од релето се засилува, фреквентно или временски поместува и препраќа. При тоа, во општ случај може да се користат променлив или фиксен (статистички усреднет) фактор на засилување.

Дестинацијата ги комбинира податоците испратени од корисникот и неговиот партнер и одлучува во врска со испратената порака. Покрај тоа што шумот се засилува во релето, дестинацијата добива две независно ослабнати верзии на сигналот и може да донесе подобра одлука при детекцијата на пораката. Оваа метода детално е анализирана во [4].

Линеарно процесирање и проследување (анг. LF - Linear-Process and Forward): Овој релеен метод користи едноставни линеарни операции, кои се вршат врз сигналот во аналоген домен. Пример на таква линеарна операција е фазно поместување, што на пример може да се користи за имплементација на дистрибуирано формирање на сноп (анг. beamforming).

Нелинеарно процесирање и проследување (анг. n-LF Nonlinear Process and Forward): Овој релеен метод врши одредени нелинеарни операции на приемниот аналоген сигнал пред да се проследи. Пример за ова е нелинеарно засилување на применот сигнал така што се минимизира крај-крај веројатноста на грешка [5].

Важно прашање при дизајнот на транспарентните релејни методи е изборот на факторот на засилување во релето, каде во најопшт случај на располагање се следниве постапки:

Променливо засилување (анг. VG - Variable Gain) : Оваа постапка се разликува од постапката со фиксно засилување во тоа што засилувањето се прилагодува на моменталните промени во каналот. За оваа постапка е неопходно релето да има информации за моменталната состојба на каналот (CSI) од изворот до релето за да го контролира засилувањето така што ја фиксира моќноста на проследениот сигнал. Ако слабењето на каналот од изворот до релето е големо тогаш релето избира голем фактор на засилување, а ако слабењето на каналот од изворот до релето е мало тогаш релето ќе користи помал фактор на засилување. На пример, се избира засилувањето да биде инверзно пропорционално на моменталната моќност на федингот на делницата од изворот до релето:

$$A^2 = \frac{E_R}{E_I \cdot \alpha_1^2 + N_0}. \quad (1.1)$$

каде E_R е моќноста на испратениот сигнал на излез од релето, E_I е моќноста на испретениот сигнал во изворот, N_0 е додавачки бел гаусов шум на влезот на релето, а α_1 е амплитудата на федингот на делницата од изворот до релето (види глава 1.5).

Фиксно засилување (анг. FG - Fixed Gain) : За разлика од постапката со променливо засилување на релето кое користи постапка со фиксно засилување не му е потребно да има информации за моменталната состојба на каналот од изворот до релето туку користи константен фактор на засилување. Ваквите релеи се нарекуваат „слепи“ релеи. Како резултат на користењето на константен фактор на засилување сигналот на излез од „слепото“ реле има променлива моќност на излезот. За разлика од „слепите“ релеи често се користат т.н. „полу-слепи“ релеи. Во овој случај, јазелот го фиксира факторот на засилување во даден временски интервал, на вредност која зависи од статистиката на на каналот. На пример, фактор на засилување може да се избере да биде обратно пропорционален на средната вредност на моќноста на федингот во делницата од изворот до релето [2, eq.(2.17)]:

$$A^2 = \frac{E_R}{E_I \cdot E[\alpha_1^2] + N_0}. \quad (1.2)$$

каде $E[X]$ означува средна вредност од случајната променлива X . Сепак, почесто се зема релето да зрачи во просек со иста моќност како моќноста што се добива со користење на факторот на засилување во 1.1 кој се користи во релето со променливо засилување [6]:

$$A^2 = E \left[\frac{E_R}{E_I \alpha_1^2 + N_0} \right] \quad (1.3)$$

Регенеративни релејни методи: Во случај на регенеративните релејни протоколи, во релето се менува информацијата што се пренесува или обликот на сигналот. Оваа постапка подразбира дигитални операции во основен опсег. Сепак, за сметка на комплексноста во повеќето случаи регенеративните методи постигнуваат подобри перформанси од транспарентните методи. Најопшта поделба на регенеративните методи е:

Естимирај-и-проследи (анг. EF - Estimate and Forward) : Врз примениот сигнал во релето се врши квантизација, а врз основ на квантизираниот сигнал се врши естимација на оригиналниот сигнал. Оваа естимација од сигналот потоа се проследува кон дестинацијата. На пример, EF релето го естимира модулираниот симбол и ја препраќа неговата естимација со користење на друг тип на модулација.

Компримирај-и-проследи (анг. CF - Compress and Forward): Ова постапка е слична на EF постапката со таа разлика што релето препраќа кон дестинацијата компримирана верзија од детектираната низа на информациона бити. За имплементација на оваа постапка е неопходно користење на изворно кодирање на примероците од сигналот. Се покажува дека методата компримирај-и-проследи достигнува најголем капацитет на каналот кога каналот од изворот до релето е послаб од каналот до дестинацијата (види глава 2.3).

Декодирај-и-проследи (анг. DF - Decode and Forward) : Релето во оваа постапка го прима и детектира сигналот, го декодира и повторно кодира и проследува кон дестинацијата. Всушност се работи за постапка што е најблиска до начинот на функционирање на класичниот релеен канал. Денес, постојат многу различни типови на DF постапки затоа што тие во најголем број на случаи обезбедуваат најдобри перформанси во поглед на веројатноста на грешка, веројатноста на испад и капацитет на каналот.

Пример на DF метода може да се најде во трудот [1] [7]. Се работи за едноставна CDMA имплементација на DF релејната постапка. Во овој случај два корисника се упаруваат за да кооперираат меѓу себе. Секој корисник има сопствен CDMA код $c_1(t)$ и $c_2(t)$. Корисничките податоци се $b_i^{(n)}$ каде $i = 1, 2$ се корисничките индекси и n го означува временскиот индекс на информациона бити. Факторите $a_{i,j}$ ги обележуваат моменталните амплитуди на сигналот. Секој сигнален период се состои од три бит-интервали. Сигналите испратени од корисниците се:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \left[a_{11} b_1^{(1)} c_1(t), a_{12} \cdot b_1^{(2)} c_1(t), a_{13} b_1^{(2)} c_1(t) + a_{14} \hat{b}_2^{(2)} c_2(t) \right] \\ X_2(t) &= \left[a_{21} b_2^{(1)} c_2(t), a_{22} \cdot b_2^{(2)} c_2(t), a_{23} \cdot \hat{b}_1^{(2)} c_1(t) + a_{24} b_2^{(2)} c_2(t) \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

каде X_1 е сигналот испратен од првиот и X_2 сигналот испратен од вториот корисник.

Со други зборови, во првиот и вториот интервал секој корисник ги праќа сопствените податоци. Секој корисник потоа го детектира вториот бит од другиот корисник (секоја естимација на битот од другиот корисник се обележува со \hat{b}_i). Во третиот интервал, двата корисници праќаат линеарна комбинација од нивниот сопствен втор бит и вториот бит од партнерот. Предавателните моќности за првиот, вториот и третиот интервал може да се променливи и може да се оптимизираат согласно условите на линкот до дестинацијата и условите на линкот меѓу корисниците. На тој начин се обезбедува прилагодување кон каналните услови.

Моќностите се алоцираат преку коефициентите $a_{i,j}$ така што се исполни ограничувањето на средната моќност. Грубо речено, кога каналот меѓу корисниците е добар, повеќе моќност ќе се алоцира на кооперација, додека ако е лош кооперацијата се намалува. Ваквата постапка има предност заради својата едноставност и прилагодливост кон каналните услови.

Исчисти-и-проследи (анг. PF - Purge and Forward): Модерните телекомуникациски системи обично се дизајнираат да бидат со минимална интерференција без оглед на вредноста на шумот. Овој дизајн исто така се однесува на кооперативните системи каде PF постапката ја елиминира интерференцијата помеѓу различни релејни сигнали.

1.3 Метрики на перформансите на кооперативните релејни канали

Во оваа глава накратко ќе ги опишеме метриците со кои се опишуваат перформансите на кооперативните системи: (1) веројатност за испад (OP - Outage Probability) и капацитетен испад (анг. OC - Outage Capacity), (2) капацитет (3) средна веројатност на грешка и (4) компромис меѓу добивката од диверзитет и добивката од мултиплексирање (анг. DMT - Diversity Multiplexing Trade-off) .

1.3.1 Капацитет

Клод Шенон [8] докажа дека може да се постигнуваат информациски брзини на пренесување прозволно блиски до капацитетот на каналот со произволно мала веројатност на грешка (анг. EP - Error Probability) доколку се овозможат доволен број на користења на каналот. Со други зборови веројатноста на грешка тежнее кон нула доколку $n \rightarrow \infty$, така што се усредни влијанието на шумот.

Максималната брзина за доверливи комуникации се нарекува капацитет C на каналот. Доколку на влезот на дестинацијата моќноста на сигналот е P , а спектралната густина на шумот е $N_0/2$, капацитетот на каналот со додавачки бел гаусов шум е [9]:

$$C = W \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P}{W \cdot N_0} \right) \text{ bits/s} \quad (1.5)$$

каде W е пропустниот опсег на теснопојасниот филтер. Безжичниот канал влијае врз сигналите што минуваат низ него, а со тоа влијае на моќноста и капацитетот на каналот. Додека детерминистичкиот ефект на слабењето на патот само ја менува употребливата моќност на сигналот во изразот (1.5), случајноста која ја предизвикува безжичниот канал го менува капацитетот бидејќи корисната моќност на сигналот ефективно се менува во текот на праќањето на еден коден збор. Зависно од типот на промените на каналот, се разликуваат ергодичен и неергодичен фединг канал.

Каналните карактеристики кои се претпоставуваат во контекст на Шеноновиот капацитет се однесуваат на *ергодичен канал*. Каналот е ергодичен доколку усреднувањето по време е еднакво на усреднувањето по ансамбл. Во попрактична смисла, тоа значи дека каналот се менува доволно често во текот на преносот така што се поминуваат сите фединг состојби. Ергодичниот канал може да ја поддржи следнава максимална брзина на пренос со сигурност:

$$C = E [\log_2 (1 + \gamma)] \quad \text{bit/Hz/s} \quad (1.6)$$

каде γ е моменталниот однос сигнал-шум а операторот $E [\dots]$ означува средна вредност по случајната променлива γ .

Во трудовите [10] и [1] е покажано дека со користење на кооперативни релејни методи значително се подобрува брзината на пренесување на податоци за секој корисник на кооперативната мрежа но и на вкупниот капацитет (сумата од брзините на двата корисника за кооперативната релејна постапка прикажана на слика 1.4). Добивката е од особено значење во асиметричниот случај каде еден од корисниците има многу лоши канални услови. Резултатите добиени во овие трудови поттикнаа бран на истражувања за развој на практични постапки кои ќе можат да ги постигнат теоретските добивки на брзина на пренесување на податоци. Во [10] покажано е дека зголемувањето на вкупниот капацитет (сумата од брзините на двата корисника) резултира во зголемување на областа на покривање и дека едноставно изворно кодирање базирано на повторување на испратените кодни симболи со користење CDMA значително го зголемува регионот на достигливи брзини на пренесување во споредба со регионот за случајот без кооперација, со зголемување на квалитетот на каналот помеѓу корисниците.

1.3.2 Веројатност на испад и капацитетен испад

Друга стандардна метрика на перформансите на кооперативните релејните канали е веројатноста на испад (P_{out}) која се дефинира како веројатност дека моменталниот однос сигнал-шум (γ) ќе падне под одреден праг γ_{th} , т.е.:

$$P_{out} = Pr(\gamma \leq \gamma_{th}) = \int_0^{\gamma_{th}} p_{\gamma}(\gamma) d\gamma \quad (1.7)$$

што всушност претставува кумулативна функција на веројатност (анг. CDF - Cumulative Distribution Function) од γ пресметана за $\gamma = \gamma_{th}$.

Шеноновата теоријата на информации не е погодна за анализа на комуникациските сценарија каде средните канални услови се менуваат од коден збор до коден збор. Затоа е воведен концептот на веројатност на капацитетен испад.

Во случај на *неергодичен канал* каналот не се менува доволно брзо за да ги помине сите состојби на каналот во текот на комуникацијата. Со други зборови, процесот е неергодичен доколку примероците помагаат да се претпостават вредностите кои се многу далеку во време од разгледуваниот примерок, т.е. кога случајниот процес е чувствителен на почетната состојба. Практични вакви ситуации се јавуваат кога каналот е со многу спор фединг и/или со постоење на силни долготрајни засенувања.

Концептот на средни вредности не е многу корисен за неергодичните канали. Од тие причини, неергодичниот канал не ја поддржува максималната брзина за пренос (1.5) со сигурност туку за одредена брзина за пренесување R ќе го достигне прагот на капацитет C_{th} со веројатност $P_{oc} = Pr(R \leq C_{th})$, што се нарекува веројатност на капацитетен испад (види глава (1.8)). Во глава 6.1.4 се покажува дека за Рејлиев фединг веројатноста на капацитетен испад е:

$$P_{oc} = Pr(R \leq C_{th}) = 1 - e^{-\frac{2C_{th}-1}{\bar{\gamma}}} \quad (1.8)$$

каде $\bar{\gamma}$ е средниот однос сигнал-шум. Од изразот (1.8) следи дека веројатноста на капацитетен испад се намалува експоненцијално со порастот на средниот однос сигнал-шум.

Добивката во капацитет заради кооперација може да се илустрира со разгледување на кооперативното сценарио од слика 1.4 за едноставна постапка на кооперација: Двата корисника ги праќаат своите податоци кон дестинацијата, а со тоа и помеѓу себе. Доколку корисникот успее да ја декодира информацијата од партнерот, тој ја проследува кон дестинацијата, а доколку не успее да ја декодира информацијата од партнерот, тој продолжува со испраќање на сопствената информација. Согласно [11] добивките

во веројатноста на капацитетен испад се значителни. Добивката во веројатноста на капацитетен испад може лесно да се припише на фактот дека веројатноста на испад на директниот и кооперативниот релеен линк е многу помала од веројатноста на испад само на директниот линк. Покомплексните топологии и постапки за кооперација го следат сличниот тренд и кооперацијата генерално е во состојба да даде значителни подобрувања во веројатноста на испад.

1.3.3 Средна веројатност на грешка

Метрика која без сомнеж е најтешка за пресметка е средната битска веројатност на грешка (анг. BER - Bit Error Probability) . Од друга страна, оваа метрика најмногу кажува за природата на однесување на системот и најчесто се илустрира во трудовите кои ги анализираат перформансите на системот. Од тие причини, од примарен интерес е да се има метод за нејзина пресметка кој ќе го намали степенот на тежина.

Примарна причина за тежината на пресметка на средниот BER лежи во фактот дека условната BER во општ случај е нелинеарна функција до моменталниот однос сигнал-шум. Причината за нелинеарноста е функција од методите за модулација и детекција кои се употребуваат во системот.

Основниот израз за пресметка на BER е:

$$P_b(E) \triangleq \int_0^{\infty} P_b(E|\gamma) \cdot p_{\gamma}(\gamma) d\gamma \quad (1.9)$$

каде $P(E|\gamma)$ е условната BER, а $p_{\gamma}(\gamma)$ е функцијата на густина на веројатност (анг. PDF - Probability Density Function) на моменталниот однос сигнал-шум.

1.3.4 Компромис меѓу добивките во диверзитет и мултиплексирање

Компромисот помеѓу диверзитетот и мултиплексирањето е воведен во [12, ch.(9)]. Тој кажува колку бргу веројатноста на испад се намалува, односно брзината за пренос се зголемува со зголемување на средниот однос сигнал-шум. Бидејќи концептот на испад не е применлив за ергодични канали, од аспект на Теоријата на информации, DMT е применлив само за не-ергодичните канали. Сепак подолу ќе биде покажано дека DMT е исто така применлива за реалните системи кои функционираат при постоење на спор или брз фединг, што му овозможува на системскиот инженер да направи компромис помеѓу доверливоста и брзината на пренос.

Добивката во диверзитет е [13, eq.(5.2)]:

$$d = - \lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} \frac{\log P_{out}(C_{th}, \bar{\gamma})}{\log(\bar{\gamma})} \quad (1.10)$$

каде $P_{out}(C_{th}, \bar{\gamma})$ е веројатноста на капацитетен испад дефинирана со (1.8) , $\bar{\gamma}$ е средниот однос сигнал-шум, C_{th} е долната граница на потребната брзина за пренесување на податоци и d е добивката во диверзитет. Имајќи ја во предвид дефиницијата (1.10) добивката во диверзитет ја дефинира градиентот на функцијата за веројатност на капацитетен испад во зависност од $\bar{\gamma}$ за големи вредности на односот сигнал-шум прикажана на логаритамска скала на двете оски. Доколку $d = 0$ тогаш со прираст на $\bar{\gamma}$ не се остварува намалување во веројатноста на испад, т.е. добивката што може да се добие од зголемување на $\bar{\gamma}$ се користи на друго место (најверојатно за зголемување на брзината на пренесување на податоци). Согласно [11] некооперативниот случај има диверзитет $d = 1$ додека кооперативната постапка може да постигне двоен диверзитет

т.е. $d = 2$. Јасно е дека пострм градиент води кон поголема добивака со зголемување на односот сигнал-шум.

Согласно [13, eq.(5.18)] добивката од мултиплексирање (или бројот на степени на слобода) е:

$$r = \lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} \frac{R(\bar{\gamma})}{\log(\bar{\gamma})}. \quad (1.11)$$

За асимптотски висок $\bar{\gamma}$, степенот на мултиплексирање е еднаков на градиентот на зависноста на брзината на пренесување т.е. ергодичниот капацитет од средниот однос сигнал-шум. Ако $r = 0$ тогаш со зголемување на $\bar{\gamma}$ не се зголемува брзината на пренесување, т.е. добивката која потенцијално може да се добие од зголемување на $\bar{\gamma}$ се користи на друго место (најверојатно за да се намали веројатноста на испад).

Ако брзината за пренесување ја изразиме преку добивката од мултиплексирање во (1.11) и ја замениме во (1.10) ќе се добие:

$$d = - \lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} \frac{\log P_{out}(r \cdot \log(\bar{\gamma}), \bar{\gamma})}{\log(\bar{\gamma})} \quad (1.12)$$

Од изразот (1.12) јасно е дека со зголемување добивката од мултиплексирање се намалува добивката од диверзитет т.е. се намалува сигурноста во достигнувањето на тие брзини.

На пример, за МИМО канал во Рејлиев фединг со достапни информации за каналот (анг. CSI - Channel State Information) во дестинацијата максималната добивка од мултиплексирање изнесува $r \leq \min(N_T, N_R)$ каде r е рангот на каналната матрица H .

Слични аргументи можат да се користат за да се изведе DMT за реалните системи кои оперираат преку спор или брз фединг, каде за спор фединг, P_{out} во информациско-теоретска смисла треба да се замени со P_{out} на реалниот систем [2, ch.(1.5.3)], а за брз фединг со средната веројатност на грешка P_e .

На пример, средната битска веројатност за грешка за бинарна фазна модулација (анг. BPSK - Binary Phase Shift Keying) во рејлиев фединг е:

$$P_e = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma} + 1}} \right) \quad (1.13)$$

За голем однос сигнал-шум изразот (1.13) може да се апроксимира со:

$$P_{ea} = \frac{1}{4\bar{\gamma}}. \quad (1.14)$$

Ако се употреби изразот (1.10) ќе се добие дека за BPSK во рејлиев фединг се добива $d = 1$.

1.4 Карактеризација на фединг каналите

Простирањето на радио брановите во безжичниот канал е комплексен феномен карактеризиран со различни ефекти како на пример повеќепатното простирање и засенување. Прецизен математички опис на овој феномен е или непознат или премногу комплесен за решлива анализа на комуникацискиот систем. Сепак, значителни напори се посветени на статистичко моделирање на овие различни ефекти. Резултатот е множество на релативно едноставни и точни статистички модели за фединг канали кои зависат од конкретната околина на простирање и конкретното комуникациско сценарио.

1.4.1 Главни карактеристики на фединг каналите

Флукуација на анвелопата и фазата: доколку за време на преносот сигналот е под влијание на фединг, неговата анвелопа и фаза флукуира со тек на време. За кохерентните модуляции, ефектот на федингот врз фазата може сериозно да ги деградира перформансите доколку не се превземат мерки за компензација на ефектот во дестинацијата. Најчесто, анализата на системите кои користат кохерентна модуација претпоставува дека флукуацијата на фазата поради фединг идеално се корегира во дестинацијата што резултира во „идеална“ кохерентна демодулација. За некохерентната модуација, во дестинацијата не е потребна информацијата за фазата и затоа флукуацијата на фазата поради фединг не влијае врз перформансите на системот. Оттука, за анализата на перформансите за кохерентните и некохерентните модуляции преку канали кои се под влијание на фединг потребно е познавање само на статистиката на анвелопата на федингот. Освен тоа, за така-наречениот спор фединг, каде федингот е константен за време на симболниот интервал, случајниот процес на анвелопата на федингот може да се претстави со случајна променлива за време на тој симболен интервал.

Спор и брз фединг: Разликата помеѓу спор и брз фединг е важна за математичко моделирање на фединг каналите и за евалуација на перформансите на комуникацискиот систем кој функционира по овие канали. Оваа идеја е врзана со *кохерентното време* T_c на каналот, кој го мери временскиот период во кој фединг процесот е корелиран (или еквивалентно, временски интервал после кој корелационата функција на два примероци од одзивот на каналот земени при иста фреквенција но различни временски моменти падне под одреден праг). Кохерентното време е во инверзна-пропорционална врска со Доплеровото раширување f_d :

$$T_c \simeq \frac{1}{f_d} \quad (1.15)$$

За каналот се вели дека е спор доколку времетраењето на симболот T_s е помало од кохерентното време T_c , а во спротивно се смета дека е брз. Во спор фединг дадено слабеење на сигналот поради фединг ќе влијае на повеќе последователни симболи, што води кон моментален наплив на грешки, додека во брз фединг слабеењето се менува од симбол до симбол.

Фреквентно-рамен и фреквентно-селективен фединг: Фреквентната селективност е исто така важна карактеристика на фединг каналите. Доколку сите спектрални компоненти од предавателниот сигнал се под еднакво влијание, федингот се вели дека е фреквентно-неселективен или феквентно-рамен. Ова е на пример случај за теснопојасните системи, во кои опсегот на испратениот сигнал е многу помал од кохерентниот пропусен опсег f_c . Оваа метрика го мери фреквентниот опсег во кој фединг процесот е корелиран и е дефиниран како фреквентен опсег во кој корелационата функција на два примероци од импулсниот одзив на каналот земени во исто време но различни фреквенции падне под дадена вредност. Дополнително, кохерентниот опсег е во инверзно-пропорционална врска со максималното време на раширување τ_{max} :

$$f_c \simeq \frac{1}{\tau_{max}} \quad (1.16)$$

Од друга страна, доколку фреквентните компоненти на предавателниот сигнал се афектирани од различни амплитудни и фазни флукуации, федингот се вели дека е фреквентно-селективен. Ова се однесува на широкопојасните системи во кои пропусниот опсег на испратениот сигнал е поголем од кохерентниот опсег на каналот.

1.5 Моделирање на фединг каналите

Кога федингот влијае врз теснопојасните системи, амплитудата на носителот на приемниот сигнал е модулирана од амплитудата на федингот α , каде α е случајна променлива со средна квадратна вредност $\Omega = E[\alpha^2]$ и функција на густина на веројатност $p_\alpha(\alpha)$, што зависи од природата на средината за пропација на радио сигналите. Откако сигналот ќе помине низ фединг каналот тој е под влијание на додавачки Гаусов шум (AWGN) при што се претпоставува дека тој е статистички независен од амплитудата на федингот α , и е карактеризиран со едно-странична спектрална густина на моќност $N_0[\text{W/Hz}]$. Еквивалентно, приемната моментална моќност е модулирана со моќноста на федингот α^2 . На овој начин дефинираме моментален однос сигнал-шум по симбол:

$$\gamma = \alpha^2 \frac{E_s}{N_0}, \quad (1.17)$$

и среден однос сигнал-шум:

$$\bar{\gamma} = \Omega \cdot \frac{E_s}{N_0}, \quad (1.18)$$

каде E_s е енергијата на симболот. Перформансите на системите кои ќе бидат анализирани во оваа дисертација во општ случај ќе бидат функција од средниот однос сигнал-шум по симбол $\bar{\gamma}$. Исто така, во анализите и симулациите, без да се изгуби општоста, за средната квадратна вредност на моќноста на каналот ќе земаме $\Omega = 1$.

Функцијата на густината на веројатност во зависност од γ се добива со функционална трансформација на случајните променливи со користење на (1.17) и (1.18):

$$p_\gamma(\gamma) = \left. \frac{p_\alpha(\alpha)}{d\gamma/d\alpha} \right|_{\alpha=\sqrt{\frac{\gamma\Omega}{\bar{\gamma}}}} = \frac{p_\alpha\left(\sqrt{\frac{\gamma\Omega}{\bar{\gamma}}}\right)}{2 \cdot \sqrt{\frac{\gamma\bar{\gamma}}{\Omega}}} \quad (1.19)$$

Функцијата за генерирање на моменти (анг. MGF - Moment Generating Function) :

$$M_\gamma(s) = \int_0^\infty p_\gamma(\gamma) \cdot e^{s\gamma} d\gamma, \quad (1.20)$$

е уште една важна статистичка карактеристика на фединг каналите.

1.5.1 Повеќепатен фединг

Повеќепатниот фединг е резултат на конструктивна или деструктивна комбинација на случајно задоцнетите, рефлектираните, расејаните и дифрактираните компоненти на сигналот. Овој тип на фединг е релеативно брз и е причина за краткотрајните варијации на сигналот. Зависно од природата на пропационата средина за простирање на радиобрановите, постојат различни модели кои го опишуваат статистичкото однесување на анвелопата на повеќепатниот фединг. Во оваа дисертација за опис на статистичкото однесување на анвелопата на федингот најчесто ќе се користи Рејлиевата распределба¹. Оваа распределба многу често се користи за моделирање на повеќепатниот фединг во случај кога нема директна видливост (анг. LOS - Line-of-Sight) . Во овој случај амплитудата на фединг каналот (α) е распределена согласно:

$$p_\alpha(\alpha) = \frac{2 \cdot \alpha}{\Omega} \cdot e^{-\frac{\alpha^2}{\Omega}}, \quad \alpha \geq 0 \quad (1.21)$$

¹Освен во глава (5) каде ќе се коирстат и PDF-те на Рајс, Накагами и Веибул.

ако се следи (1.19), моменталниот SNR по симбол $-\gamma$ е дистрибуиран согласно експоненцијалната PDF:

$$p(\gamma) = \frac{1}{\bar{\gamma}} \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right), \quad \gamma \geq 0 \quad (1.22)$$

Ако се замени (1.22) во (1.20) ќе се добие MGF-от за овој модел на фединг:

$$M_\gamma(s) = (1 - s \cdot \bar{\gamma})^{-1} \quad (1.23)$$

Рејлиевит фединг покрај тоа што е погоден во случај кога нема директна видливост помеѓу изворот и дестинацијата погоден е и за пропагација на рефлектираните и прекршените патеки низ тропосверата, јоносферата, и брод-брод поморските радио линкови.

1.6 Краток преглед на докторската дисертација

Во глава 2 ќе биде спроведена анализа од информациско-теоретски аспект на придобивките од користење на кооперативните релејни комуникации. Имено ќе биде анализирана комуникација преку општи мрежи со повеќе делници [14]. Ќе биде анализиран релеен канал (анг. RC - Relay Channel) со три јазли, кој е модел за точка-точка комуникацијата со помош на реле. Капацитетот на релејниот канал во генерален аспект не е познат и затоа ќе ја анализираме горната граница на капацитетот т.н. горна пресечна граница (анг. CUB - Cutset Upper Bound) ((2.12)) како и границите на капацитетот за основните релејни постапки (DF, AF, CF). Освен тоа, ќе бидат анализирани изразите за границите на овие релејни постапки за дуплесен RC и полудуплесен RC со фреквентна распределба во изворот и дестинацијата. Посебено внимание ќе се посвети на анализата на границите на капацитетот на овие на сите разгледувани релејни постапки во случај на Гаусов релеен канал.

Во глава 3 ќе ја анализираме веројатноста на грешка и веројатноста за испад за релеен канал со две делници со повеќе влезови и повеќе излези кој користи Аламути кодирање [17] и варијанта на засили-и-проследи постапка наречена раздвои-и-проследи (анг. DCF - Decouple-and-Forward) во рамен Рејлиев фединг [20]. Веројатноста на грешка на МИМО релејниот канал со две делници со променливо засилување (VG) ќе биде спореден со веројатноста на грешка на релејниот канал со две делници и една антена во јазлите и веројатноста на грешка на МИМО релејните канали со две делници кои користата DF постапка во релето. Ќе биде покажано дека DCF МИМО релејните канали постигнуваат значително подобри перформанси на грешка во споредба со системите со една антена и споредливи перформанси со DF МИМО системите. За овие системи веројатност на испад (OP) се споредува со OP на системите со две делници и една антена и точка-точка системите со две антени. Се покажува значително подобрување на OP перфомансите во споредба со перфомансите на системите со две делници и една антена и споредливи перформанси со точка-точка системите.

Во глава 4 ќе прикажеме многу точни апроксимации за веројатноста на грешка за односи сигнал-шум кои се од практичен интерес за засили-и-проследи (AF) релеен канал со информации за статусот на каналот во релето и дестинацијата, кои користат повеќе антени во јазлите и ортогонално просторно-временско блоковско кодирање (анг. OSTBC - Orthogonal Space-Time Block Coding) кодирање преку рамен фединг. Дополнително за големи вредности на односот сигнал-шум ќе ја упростиме прецизната апроксимација во едноставна асиптотска апроксимација. Двете апроксимација ќе ги споредиме со точните вредности добени со нумеричка интеграција и со резултатите добиени со Монте Карло

симулации. Во продолжението на главата ќе презентираме груба апроксимација на веројатноста за грешка за претходно анализираниот систем. Грубата апроксимација на веројатноста за грешка ќе ја споредиме со претходно добиените точните вредности со Монте Карло симулации, нумеричка интеграција на соодветните MGF-и и резултатите добиени со прецизната апроксимација.

Освен тоа во оваа глава ќе презентираме прецизна и груба апроксимација на веројатноста за испад (OP) за целиот однос сигнал-шум кој е од практичен интерес за AF релејните канали со информации за каналот достапни во релето и дестинацијата, кои користат повеќе антени во јазлите и OSTBC пренос преку рамен Рејлиев фединг. Резултатите за веројатноста на испад добиени со овие апроксимации ќе бидат споредени со точните резултати за веројатноста на испад добиени со нумеричка инверзија на Лапласовата трансформација на функцијата за генерирање на моменти и со резултатите добиени со Монте Карло симулации.

Во продолжение на главата 4 ќе ги анализираме перформансите на MIMO релејните канали со директна патека до дестинацијата. За упростување на математичката анализа ќе ги упростиме претходно изведените апроксимативни изрази за PDF и CDF за засили-и-проследи MIMO релеен канал без директна патека на начин идентичен со пристапот на добивање на грубите BER и OP апроксимации. Со употреба на така добиениот едноставен израз за PDF на MIMO релејниот канал без директна патека ќе бидат изведени апроксимативните изрази во затворена форма за веројатноста за испад на AF релејните MIMO системи кај кои постои директна патека до дестинацијата. Резултатите добиени од овие апроксимации ќе се споредат со резултатите добиени за системите за кои не постои директна патека од изворот до дестинацијата.

Во глава 5 ќе ги анализираме крај-крај перформансите за испад на релеен канал со повеќе делници кој користи засили-и-проследи (AF) релејна постапка во Рејлиев, Накагами, Рајсов и Веибул фединг. Ќе бидат споредени веројатностите на испад за фиксно (FG) и променливо засилување (VG). Веројатноста на испад за повеќеделничните системи во услови на Рејлиев, Накагами и Веибул фединг може да се одреди само со комбинирање на аналитичките резултати со нумерички методи за интеграција. Ќе покажеме дека системите со фиксно засилување покажуваат подобри OP перформанси во споредба со системите со променливо засилување за сите фединг околинис за односи сигнал-шум кои се од практичен интерес. Ќе покажеме дека разликата во перформанси се зголемува со бројот на делници.

Во глава 6 ќе го анализираме и споредиме капацитетот за точка-точка и релејните MIMO канали. Особено внимани ќе се посвети на ваквите системи во случај на користење на OSTBC кодирање. Ќе бидат анализирани перформансите на капацитетот на овие системи од аспект на анализа на ергодичниот капацитет и веројатноста на капацитетен испад. Ќе покажеме дека ергодичниот капацитет на MIMO релејниот канал се приближува до ергодичниот капацитет на точка-точка MIMO каналот со зголемување на бројот на антени. Исто така ќе покажеме дека MIMO релејниот канал има полоши перформанси на капацитетен испад во споредба на точка-точка системите при што разликата во перформанси се зголемува со зголемување на односот сигнал-шум. На крај ќе биде анализиран ергодичниот капацитет и веројатноста на капацитетен испад за релејните MIMO канали со директна патека до дестинацијата и ќе бидат споредени нивните перформанси со перформансите на релејните MIMO канали без директна патека. Во глава 7 ќе биде изложен заклучокот на тезата.

2 Капацитет на кооперативните релејни канали

Во оваа главата ќе биде дадена инфомациско теоретска анализа на комуникациите преку општи мрежи со повеќе делници [14]. Во таа насока ќе биде анализиран релејниот канал со три јазли, кој е модел за точка-точка комуникацијата со помош на реле, како на пример комуникација помеѓу две базни станици преку терестријален и сателитски линк, или помеѓу два јазли во меш мрежа со среден јазол кој се однесува како реле. Капацитетот на релејниот канал во генерален аспект не е познат. Затоа ќе ја анализираме горната граница на капацитетот т.н. горна пресечна граница (CUB) (2.12). Исто така ќе дискутираме неколку кодирачки шеми кои се оптимални во некои одредени случаи. Прво ќе ги дискутираме следниве две екстремни методи:

- *Метод на директен пренос* (анг. DT - Direct Transmission) : Во оваа едноставна шема, релето не се користи активно во комуникацијата.

- *Декодирај-и-проследи (DF)*: Во оваа метода со повеќе делници, релето игра централна улога во комуникацијата. Тоа ги декодира пораките и кохерентно соработува со изворот за да истите ги комуницира со дестинацијата. Оваа метода вклучува техника на блоковско Марково кодирање [25], декодирање наназад [26] и употреба на складирање по кошнички (анг. RB - Random Binning) во каналното кодирање [28]. Ќе видиме дека директниот пренос може да постигне поголем капацитет од декодирај-и-проследи кога каналот од изворот до релето е полош од каналот од релето до дестинацијата.

- *Компримирај-и-проследи (CF)*: Во овој метод, релето не се обидува да ја реконструира пораката. Наместо тоа, релето користи Вупег-Ziv кодирање [27] при што примената низа на информациона бити се однесува како странична информација, и се препраќа индексот на кошничката. Дестинацијата потоа го декодира индексот на кошничката, и ја бара соодетната реконструкција на примената низа од информациона бити во релето и заедно со помош на сопствената приемна низа ја реконструира пораката. Компримирај-и-проследи методот се покажува дека е оптимален за класа на детерминистички релејни канали и за примерот на RC кој користи сума со модул 2 (види глава 8.2) чиј капацитет се покажува дека е секогаш помал од горната пресечна граница (CUB).

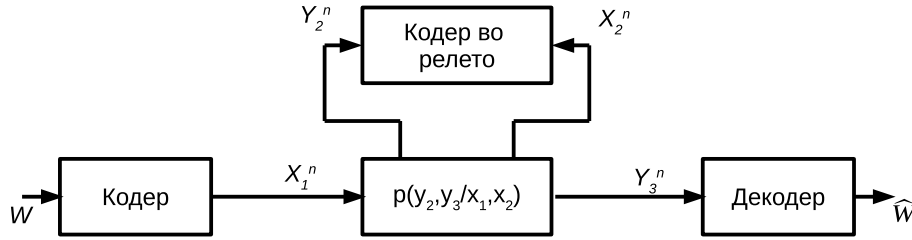
Мотивирани од безжичните мрежи, ќе ги анализираме следниве два модели на Гаусови релејни канали.

- *Дуплексен Гаусов релеен канал*: Капацитетот за овој модел не е познат за произволно множество на ненулни вредности на каналните параметри. За овој тип на релеен канал ќе биде споредена горната граница на множеството на пресеци со долната граница за декодирај-и-проследи и компримирај-и-проследи методите.

- *Полудуплексен Гаусов канал со фреквентна распределба во приемникот на дестинацијата*: За овој тип на релеен канал ќе биде покажано дека границата на капацитетот на декодирај-и-проследи е идентична со CUB за одредени вредности на параметрите на каналот. Потоа ќе биде презентирана засили-и-проследи методата за кодирање во која релето испраќа сразмерна верзија од сигналот што претходно го примил. Потоа, засили-и-проследи методата ќе биде генерализирана со линеарни релејни функции кои се тежински суми од претходно примените сигнали и ќе биде воспоставена еднозначна карактеризација на капацитетот на ваквиот канал.

2.1 Горна пресечна граница на капацитетот

Релејниот канал всушност претставува комуникациски систем со три јазли [29] кој е претставен на слика 2.1. Изворот (јазол 1) сака да ја комуницира пораката W со дестинацијата (јазол 3) со помош на релето (јазол 2). Во оваа глава ќе разгледуваме дискретен релеен канал без мемеорија (анг. DMRC - Discrete Memoryless Relay Channel) кој се означува со изразот: $(X_1 \times X_2, p(y_2, y_3|x_1, x_2), Y_2 \times Y_3)$ и кој се состои од четири конечни множества X_1, X_2, Y_2, Y_3 , и условните веројатности $p(y_2, y_3|x_1, x_2)$ на множеството $Y_2 \times Y_3$ една за секој $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, каде x_1 е сигналот на излез од изворот, y_2 сигнал на влезот на релето, y_3 сигнал на влез од дестинацијата, и x_2 предавателен сигнал на релето (чии симболи е дозволено да зависат од поранешните симболи на y_2). Зависноста на примените симболи од влезните симболи е опишана со условната веројатност $p(y_3, y_2|x_1, x_2)$. Индексирањето во продолжението на глава 2 ќе биде согласно следната нотација: A_{bc}^d , каде A ја означува случајната променлива или процес, b го означува јазолот на кој се однесува таа случајна променлива (на пример ако $b = 2$ тогаш се работи за релето, а ако $b = 3$ тогаш се работи за дестинацијата), c го означува моменталниот временски индекс од случајниот процес [9, ch.(4.1)], и d го означува крајниот временски индекс од случајниот процес. Случајните променливи кои ги претставуваат реконструираниите сигнали во релето ќе ги означуваме со „ $\tilde{\cdot}$ “, а реконструираниите сигнали во дестинацијата ќе ги означуваме со „ $\hat{\cdot}$ “.



Слика 2.1: Точка-точка комуникациски систем со реле

Кодот $(2^{nR}, n)$ за DMRC се состои од:

- множество на пораки $[1 : 2^{nR}]$,
- кодер кој го доделува кодниот збор $x_1^n(w)$ на секоја порака $w \in [1 : 2^{nR}]$,
- кодер во релето кој го доделува симболот $x_{2i}(y_2^{i-1})$ на секоја претходно примена низа $y_2^{i-1} \in Y_2^{i-1}$ за секој временски интервал $i \in [1 : n]$, и
- декодер кој ја доделува естимацијата \hat{w} или грешката e на секоја од примените низи $y_3^n \in Y_3^n$.

Каналот е без меморија во смисол дека моментално примените симболи (Y_2^i, Y_3^i) и пораките и поранешните симболи $(w, X_1^{i-1}, X_2^{i-1}, Y_2^{i-1}, Y_3^{i-1})$ се условно независни ако се дадени моментално испратените симболи (X_1^i, X_2^i) .

Претпоставуваме дека пораките W се униформно распределени.

За да се одговори на ова прашање ќе се користи следниов модел на каналот.

(M, n) кодот во релето се состои од множество на индекси кои треба да се пренесат:

$$W = \{1, 2, \dots, M\} \triangleq [1, M] \quad (2.1)$$

од енкодирачка функција

$$x_1 : W \rightarrow X_1^n, \quad (2.2)$$

множество од релејни функции $\{f_i\}_{i=1}^n$:

$$x_{2i} = f_i(Y_{21}, Y_{22}, \dots, Y_{2, i-1}), \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.3)$$

и функција за декодирање:

$$g : Y_3^n \rightarrow W. \quad (2.4)$$

Предавателниот сигнал во релето x_{2i} е дозволено да зависи од изминатите $(i-1)$ влезни сигнали во релето $y_2^{i-1} = (y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2i-1})$. Каналот е без меморија во смисла дека (y_{3i}, y_{2i}) зависат само од изминатите (x_1^{i-1}, x_2^{i-1}) само преку моментално испратените симболи (x_{1i}, x_{2i}) . На тој начин за било кој избор на $p(w)$, $w \in M$, и избор на код $x_1 : W \rightarrow X_1^n$ и релејни функции $\{f_i\}_{i=1}^n$, здружената функција на распределба на веројатноста (PMF) на множеството $W \times X_1^n \times X_2^n \times Y_3^n \times Y_2^n$ е дадена со:

$$p(w, x_1, x_2, y_3, y_2) = p(w) \prod_{i=1}^n p(x_{1i}|w) p(x_{2i}|y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2i-1}) \cdot p(y_{3i}, y_{2i}|x_{1i}, x_{2i}) \quad (2.5)$$

На пример за $n=2$ здружената PMF дадена со (2.5) се сведува на:

$$\begin{aligned} p(w, x_1, x_2, y_3, y_2) &= p(w) \prod_{i=1}^2 p(x_{1i}|w) p(x_{2i}|y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2i-1}) \cdot p(y_{3i}, y_{2i}|x_{1i}, x_{2i}) = \\ &= p(w) \cdot p(x_{11}|w) p(x_{21}) \cdot p(y_{31}, y_{21}|x_{11}, x_{21}) p(x_{12}|w) p(x_{22}|y_{21}) \cdot p(y_{32}, y_{22}|x_{12}, x_{22}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Од изразот (2.6) може да се заклучи дека X_1 зависи од W , X_2 зависи од Y_2 , а (Y_3, Y_2) зависат од (X_1, X_2) .

Доколку е испратена пораката $w \in W$, условната веројатност на грешка е:

$$\lambda(w) = Pr \{g(Y_3) \neq w\} \quad (2.7)$$

а средната веројатност на грешка:

$$P_e^{(n)} = P(\hat{W} \neq W) = \frac{1}{M} \sum_w \lambda(w) \quad (2.8)$$

односно веројатноста за грешка се пресметува за специјален случај за униформна распределба на влезните симболи $w \in [1, M]$.

Максималната веројатност на грешка за (M, n) кодот е:

$$\lambda_n = \max_{w \in W} \{\lambda(w)\} \quad (2.9)$$

Брзината на пренесување на пораките на (M, n) кодот е:

$$R = \frac{1}{n} \cdot \log(M) \quad (2.10)$$

Брзината на пренесување R се вели дека е *достиглива* за DMRC доколку постои низа $(2^{nR}, n)$ на кодови така што $\lim_{n \rightarrow \infty} P_e^{(n)} = 0$. Капацитетот C на DMRC е максимум од сите достигливи брзини на пренесување. Тој не е познат во затворена форма и затоа ќе ги дискутираме горните и долните граници на капацитетот кои се многу точни за одредени класи на релејни канали.

Многу често се разгледува тип на DMRC кај кои приемниот сигнал во релето y_2 е подобар од сигналот во дестинацијата y_3 кои се нарекуват деградирани релејни канали. Релејниот канал $(X_1 \times X_2, p(y_3, y_2|x_1, x_2), Y_2 \times Y)$ се нарекува *деградиран* доколку $p(y_3, y_2|x_1, x_2)$ може да се напише во следнава форма.

$$p(y_3, y_2|x_1, x_2) = p(y_2|x_1, x_2) \cdot p(y_3|y_2, x_2) \quad (2.11)$$

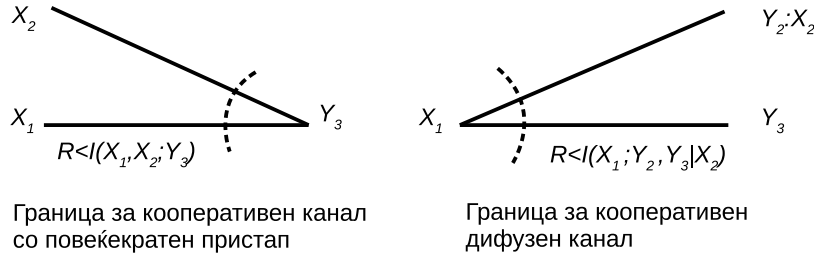
Од изразот (2.11) следи дека релејниот канал е деградиран доколку $p(y_3|x_1, x_2, y_2) = p(y_3|x_2, y_2)$ т.е., $X_1 \rightarrow (X_2, Y_2) \rightarrow Y_3$ формираат Марков ланец [9, eq.(2.117)].

Во најопшт случај горната граница на капацитетот C за DMRC е дадена со следнава теорема [14, thm.(16.1)].

Теорема 2.1. Горна пресечна граница за DMRC

$$C \leq \max_{p(x_1 x_2)} \min \{I(X_1, X_2; Y_3), I(X_1; Y_2, Y_3 | X_2)\} \quad (2.12)$$

Оваа граница се нарекува горна пресечна граница затоа што членовите во минимумот можат да се интерпретираат како кооперативна комбинација на повеќе-пристапен канал [9, ch.(15.3)] и дифузен канал [9, ch.(15.6)] што е илустрирано во слика 2.2.



Слика 2.2: Интерпретација на горната пресечна граница со минимален пресек - максимален проток

CUB е многу прецизна за многу класи на DMRC со познат капацитет. Сепак таа не е толку прецизна во општ случај како што ќе биде покажано во глава 2.3. CUB е всушност генерализација на добро познатата теорема за максимален тек и минимален пресек [31] во рамките на теоријата на информациите.

Доказ на теорема 2.1:

Ако е даден произволен (M, n) код за релејниот канал, функцијата на распределба на веројатност на здружениот ансамбл W, X_1, X_2, Y_3, Y_2 е дадена со:

$$p(w, x_1, x_2, y_3, y_2) = \frac{1}{M} \cdot p(x_1 | w) \cdot \prod_{i=1}^n p(x_{2i} | y_{21}, \dots, y_{2i-1}) \cdot p(y_{3i}, y_{2i} | x_{1i}, x_{2i}) \quad (2.13)$$

Да ја разгледуваме еднаквоста:

$$n \cdot R = H(W) = I(W; Y_3) + H(W | Y_3) \quad (2.14)$$

Од нееднаквоста на Фано [9, eq.(2.130)]:

$$H(W | Y_3) \leq 1 + P_e^{(n)} \cdot nR \triangleq n \cdot \delta_n \quad (2.15)$$

каде $\delta_n \rightarrow 0$ како $n \rightarrow \infty$. На тој начин:

$$n \cdot R \leq I(W; Y_3) + n \cdot \delta_n \quad (2.16)$$

Сега ќе ја побараме горната граница на $I(W; Y_3)$ [29, th.(10.1)].

Од нееднаквоста на Фано [9, eq.(2.130)] следи:

$$n \cdot R = H(W) = I(W; Y_3^n) + H(W | Y_3^n) \leq I(W; Y_3^n) + n\epsilon_n \quad (2.17)$$

каде $\epsilon_n \rightarrow 0$ ако $n \rightarrow \infty$. Понатаму следи:

$$I(W; Y_3^n) \leq \min \left\{ \sum_{i=1}^n I(X_{1i}, X_{2i}; Y_{3i}), \sum_{i=1}^n I(X_{1i}; Y_{2i}, Y_{3i} | X_{2i}) \right\} \quad (2.18)$$

- Првиот член од минимумот се добива од:

$$\begin{aligned} I(W; Y_3^n) &= \sum_{i=1}^n I(W; Y_{3i} | Y_3^{i-1}) \stackrel{(a)}{\leq} \sum_{i=1}^n I(W, Y_3^{i-1}; Y_{3i}) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n I(X_{1i}, X_{2i}, W, Y_3^{i-1}; Y_{3i}) \stackrel{(b)}{=} \sum_{i=1}^n I(X_{1i}, X_{2i}; Y_{3i}) \end{aligned} \quad (2.19)$$

(a) - следи од следниве изрази:

$$\begin{aligned} I(W; Y_{3i} | Y_3^{i-1}) &\leq I(W, Y_3^{i-1}; Y_{3i}) = I(Y_3^{i-1}; Y_{3i}) + I(W; Y_{3i} | Y_3^{i-1}) \leq I(X_{1i} X_{2i} W, Y_3^{i-1}; Y_{3i}) \\ I(X_{1i} X_{2i} W, Y_3^{i-1}; Y_{3i}) &= H(Y_{3i}) - H(Y_{3i} | X_{1i} X_{2i} W, Y_3^{i-1}) \stackrel{(c)}{\geq} I(W, Y_3^{i-1}; Y_{3i}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

(b) - следи од следниве изрази:

$$\begin{aligned} I(X_{1i} X_{2i} W, Y_3^{i-1}; Y_{3i}) &= H(Y_{3i}) - H(Y_{3i} | X_{1i} X_{2i} W, Y_3^{i-1}) \stackrel{(d)}{=} \\ &= H(Y_{3i}) - H(Y_{3i} | X_{1i} X_{2i}) = I(X_{1i} X_{2i}; Y_{3i}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

(c) - следи од фактот дека условеноста ја намалува ентропијата [9, eq.(2.95)]

(d) - следи од претпоставката дека се работи за канал без меморија односно $W, Y_3^{i-1} \rightarrow X_{1i} X_{2i} \rightarrow Y_{3i}$ формираат марков ланец [9, eq.(2.117)].

- Вториот член од минимумот во (2.18) е:

$$\begin{aligned} I(W; Y_3^n) &\leq I(W; Y_3^n Y_2^n) = \sum_{i=1}^n I(W; Y_{2i} Y_{3i} | Y_2^{i-1} Y_3^{i-1}) \stackrel{(a)}{=} \sum_{i=1}^n I(W; Y_{2i} Y_{3i} | Y_2^{i-1} Y_3^{i-1} X_{2i}) \leq \\ &\stackrel{(b)}{\leq} \sum_{i=1}^n I(X_{1i}, W, Y_2^{i-1} Y_3^{i-1}; Y_{2i} Y_{3i} | X_{2i}) \stackrel{(c)}{=} \sum_{i=1}^n I(X_{1i}; Y_{2i} Y_{3i} | X_{2i}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Каде:

(a) следи од изборот на релејната функција 2.3 согласно која X_{2i} е функција од Y_2^{i-1}

(b)

$$I(W; Y_{2i} Y_{3i} | Y_2^{i-1} Y_3^{i-1} X_{2i}) + I(Y_2^{i-1} Y_3^{i-1}; Y_{2i} Y_{3i} | X_{2i}) = I(Y_2^{i-1} Y_3^{i-1}, W; Y_{2i} Y_{3i} | X_{2i}) \quad (2.23)$$

Од (2.23) се добива дека:

$$I(Y_2^{i-1} Y_3^{i-1}, W; Y_{2i} Y_{3i} | X_{2i}) \geq I(W; Y_{2i} Y_{3i} | Y_2^{i-1} Y_3^{i-1} X_{2i}) \quad (2.24)$$

$$I(X_{1i} Y_2^{i-1} Y_3^{i-1}, W; Y_{2i} Y_{3i} | X_{2i}) = I(Y_2^{i-1} Y_3^{i-1}, W; Y_{2i} Y_{3i} | X_{2i}) + I(X_{1i}; Y_{2i} Y_{3i} | W, X_{2i} Y_2^{i-1} Y_3^{i-1}) \quad (2.25)$$

Со замена на (2.24) во (2.25) се добива:

$$I(X_{1i} Y_2^{i-1} Y_3^{i-1}, W; Y_{2i} Y_{3i} | X_{2i}) \geq I(Y_2^{i-1} Y_3^{i-1}, W; Y_{2i} Y_{3i} | X_{2i}) \geq I(W; Y_{2i} Y_{3i} | Y_2^{i-1} Y_3^{i-1} X_{2i}) \quad (2.26)$$

(c)

$$\begin{aligned} I(X_{1i}, W, Y_2^{i-1} Y_3^{i-1}; Y_{2i} Y_{3i} | X_{2i}) &= H(Y_{2i} Y_{3i} | X_{2i}) - H(Y_{2i} Y_{3i} | X_{2i} X_{1i}, W, Y_2^{i-1} Y_3^{i-1}) = \\ &= H(Y_{2i} Y_{3i} | X_{2i}) - H(Y_{2i} Y_{3i} | X_{2i} X_{1i}) = I(X_{1i}; Y_{2i} Y_{3i} | X_{2i}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ако се дефинира помошна променлива $Z \sim \text{Unif}[1 : n]$ која е независна од $(X_1^n, X_2^n, Y_2^n, Y_3^n)$ која зема вредности во множеството $\{1, \dots, n\}$ со веројатност:

$$P(Z = i) = \frac{1}{n} \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.28)$$

и доколку се земе:

$$X_1 \triangleq X_{1Z}, \quad X_2 \triangleq X_{2Z}, \quad Y_3 \triangleq Y_{3Z} \quad Y_2 \triangleq Y_{2Z} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_{1i}, X_{2i}; Y_{3i}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_{1Z}, X_{2Z}; Y_Z | Z = i) = I(X_1, X_2; Y_3 | Z) = \\ &= H(Y_3 | Z) - H(Y_3 | Z, X_1, X_2) \stackrel{(a)}{\leq} H(Y_3) - H(Y_3 | Z, X_1, X_2) \stackrel{(b)}{=} \\ &= H(Y_3) - H(Y_3 | X_1, X_2) = I(X_1, X_2; Y_3) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Каде (a) следи од правилото дека условувањето ја намалува ентропија, а еднаквоста (b) следи од Марковиот ланец $Z \rightarrow (X_1 X_2) \rightarrow (Y_3, Y_2)$ кој е последица на каналот и кодот.

На сличен начин се добива:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_{1i}; Y_{3i}, Y_{2i} | X_{2i}) = I(X_1; Y_3, Y_2 | X_2, Z) \leq I(X_1; Y_3, Y_2 | X_2) \quad (2.31)$$

Доколку изразите (2.30) и (2.31) се заменат соодветно во (2.19) и (2.22) се добива

$$I(W; Y_3^n) \leq \sum_{i=1}^n I(X_{1i} X_{2i}; Y_{3i}) = nI(X_1 X_2; Y_3 | Z) \leq nI(X_1 X_2; Y_3) \quad (2.32)$$

$$I(W; Y_3^n) \leq \sum_{i=1}^n I(X_{1i}; Y_{2i} Y_{1i} | X_{2i}) = nI(X_1; Y_2 Y_1 | X_2 Z) \leq nI(X_1; Y_2 Y_1 | X_2) \quad (2.33)$$

Доколку (2.32) и (2.33) се заменат во (2.18) и (2.17) се добива:

$$R \leq \min \{I(X_1 X_2; Y_3), I(X_1; Y_2 Y_1 | X_2)\} \quad (2.34)$$

со што се докажува теоремата 2.1.

2.2 Декодирај-и-проследи релеен канал

Една едноставна метода за кодирање во релејниот канал е *директен пренос*. Во оваа метода се фиксира преносот од релето на најповолниот симбол за каналот од изворот кон дестинацијата така што се добие најдобар капацитет на каналот од изворот до дестинацијата и да се комуницира пораката директно со користење на оптимално точка-точка канално кодирање. Капацитетот на релејниот канал ќе биде ограничен од долната страна со капацитетот на деградираниот DMRC т.е.

$$C_{DT} \geq \max_{x_2 \in X} \max_{p(x_1)} I(X_1; Y_3 | x_2) \quad (2.35)$$

Во другата екстрема од директниот пренос, методата декодирај-и-проследи (DF) силно се потпира на релето за да ја помогне комуникацијата на пораката меѓу изворот и дестинацијата. Оваа метода ќе ја анализираме во три чекори.

Во првите два чекори, ќе користиме каскаден релеен канал во кој дестинацијата го смета сигналот од изворот како шум. Методата декодирај-и-проследи оди чекор понапред во споредба со каскадниот релеен канал со тоа што дестинацијата дополнително ги декодира информациите испратени директно од изворот.

2.2.1 Каскаден релеен канал

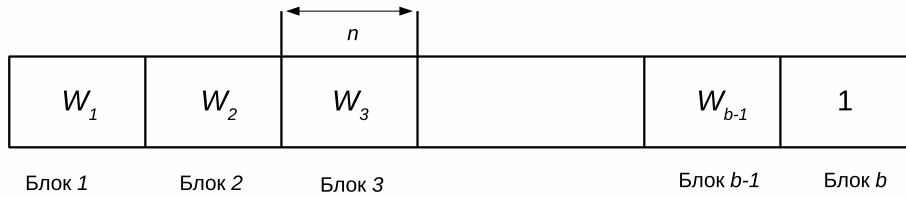
Во каскадниот релеен канал, релето ја реконструира пораката примена од изворот во секој блок и ја препраќа во наредниот блок. На тој начин се добива долната граница на капацитетот на DMRC:

$$C \geq \max_{p(x_1)p(x_2)} \min \{I(X_2; Y_3), I(X_1; Y_2|X_2)\} \quad (2.36)$$

Не е тешко да се покаже дека оваа долна граница е достиглива кога DMRC се состои од каскада од два дискретни канали без меморија (DMC-Discrete Memoryless Channel), т.е. $p(y_2, y_3|x_1, x_2) = p(y_2|x_1)p(y_3|x_2)$. Во овој случај изразот за капацитет се сведува на:

$$\begin{aligned} C &= \max_{p(x_1)p(x_2)} \min \{I(X_2; Y_3), I(X_1; Y_2|X_2)\} = \\ &= \max_{p(x_1)p(x_2)} \min \{I(X_2; Y_3), I(X_1; Y_2)\} = \min \left\{ \max_{p(x_2)} \{I(X_2; Y_3)\}, \max_{p(x_1)} \{I(X_1; Y_2)\} \right\} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Доказот на достигливоста на долната граница за каскадниот релеен канал користи b преносни блокови, секој се состои од n испраќања, како што е илустрирано на слика 2.3. Низа од $(b - 1)$ пораки W_j , $j \in [1 : b - 1]$, при што секоја се избира независно и рамномерно од множеството $[1 : 2^{nR}]$, се испраќа преку b блокови. Без да се изгуби општоста, претпоставуваме дека $w_b = 1$. Треба да се забележи дека средната брзина на пренос во b блокови е $R \cdot (b - 1)/b$, што може да се приближи по потреба до R со соодветен избор на b .



Слика 2.3: Множество на пренесувани блокови кое се користи во каскадниот релеен канал

Генерирање на кодната книга: Се фиксира производот на функциите на распределба на веројатноста $p(x_1) \cdot p(x_2)$ кој ја достигнуваат долната граница на каскадниот релеен канал дадена со (2.36). Случајно и независно се генерира кодна книга за *секој блок*. За секое $j \in [1 : b]$, случајно и независно се генерираат 2^{nR} низи $x_1^n(w_j)$, $w_j \in [1 : 2^{nR}]$, во согласност со веројатноста: $\prod_{i=1}^n p_{X_1}(x_{1i})$. На сличен начин, се генерираат 2^{nR} низи $x_2^n(w_{j-1})$, $w_{j-1} \in [1 : 2^{nR}]$, секоја во согласност со $\prod_{i=1}^n p_{X_2}(x_{2i})$. Со ова се дефинира кодната книга:

$$C_j = \{(x_1^n(w_j), x_2^n(w_{j-1})) : w_{j-1}, w_j \in [1 : 2^{nR}]\}, \quad j \in [1, ..b]. \quad (2.38)$$

Кодните книги се откриваат на сите јазли (извор, дестинација и реле).

Кодирање: Да земеме дека $w_j \in [1 : 2^{nR}]$ е новата порака што треба да се испрати во блокот j . кодерот во изворот ја испраќа низата $x_1^n(w_j)$ од кодната книга C_j .

Кодирање во релето: По конвенција претпоставуваме $\tilde{w}_0 = 1$. На крај од блокот j , релето ја наоѓа уникатната порака \tilde{w}_j така што $(x_1^n(\tilde{w}_j), x_2^n(\tilde{w}_{j-1}), y_2^n(j)) \in A_\epsilon^{(n)}$. Во блокот $j + 1$, тој ја испраќа низата $x_2^n(\tilde{w}_j)$ од кодната книга C_{j+1} .

Бидејќи кодниот збор испратен во релето статистички зависи од пораката испратена во претходниот блок, овој начин на кодирање се нарекува блоковско Марково кодирање - BMS (анг. BMS - Block Markov Coding).

блок	1	2	3	4	...	j	...	b
X_1	$x_1(w_1)$	$x_1(w_2)$	$x_1(w_3)$	$x_1(w_4)$...	$x_1(w_j)$...	1
Y_2	\tilde{w}_1	\tilde{w}_2	\tilde{w}_3	\tilde{w}_4	...	\tilde{w}_j	...	0
X_2	$x_2^n(1)$	$x_2(\tilde{w}_1)$	$x_2(\tilde{w}_2)$	$x_2(\tilde{w}_3)$...	$x_2(\tilde{w}_{j-1})$...	$x_2(\tilde{w}_{b-1})$
Y_3	0	\hat{w}_1	\hat{w}_2	\hat{w}_3	...	\hat{w}_{j-1}	...	\hat{w}_{b-1}

Табела 2.1: Кодирање во каскаден релеен канал

Декодирање: На крајот од блокот $j + 1$, дестинацијата бара уникатна порака \hat{w}_j така што $(x_2^n(\hat{w}_j), y_3^n(j + 1)) \in A_\epsilon^{(n)}$.

Анализа на веројатноста за грешка: Ќе ја анализираме веројатноста за грешка при декодирање за пораката W_j усреднета по кодните книги. Без да се изгуби општоста претпоставуваме дека $W_j = 1$. Да претпоставиме дека \tilde{W}_j е естимацијата на пораката во релето на крај од блокот j . Бидејќи:

$$\{\hat{W}_j \neq 1\} \subseteq \{\tilde{W}_j \neq 1\} \cup \{\hat{W}_j \neq \tilde{W}_j\} \quad (2.39)$$

декодерот ќе направи грешка само доколку еден или повеќе од следниве настани се случат:

$$\tilde{E}_1(j) = \left\{ \left(X_1^n(1), X_2^n(\tilde{W}_{j-1}), Y_2^n(j) \right) \neq A_\epsilon^{(n)} \right\} \quad (2.40)$$

$$\tilde{E}_2(j) = \left\{ \left(X_1^n(w_j), X_2^n(\tilde{W}_{j-1}), Y_2^n(j) \right) \in A_\epsilon^{(n)} \text{ за некое } w_j \neq 1 \right\} \quad (2.41)$$

$$E_1(j) = \left\{ X_2^n(\tilde{W}_j), Y_3^n(j + 1) \neq A_\epsilon^{(n)} \right\} \quad (2.42)$$

$$E_2(j) = \left\{ (X_2^n(w_j), Y_3^n(j + 1)) \in A_\epsilon^{(n)} \text{ за некое } w_j \neq \tilde{W}_j \right\} \quad (2.43)$$

На овој начин веројатноста на грешка е ограничена како:

$$\begin{aligned} P(E(j) = P\{\hat{W}_j \neq 1\}) &\leq P(\tilde{E}_1(j) \cup \tilde{E}_2(j) \cup E_1(j) \cup E_2(j)) \leq \\ &\leq P(\tilde{E}_1(j)) + P(\tilde{E}_2(j)) + P(E_1(j)) + P(E_2(j)) \end{aligned} \quad (2.44)$$

каде првите два члена ја даваат горната граница на $P\{\hat{W}_j \neq 1\}$, а преостанатите два члена ја даваат горната граница на $P\{\hat{W}_j \neq \tilde{W}_j\}$.

Сега, од независноста на кодните книги, естимацијата на пораката во релето \tilde{W}_{j-1} , која е функција од $Y_2^n(j - 1)$ и кодната книга C_{j-1} , е независна од кодните зборови $X_1^n(w_j), X_2^n(w_{j-1}), w_j, w_{j-1} \in [1 : 2^{nR}]$, од кодната книга C_j . Оттука, од законот за големи броеви [15, ch.(1.1)] (LLN - Law of Large Numbers) $P(\tilde{E}_1(j)) \rightarrow 0$ како $n \rightarrow \infty$, и од лемата за пакување, [14, Lemma 3.1], $P(\tilde{E}_2(j)) \rightarrow 0$ како $n \rightarrow \infty$ доколку $R < I(X_1; Y_2 | X_2) - \delta(\epsilon)$. Слично, од независноста на кодните книги и од LLN, $P(E_1(j)) \rightarrow 0$ како $n \rightarrow \infty$, и од истата независност и од лемата за пакување, $P(E_2(j)) \rightarrow 0$ како $n \rightarrow \infty$ доколку $R < I(X_2; Y_3) - \delta(\epsilon)$. На тој начин се покажува дека под услов на дадените ограничувања на брзината на пренесување, $P\{\hat{W}_j \neq \tilde{W}_j\} \rightarrow 0$ како $n \rightarrow \infty$ за секое $j \in [1 : b - 1]$ со што се докажува долната границата за каскадниот релеен канал.

2.2.2 Кохерентен каскаден релеен канал

Брзината на пренос што се постигнува со каскадниот релеен канал може да се подобри доколку се дозволи изворот и релето кохерентно да соработуваат во испраќањето на нивните кодни зборови. Со ова подобрување, ќе се добие долната граница на капацитетот за DMRC:

$$C \geq \max_{p(x_1, x_2)} \min \{I(X_2; Y_3), I(X_1; Y_2 | X_2)\} \quad (2.45)$$

Повторно се користи блоковско Марково кодирање во кое низа од $(b - 1)$ i.i.d пораки W_j , $j \in [1 : b - 1]$, се испраќаат преку b блокови при што секој блок се состои од n пристапи до каналот.

Генерирање на кодна книга: Се фиксира веројатноста $p(x_1, x_2)$ на вредности кои ја остваруваат долната граница во (2.45). За $j \in [1 : b]$, случајно и независно се генерираат 2^{nR} низи $x_2^n(w_{j-1})$, $w_{j-1} \in [1 : 2^{nR}]$, секоја согласно $\prod_{i=1}^n p_{X_2}(x_{2i})$. За секое $w_{j-1} \in [1 : 2^{nR}]$, случајно и условно независно се генерираат 2^{nR} низи $x_1^n(w_j | w_{j-1})$, $w_j \in [1 : 2^{nR}]$, секоја согласно $\prod_{i=1}^n p_{X_1|X_2}(x_{1i} | x_{2i}(w_{j-1}))$. Ова ја дефинира кодната книга:

$$C_j = \{(x_1^n(w_j | w_{j-1}), x_2^n(w_{j-1})) : w_{j-1}, w_j \in [1 : 2^{nR}]\}, \quad j \in [1 : b] \quad (2.46)$$

Кодните книги се разоткриваат на сите јазли (изворот, дестинацијата и релето).

Блок	1	2	3	4	$b - 1$	b
X_1	$x_1^n(w_1 1)$	$x_1^n(w_2 w_1)$	$x_1^n(w_3 w_2)$...	$x_1^n(w_{b-1} w_{b-2})$	$x_1^n(w_b w_{b-1})$
Y_2	\tilde{w}_1	\tilde{w}_2	\tilde{w}_3	...	\tilde{w}_{b-1}	0
X_2	$x_2^n(1)$	$x_2^n(\tilde{w}_1)$	$x_2^n(\tilde{w}_2)$...	$x_2^n(\tilde{w}_{b-2})$	$x_2^n(\tilde{w}_{b-1})$
Y_3	0	\hat{w}_1	\hat{w}_2		\hat{w}_{b-2}	\hat{w}_{b-1}

Табела 2.2: Кодирање и декодирање за кохерентен каскаден релеен канал

Кодирање во изворот: Да земеме дека $w_j \in [1 : 2^{nR}]$ е пораката што треба да се испрати во блокот j . Кодерот во изворот ја испраќа низата $x_1^n(w_j | w_{j-1})$ од кодната книга C_j , каде по конвенција $w_0 = w_b = 1$.

Кодирање во релето: По конвенција, да земеме дека $\tilde{w}_0 = 1$. На крај од блокот j , релето наоѓа уникатна порака \tilde{w}_j така што $(x_1^n(\tilde{w}_j | \tilde{w}_{j-1}), x_2^n(\tilde{w}_{j-1}), y_2^n(j)) \in A_\epsilon^{(n)}$. Во блокот $j + 1$, тоа го испраќа $x_2^n(w_j)$ од кодната книга C_{j+1} .

Декодирање во дестинацијата: На крај од блокот $j + 1$, дестинацијата наоѓа уникатна порака \hat{w}_j така што $(x_2^n(\hat{w}_j), y_2^n(j + 1)) \in A_\epsilon^{(n)}$.

Анализа на веројатноста на грешка: Ќе ја анализираме веројатноста за грешка при декодирање на W_j усреднета по сите кодни книги. Без да се наруши општоста да претпоставиме дека $W_{j-1} = W_j = 1$. Да претпоставиме дека \tilde{W}_j е естимација на пораката во релето на крај од блокот j . Декодерот прави грешка доколку се случи еден или повеќе од следните настани:

$$\tilde{E}(j) = \{\tilde{W}_j \neq 1\} \quad (2.47)$$

$$E_1(j) = \{X_2^n(\tilde{W}_j), Y_3^n(j + 1) \neq A_\epsilon^{(n)}\} \quad (2.48)$$

$$E_2(j) = \{(X_2^n(w_j), Y_3^n(j + 1)) \in A_\epsilon^{(n)} \text{ за некои } w_j \neq \tilde{W}_j\} \quad (2.49)$$

На овој начин, веројатноста на грешка е ограничена од горе како:

$$P(E(j)) = P\{\hat{W}_j \neq 1\} \leq P(\tilde{E}(j) \cup E_1(j) \cup E_2(j)) \leq P(\tilde{E}(j)) + P(E_1(j)) + P(E_2(j)) \quad (2.50)$$

со следење на истите чекори за анализа како во глава 2.2.1, последните два члена $P(E_1(j))$ и $P(E_2(j))$ од изразот 2.50, тежнеат кон нула како $n \rightarrow \infty$ доколку $R < I(X_2; Y_3) - \epsilon$. За да се најде горната граница за првиот член $P(\tilde{E}(j))$, се дефинира:

$$\tilde{E}_1(j) = \left\{ \left(X_1^n(1|\tilde{W}_{j-1}), X_2^n(\tilde{W}_{j-1}), Y_2^n(j) \right) \notin A_\epsilon^{(n)} \right\} \quad (2.51)$$

$$\tilde{E}_2(j) = \left\{ \left(X_1^n(w_j|\tilde{W}_{j-1}), X_2^n(\tilde{W}_{j-1}), Y_2^n(j) \right) \in A_\epsilon^{(n)} \text{ за некои } w_j \neq 1 \right\} \quad (2.52)$$

тогаш:

$$\begin{aligned} P(\tilde{E}(j)) &\leq P(\tilde{E}(j-1) \cup \tilde{E}_1(j) \cup \tilde{E}_2(j)) \leq \\ &\leq P(\tilde{E}(j-1)) + P(\tilde{E}_1(j) \cap \tilde{E}^c(j-1)) + P(\tilde{E}_2(j)) \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$P(\tilde{E}_1(j) \cap \tilde{E}^c(j-1)) = P\left\{ \left(X_1^n(1|\tilde{W}_{j-1}), X_2^n(\tilde{W}_{j-1}), Y_2^n(j) \right) \notin A_\epsilon^{(n)}, \tilde{W}_{j-1} = 1 \right\} \leq \quad (2.54)$$

$$\leq P\left\{ \left(X_1^n(1|1), X_2^n(1), Y_2^n(j) \right) \notin A_\epsilon^{(n)} | \tilde{W}_{j-1} = 1 \right\} \quad (2.55)$$

која од независноста на кодните зборови и законот за големи броеви, тежнее кон нула како $n \rightarrow \infty$. Од лемата за пакување [14, Lemma 3.1], $P(\tilde{E}_2(j))$ тежнее кон нула како $n \rightarrow \infty$ доколку $R < I(X_1; Y_2|X_2) - \delta(\epsilon)$. Треба да се забележи дека по дефиниција $\tilde{W}_0 = 1$. Оттука, со индукција, $P(\tilde{E}(j))$ тежнее кон нула како $n \rightarrow \infty$ за секое $j \in [1 : b-1]$. На тој начин се покажува дека при дадени ограничувања на брзината на пренос на податоци, $P\{\hat{W}_j \neq \tilde{W}_j\} \rightarrow 0$ доколку $n \rightarrow \infty$ за секое $j \in [1 : b-1]$. Со ова се комплетира доказот за достигливоста на кохерентната долна граница во (2.45).

2.2.3 Декодирај-и-проследи релеен канал

Перформансите на кохерентниот каскаден релеен канал може да се подобрат доколку дестинацијата ги декодира истовремено пораките испратени од изворот и од релето.

Теорема 2.2. *Долна граница за декодирај-и-проследи*

Капацитетот на DMRC е ограничен од долна страна со [14, thm.(16.2)]:

$$C \geq \max_{p(x_1 x_2)} \min \{I(X_1 X_2; Y_3), I(X_1; Y_2|X_2)\} \quad (2.56)$$

Треба да се забележи дека оваа граница се разликува од CUB во тоа што здружената информација во пресечната граница го вклучува Y_3 во вториот член за минимизација. Ќе видиме дека наместо да избереме кодирачката функција (2.3) на релето да зависи од конечен број на претходно пратени y_2 , капацитетот C може да се достигне со користење на блоковска маркова зависност (анг. BMS - Block Markov Coding) на x_2 од y_2 [25]. Во таков случај кодниот збор што релето го праќа во даден блок зависи статистички од пораката пратена во претходниот блок.

Доказ: Теоремата 2.2 ќе ја докажеме со случајно кодирање со складирање во кошнички. Дополнително таа може да се докаже и со декодирање наназад [14, ch.(16.4.4)]. Во кодирањето со складирање во кошнички, изворот и релето кооперативно го испраќаат индексот на кошничката S_j на пораката W_j (наместо да ја испраќаат самата порака) во блокот $j+1$ за да и помогнат на дестинацијата да ја реконструира пораката W_j .

Разгледуваме b блокови, секој со по n симболи. Низа од $b - 1$ пораки $w_j \in [1, 2^{nR}]$, $j = 1, 2, \dots, b - 1$ ќе се испрати со $n \cdot b$ употреби на каналот. (Треба да се забележи ако $b \rightarrow \infty$, за фиксно n , брзина на пренесување е $R \cdot (b - 1)/b$ е произволно блиску до R .)

Прво случајно се генерираат $M_2 = 2^{nR_2}$ независни идентично дистрибуирани (i.i.d) n -низи во X_2^n , секоја генерирана согласно веројатноста $p(x_2^n) = \prod_{i=1}^n p(x_{2i})$. Така генерираните низи се индексираат како $x_2^n(s)$, $s \in [1, 2^{nR_2}]$. За секое $x_2^n(s)$, се генерираат $M = 2^{nR}$ условно независни n -низи $x_1^n(w|s)$, $w \in [1, 2^{nR}]$ генерирани согласно веројатноста $p(x_1^n|x_2^n(s)) = \prod_{i=1}^n p(x_{1i}|x_{2i}(s))$ (Со оваа постапка за секоја кошничка s се генерира посебна кодна книга од 2^{nR} елементи. На крајот финалната кодна книга содржи $2^{nR_2} \times 2^{nR}$ елементи.). На овој начин се дефинира случајна кодна книга $C_j = \{x_1^n(w|s), x_2^n\}$.

Случајната низа од кошнички $B = \{S_1, S_2, \dots, S_{2^{nR_2}}\}$ се дефинира на следниов начин: Да избереме секој природен број $w \in [1, 2^{nR}]$ да се назначи независно, согласно униформната дистрибуција на индексите $s = 1, 2, \dots, 2^{nR_2}$, во кошничката S_s . Ќе ја користиме нотацијата $s(w)$ да го означиме индексот на кошничката во која w е складира

Блок	1	2	...	j	$j + 1$...	b
X_1	$x_1^n(w_1 1)$	$x_1^n(w_2 s_1)$...	$x_1^n(w_j s_{j-1})$	$x_1^n(w_{j+1} s_j)$...	$x_1^n(1 s_{b-1})$
Y_2	\tilde{w}, \tilde{s}_1	\tilde{w}_2, \tilde{s}_2	...	\tilde{w}_j, \tilde{s}_j	$\tilde{w}_{j+1}, \tilde{s}_{j+1}$...	0
X_2	$x_2^n(1)$	$x_2^n(\tilde{s}_1)$...	$x_2^n(\tilde{s}_{j-1})$	$x_2^n(\tilde{s}_j)$...	$x_2^n(\tilde{s}_{b-1})$
Y_3	0	$\hat{s}_1 \hat{w}_1$...	$\hat{s}_{j-1} \hat{w}_{j-1}$	$\hat{s}_j \hat{w}_j$...	$\hat{s}_{b-1} \hat{w}_{b-1}$

Табела 2.3: Кодирање и декодирање за методата со складирање во кошнички за декодирај-и-проследи

Генерирање на кодната книга: Да ја фиксираме здружената РМФ $p(x_1 x_2)$ на вредност што ја достигнува долната граница. Да претпоставиме дека $0 \leq R_2 \leq R$. За секое $j \in [1 : b]$, случајно и независно генерираме 2^{nR_2} низи $x_2^n(s_{j-1})$, $s_{j-1} \in [1 : 2^{nR_2}]$, секоја во согласност со $\prod_{i=1}^n p_{x_2}(x_{2i})$. За секое $s_{j-1} \in [1 : 2^{nR}]$, случајно и условно независно генерираме 2^{nR} низи $x_1^n(w_j|s_{j-1})$ (Со оваа постапка за секоја кошничка s_j , $j \in [1 : b]$ се генерира посебна кодна книга од 2^{nR} елементи. На крајот финалната кодна книга содржи $2^{nR_2} \times 2^{nR}$ елементи.). На овој начин се дефинира случајна кодна книга

$$C_j = \{(x_1^n(w_j|s_{j-1}), x_2^n(s_{j-1})) : w_j \in [1 : 2^{nR}], s_{j-1} \in [1 : 2^{nR_2}]\}, \quad j \in [1 : b] \quad (2.57)$$

и низата од кошнички:

$$B = \{S_1, S_2, \dots, S_{2^{nR_2}}\} \quad (2.58)$$

Низата од кошнички B овозможува да се испрати информација до дестинацијата, со користење на случајно складирање во кошнички опишано со теоремата на Слепијан и Вулф ([9, th.(15.4.1)], [28]). Имено согласно оваа постапка, ги групираме пораките во 2^{nR_2} кошнички со еднаква големина: $B(s) = [(s - 1) 2^{n(R-R_2)} + 1 : s \cdot 2^{n(R-R_2)}]$, $s \in [1 : 2^{nR_2}]$. Кодните книги и распоредот по кошнички се разоткрива на сите јазли. Кодирањето и декодирањето може да се објаснат со помош на табелата Tab. 2.3

Кодирање: Да претпоставиме дека $w_j \in [1 : 2^{nR}]$ е пораката што треба да се испрати во блокот j и да претпоставиме дека $w_{j-1} \in B(s_{j-1})$. Кодерот го испраќа $x_1^n(w_j|s_{j-1})$ од кодната книга C_j , каде по конвенција $s_0 = w_b = 1$.

Кодирање во релето: На крајот од блокот j , знаејќи го s_{j-1} по приемот на $y_2(j)$, релето ја естимира пораката што ја има пратено изворот \tilde{w}_j на начин што ја наоѓа единствената порака \tilde{w}_j за која $(x_1^n(\tilde{w}_j|s_{j-1}), x_2^n(\tilde{s}_{j-1}), y_2^n(j)) \in A_\epsilon^{(n)}$. Доколку $\tilde{w}_j \in B(\tilde{s}_j)$, во блокот $j + 1$, релето ја испраќа низата $x_2^n(\tilde{s}_j)$ од кодната книга C_{j+1} . Во понатамошната анализа по по конвенција ќе земеме дека $\tilde{s}_0 = 1$.

Декодирање во дестинацијата: На крај од блокот $j + 1$ дестинацијата го наоѓа единствениот индекс \hat{s}_j таков што $(x_2^n(\hat{s}_j), y_3^n(j + 1)) \in A_\epsilon^{(n)}$ кој ќе биде потребен за декодирање на пораката во наредниот блок. Ако претпоставиме дека во претходниот блок j индексот на кошничката s_{j-1} бил успешно декодиран, дестинацијата ќе ја естимира единствената порака \hat{w}_j за која важи $(x_1(\hat{w}_j|\hat{s}_{j-1}), x_2^n(\hat{s}_{j-1}), y_3^n(j)) \in A_\epsilon^{(n)}$ и $\hat{w}_j \in B(\hat{s}_j)$. Солгласно ова претпоставуваме дека на крајот на блокот $(j + 1)$ дестинацијата ги знае (w_1, w_2, \dots, w_j) и (s_1, s_2, \dots, s_j) , а релето ги знае $(w_1, w_2, \dots, w_{j+1})$ и $(s_1, s_2, \dots, s_{j+1})$.

Анализа на веројатноста на грешка: Ја анализираме веројатноста за грешка при декодирање за пораката W_j усреднета по сите кодни книги. Да претпоставиме без да се изгуби општоста $W_j = S_{j-1} = S_j = 1$ и да претпоставиме \tilde{S}_j е естимација на S_j во релето. Декодерот ќе згреша доколку еден или повеќе од следниве настани се случи:

$$\tilde{E}(j-1) = \{\tilde{S}_{j-1} \neq 1\} \quad (2.59)$$

$$E_1(j-1) = \{\hat{S}_{j-1} \neq 1\} \quad (2.60)$$

$$E_1(j) = \{\hat{S}_j \neq 1\}, \quad (2.61)$$

$$E_2(j) = \{(X_1^n(1|\hat{S}_{j-1}), X_2^n(\hat{S}_{j-1}), Y_3^n(j)) \notin A_\epsilon^{(n)}\} \quad (2.62)$$

$$E_3(j) = \{(X_1^n(w_j|\hat{S}_{j-1}), X_2^n(\hat{S}_{j-1}), Y_3^n(j)) \in A_\epsilon^{(n)} \\ \text{за некои } w_j \neq 1, w_j \in B(\hat{S}_j)\} \quad (2.63)$$

На тој начин веројатноста за грешка е ограничена од горе со:

$$P(E(j)) = P\{\hat{W}_j \neq 1\} \leq P(\tilde{E}(j-1) \cup E_1(j-1) \cup E_1(j) \cup E_2(j) \cup E_3(j)) \leq \\ P(\tilde{E}(j-1)) + P(E_1(j)) + P(E_1(j-1)) + P(E_2(j) \cap \tilde{E}^c(j-1) \cap E_1^c(j-1) \cap E_1^c(j)) + \\ + P(E_3(j) \cap \tilde{E}^c(j-1) \cap E_1^c(j-1) \cap E_1^c(j)). \quad (2.64)$$

Ако ги следиме сличните чекори од глава 2.2.2, со тоа што \tilde{W}_{j-1} се заменува со \tilde{S}_{j-1} , првиот член во (2.64) $P(\tilde{E}(j-1)) \rightarrow 0$ доколку $n \rightarrow \infty$ и $R_2 < I(X_1; Y_2|X_2) - \delta(\epsilon)$. Вториот и третиот член во (2.64) $P(E_1(j))$ и $P(E_1(j-1))$ тежнеат кон нула доколку $n \rightarrow \infty$ и $R_2 < I(X_2; Y_3) - \delta(\epsilon)$. Четвртиот член во (2.64) е ограничен на следниов начин:

$$P(E_2(j) \cap \tilde{E}^c(j-1) \cap E_1^c(j-1) \cap E_1^c(j)) = \\ = P(E_2(j) \cap \{\tilde{S}_{j-1} = 1\} \cap \{\hat{S}_{j-1} = 1\} \cap \{\hat{S}_j = 1\}) \leq \\ \leq P\{(X_1^n(1|1), X_2^n(1), Y_3^n(j)) \notin A_\epsilon^{(n)} | \tilde{S}_{j-1} = 1\} \quad (2.65)$$

што заради независноста на кодните книги и законот за големи броеви, тежнее кон 0 доколку $n \rightarrow \infty$. Последниот член во (2.64) е ограничен од горната страна на следниов начин:

$$P(E_3(j) \cap \tilde{E}^c(j-1) \cap E_1^c(j-1) \cap E_1^c(j)) = \\ = P(E_3(j) \cap \{\tilde{S}_{j-1} = 1\} \cap \{\hat{S}_{j-1} = 1\} \cap \{\hat{S}_j = 1\}) \leq$$

$$\leq P \left\{ (X_1^n(1|1), X_2^n(1), Y_3^n(j)) \in A_\epsilon^{(n)} \text{ за некое } w_j \neq 1, w_j \in B(1) \mid \tilde{S}_{j-1} = 1 \right\} \quad (2.66)$$

кој заради независноста на кодните книги и лемата за пакување [14, Lemma 3.1] тежнее кон нула доколку $n \rightarrow \infty$ и $R - R_2 \leq I(X_1; Y_3 | X_2) - \delta(\epsilon)$. Со комбинирање на границите и елиминација на R_2 ,

$$R - R_2 \leq I(X_1; Y_3 | X_2) - \delta(\epsilon) \rightarrow R \leq I(X_1; Y_3 | X_2) + R_2 - \delta(\epsilon); \quad R_2 \leq I(X_2; Y_3) - \delta(\epsilon) \quad (2.67)$$

се покажува дека $P(\hat{W}_j \neq W_j)$ тежнее кон нула доколку $n \rightarrow \infty$ за секое $j \in [1 : b-1]$ доколку $R < I(X_1; Y_2 | X_2) - \delta(\epsilon)$ т.е:

$$R \leq I(X_1; Y_3 | X_2) + I(X_2; Y_3) - 2\delta(\epsilon) = I(X_1 X_2; Y_3) - 2\delta(\epsilon) \quad (2.68)$$

Со што се докажува долната граница за декодирај-и-проследи методот.

Се покажува дека еднаквоста во (2.56) се достигнува за деградиран DMRC.

Теорема 2.3. (*Капацитет на Деградиран релеен канал*):

Капацитетот C на деградираниот RC е [3, eq.(12)]:

$$C = \max_{p(x_1, x_2)} \min \{I(X_1, X_2; Y_3), I(X_1; Y_2 | X_2)\} \quad (2.69)$$

каде максимумот е по сите здружени дистрибуции $p(x_1, x_2)$ на множеството (X_1, X_2) .

Доказот на достигливоста на теорема 2.3 ги следи чекорите истите чекори ((2.57) до (2.68)) од доказот на теоремата (2.56).

Доказ на реципроцитетот на теоремата 2.3:

Доколку се тргне од CUB дадена со теорема 2.1 и се земе во предвид дефиницијата за деградираност (2.11) се добива:

$$I(X_1; Y_3, Y_2 | X_2) = I(X_1; Y_2 | X_2) \quad (2.70)$$

Доказ:

$$p(y_3, y_2 | x_1, x_2) = p(y_2 | x_1, x_2) \cdot p(y_3 | y_2, x_2) \Rightarrow X_1 \rightarrow (X_2, Y_2) \rightarrow Y_3 \quad (2.71)$$

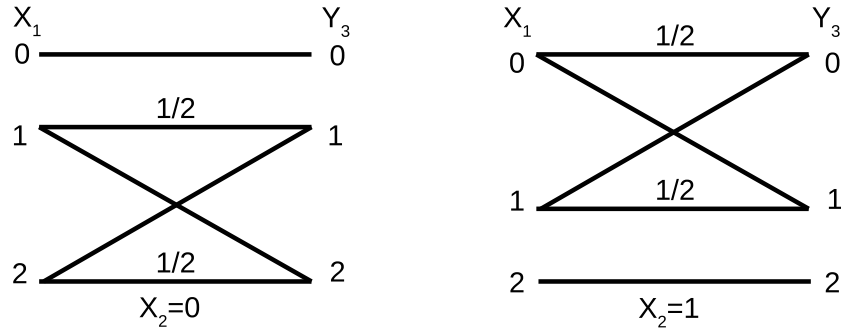
$$\begin{aligned} I(X_1; Y_3, Y_2 | X_2) &= H(Y_3, Y_2 | X_2) - H(Y_3, Y_2 | X_1 X_2) = \\ &= H(Y_3, Y_2 | X_2) - H(Y_2 | X_1 X_2) - H(Y_3 | Y_2 X_1 X_2) = \\ &= H(Y_3, Y_2 | X_2) - H(Y_2 | X_1 X_2) - H(Y_3 | Y_2 X_2) = \\ &= H(Y_2 | X_2) + \cancel{H(Y_3 | Y_2, X_2)} - H(Y_2 | X_1 X_2) - \cancel{H(Y_3 | Y_2, X_2)} = \\ &= H(Y_2 | X_2) - H(Y_2 | X_1 X_2) = I(X_1; Y_2 | X_2) \end{aligned} \quad (2.72)$$

Овој резултат за капацитетот може да се илустрира во следниов пример.

Пример 2.1. (*Релеен канал на Сато*)

Да го разгледуваме деградираниот DMRC со $X_1 = Y_2 = Y_3 = \{0, 1, 2\}$, $X_2 = \{0, 1\}$, и $Y_2 = X_1$ како што е прикажано на слика 2.4.

Кооперативната горна граница на капацитетот на каналот $R_{UB} = \max_{p(x_1, x_2)} I(X_1, X_2; Y) = 1.169$ (види глава 8.1). Со директен пренос, $R^{(0)} = 1$ бити/испраќање може да се постигнат со $X_2 = 0$ односно $X_2 = 1$. За споредба, во [3] и [32] е покажано дека ако се користи оптимална маркова релејна функција $x_2(y_{2,i-1})$ ќе се добие $R^{(1)} = 1.0437$, а ако се користи $x_{2i}(y_{2,i-1}, y_{2,i-2})$ се добива $R^{(2)} = 1.0549$. Бидејќи каналот е деградиран капацитетот е во согласност со долната граница за методата декодирај-и-проследи (теорема 2.2). Со евалуација на оваа граница се добива $C = 1.1619$ (види [3], [32]).



Слика 2.4: Релеен канал на Сато во кој $X_1, Y_2, Y_3 \in \{0, 1, 2\}$, $X_2 \in \{0, 1\}$ и $Y_1 = X_1$

2.3 Компримирај-и-проследи релеен канал

Во методата со декодирај-и проследи, релето ја реконструира целата порака. Доколку каналот од изворот до релето е послаб од директниот канал до дестинацијата, брзината за пренос може да се намали под вредноста за директен пренос во кој случај релето воопшто не се користи. Во методата компримирај-и-проследи (CF) релето помага во комуникацијата со испраќање на опис на претходно приемиот сигнал кон дестинацијата. Бидејќи овој опис е корелиран со примената низа, се користи Wyner-Ziv кодирање [27] за да се намали брзината потребна за пренесување на описот кон дестинацијата. Оваа метода ја достигнува следнава долна граница.

Теорема 2.4. *Долна граница за компримирај-и-проследи*

Капацитетот на DMRC е ограничен од долната страна со [14, thm.(16.4)]:

$$C \geq \max \min \left\{ I(X_1, X_2; Y_3) - I(Y_2; \hat{Y}_2 | X_1 X_2 Y_3), I(X_1; \hat{Y}_2, Y_3 | X_2) \right\} \quad (2.73)$$

каде максимумот е по сите условни веројатности $p(x_1)p(x_2)p(\hat{y}_2|x_2y_2)$ со $|\hat{\mathcal{Y}}_2| \leq |\mathcal{X}_2| \cdot |\mathcal{Y}_2| + 1$.

Во споредба со CUB (теорема 2.1), првиот член во минимумот ја претставува границата за канал со повеќекратен пристап без кохерентна комуникација (X_1 и X_2 се независни) со дополнителен член кој се одзема, а вториот член личи на границата за дифузен канал но наместо Y_2 се користи описот \hat{Y}_2 .

Доказ: Повторно се користи ВМС за да се пренесат $(b-1)$ i.i.d. пораки во b блокови. На крај од блокот j , релето избира реконструирана низа $\hat{y}_2^n(j)$ условена по низата $x_2^n(j)$ (која е позната и на релето и на дестинацијата). Бидејќи дестинацијата има странична информација $y_3^n(j)$ за $\hat{y}_2^n(j)$, ќе користиме складирање по кошнички како во Wyner-Ziv кодирањето за да ја намалиме брзината неопходна за испраќање на $\hat{y}_2^n(j)$. Индексот на кошничката се испраќа кон дестинацијата во блокот $j+1$ со испраќање на низата $x_2^n(j+1)$. На крајот од блокот $j+1$, дестинацијата го декодира $x_2^n(j+1)$. Таа потоа го користи $y_3^n(j)$ и $x_2^n(j)$ за да ги декодира истовремено $\hat{y}_2^n(j)$ и $x_1^n(j)$.

Генерирање на кодна книга: Се фиксира условната веројатност $p(x_1)p(x_2)p(\hat{y}_2|y_2, x_2)$ на вредност што ја достигнува долната граница. Случајно се генерираат независни кодни книги за секој блок. За $j \in [1:b]$, случајно и независно се генерираат 2^{nR} низи $x_1^n(w_j), w_j \in [1:2^{nR}]$ секоја во согласност со $\prod_{i=1}^n p_{X_1}(x_{1i})$. Случајно и независно се генерираат 2^{nR_2} низи $x_2^n(s_{j-1}), s_{j-1} \in [1:2^{nR_2}]$, секоја во согласност со $\prod_{i=1}^n p_{X_2}(x_{2i})$. За секое $s_{j-1} \in [1:2^{nR_2}]$, случајно и условно независно се генерираат 2^{nR_2} низи

Блок	1	2	3	...	j	...	b
X_1	$x_1^n(w_1)$	$x_1^n(w_2)$	$x_1^n(w_3)$...	$x_1^n(w_j)$...	$x_1^n(1)$
Y_2	$\hat{y}_2(k_1 1), s_1$	$\hat{y}_2(k_2 s_1), s_2$	$\hat{y}_2^n(k_3 s_2), s_3$...	$\hat{y}_2^n(k_j s_{j-1}), s_j$...	0
X_2	$x_2^n(1)$	$x_2^n(s_1)$	$x_2^n(s_2)$...	$x_2^n(s_{j-1})$...	$x_2^n(s_{b-1})$
Y_3	0	$\hat{s}_1 \hat{k}_1$ \hat{w}_1	$\hat{s}_2 \hat{k}_2$ \hat{w}_2	...	$\hat{s}_{j-1} \hat{k}_{j-1}$ \hat{w}_{j-1}	...	$\hat{s}_{b-1} \hat{k}_{b-1}$ \hat{w}_{b-1}

Табела 2.4: Кодирање и декодирање за компримирај-и-проследи

$\hat{y}_2^n(k_j|s_{j-1})$, $k_j \in [1 : 2^{n\hat{R}_2}]$, секоја во согласност со $\prod_{i=1}^n p_{\hat{Y}_2|X_2}(\hat{y}_{2i}|x_{2i}(s_{i-1}))$. На овој начин се дефинира кодната книга:

$$C_j = \left\{ (x_1^n(w_j), x_2^n(s_{j-1}), \hat{y}_2^n(k_j|s_{j-1})) : w_j \in [1 : 2^{nR}], s_{j-1} \in [1 : 2^{nR_2}], k_j \in [1 : 2^{n\hat{R}_2}] \right\} \quad (2.74)$$

Се партиционира множеството $[1 : 2^{n\hat{R}_2}]$ во 2^{nR_2} кошнички со еднаква големина $B(s_j)$, $s_j \in [1 : 2^{nR_2}]$. Кодните книги и распоредот по кошнички се разоткриваат на сите јазли.

Кодирање во изворот: Да земеме дека $w_j \in [1 : 2^{nR}]$ е пораката која треба да се испрати во блокот j . Кодерот го испраќа $x_1^n(w_j)$ од кодната книга C_j , каде $w_b = 1$ по конвенција. *Кодирање во релето:* По конвенција, да земеме дека $s_0 = 1$. На крај од блокот j , релето го наоѓа индексот k_j така што $(y_2(j), \hat{y}_2(k_j|s_{j-1}), x_2^n(s_{j-1})) \in A_\epsilon^{(n)}$. Ако има повеќе од еден таков индекс, тоа праќа еден од нив по униформна случајна распределба. Доколку не постои таков индекс, тоа избира индекс случајно по униформна распределба од множеството $[1 : 2^{n\hat{R}_2}]$. Во блокот $j + 1$ релето го испраќа $x_2^n(s_j)$, каде s_j индексот на кошничката за k_j .

Декодирање во дестинацијата: Да земеме дека $\epsilon > \epsilon'$. На крај од блокот $j + 1$, доколку $(x_2^n(\hat{s}_j), y_3^n(j + 1)) \in A_{\epsilon'}^{(n)}$ дестинацијата успешно го реконструира единствениот индекс \hat{s}_j кој ќе се користи за декодирање на пораката во наредниот блок. Потоа, таа ја наоѓа единствената порака \hat{w}_j така што $(x_1^n(\hat{w}_j), x_2^n(\hat{s}_{j-1}), \hat{y}_2^n(\hat{k}_j|\hat{s}_{j-1}), y_3^n(j)) \in A_{\epsilon'}^{(n)}$ и $\hat{k}_j \in B(\hat{s}_j)$.

Анализа на веројатноста за грешка: Ја анализираме веројатноста за грешка при декодирање за пораката W_j усреднета по сите кодни книги. Без да се загуби општоста претпоставуваме дека $W_j = 1$ и дека S_{j-1}, S_j, K_j ги означуваат индексите избрани од релето во блокот j . Декодерот ќе згреши само доколку се случи еден или повеќе од следните настани:

$$\tilde{E}(j) = \left\{ (X_2^n(\hat{S}_{j-1}), \hat{Y}_2^n(k_j|\hat{S}_{j-1}), Y_2^n(j)) \notin A_\epsilon^{(n)} \text{ за сите } k_j \in [1 : 2^{n\hat{R}_2}] \right\} \quad (2.75)$$

$$E_1(j-1) = \left\{ \hat{S}_{j-1} \neq S_{j-1} \right\} \quad (2.76)$$

$$E_1(j) = \left\{ \hat{S}_j \neq S_j \right\}, \quad (2.77)$$

$$E_2(j) = \left\{ (X_1^n(1), X_2^n(\hat{S}_{j-1}), \hat{Y}_2^n(K_j|\hat{S}_{j-1}), Y_3^n(j)) \notin A_\epsilon^{(n)} \right\} \quad (2.78)$$

$$E_3(j) = \left\{ (X_1^n(w_j), X_2^n(\hat{S}_{j-1}), \hat{Y}_2^n(K_j|\hat{S}_{j-1}), Y_3^n(j)) \in A_\epsilon^{(n)} \text{ за некое } w_j \neq 1 \right\} \quad (2.79)$$

$$E_4(j) = \left\{ (X_1^n(w_j), X_2^n(\hat{S}_{j-1}), \hat{Y}_2^n(\hat{k}_j|\hat{S}_{j-1}), Y_3^n(j)) \in A_\epsilon^{(n)} \right\}$$

$$\text{за некое } \hat{k}_j \in B(\hat{S}_j), \hat{k}_j \neq K_j, w_j \neq 1 \} \quad (2.80)$$

На тој начин веројатноста за грешка е ограничена од горе со:

$$\begin{aligned} P(E(j)) &= P\{\hat{W}_j \neq 1\} \leq P(\tilde{E}(j)) + P(E_1(j-1)) + P(E_1(j)) + \\ &+ P(E_2(j) \cap \tilde{E}^c(j) \cap E_1^c(j-1)) + E_3(j) + P(E_4(j) \cap E_1^c(j-1) \cap E_1^c(j)). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Од независноста на кодните книги и од лемата за покривање [14, ch.(3.7)], првиот член $P(\tilde{E}(j))$ тежнее кон 0 доколку $n \rightarrow \infty$ и $\tilde{R}_2 > I(\hat{Y}_2; Y_2 | X_2) + \delta(\epsilon')$. Ако се следи анализата за веројатноста за грешка во каскадниот релеен канал, следните два члена $P(E_1(j-1)) = P\{\hat{S}_{j-1} \neq S_{j-1}\}$ и $P(E_1(j)) = P\{\hat{S}_j \neq S_j\}$ тежнеат кон нула доколку $n \rightarrow \infty$ и $R_2 < I(X_2; Y_3) - \delta(\epsilon)$. Четвртиот член е ограничен со:

$$\begin{aligned} &P(E_2(j) \cap \tilde{E}^c(j) \cap E_1^c(j-1)) \leq \\ &\leq P\left\{ \left(X_1^n(1), X_2^n(S_{j-1}), \hat{Y}_2^n(K_j | S_{j-1}), Y_3^n(j) \neq A_\epsilon^{(n)} | \tilde{E}^c(j) \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.82)$$

кој, од независноста на кодните книги и лемата за условна типичност [14, ch.(2.5)], тежнеат кон нула доколку $n \rightarrow \infty$. Од истата независност и од лемата за пакување [14, Lemma 3.1], $P(E_3(j))$ тежнее кон нула доколку $n \rightarrow \infty$ и $R \leq I(X_1; X_2, Y_2, Y_3) + \delta(\epsilon) = I(X_1; \hat{Y}_2, Y_3 | X_2) + \delta(\epsilon)$. Со следење на истите чекори од [14, lem.(11.1)] последниот член е ограничен од горе со:

$$\begin{aligned} &P(E_4(j) \cap E_1^c(j-1) \cap E_1^c(j)) \leq \\ &\leq P\left\{ X_1^n(w_j), X_2^n(S_{j-1}), \hat{Y}_2^n(\hat{k}_j | S_{j-1}), Y_3^n(j) \in A_\epsilon^{(n)} \right. \\ &\quad \left. \text{за некое } \hat{k}_j \in B(\hat{S}_j), \hat{k}_j \neq K_j, w_j \neq 1 \right\} \leq \\ &P\left\{ X_1^n(w_j), X_2^n(S_{j-1}), \hat{Y}_2^n(\hat{k}_j | S_{j-1}), Y_3^n(j) \in A_\epsilon^{(n)} \right. \\ &\quad \left. \text{за некое } \hat{k}_j \in B(1), w_j \neq 1 \right\} \end{aligned} \quad (2.83)$$

кој, од независноста на кодните книги, лемата за здружена типичност [14, ch.(2.5.1)] и границата за унија на настани, тежнее кон 0 $n \rightarrow \infty$ доколку $R + \tilde{R}_2 - R_2 < I(X_1; Y_3 | X_2) + I(\hat{Y}_2; X_1, Y_3 | X_2) - \delta(\epsilon)$. Со комбинирање на границите и елиминирање на R_2 и \tilde{R}_2 , се покажува дека $P(\hat{W}_j \neq W_j)$ тежнее кон нула доколку $n \rightarrow \infty$ за секое $j \in [1 : b-1]$ доколку:

$$\begin{aligned} &R \leq R_2 - \tilde{R}_2 + I(X_1; Y_3 | X_2) + I(\hat{Y}_2; X_1, Y_3 | X_2) - \delta(\epsilon) \leq \\ &\leq I(X_2; Y_3) - \delta(\epsilon) - I(\hat{Y}_2; Y_2 | X_2) - \delta(\epsilon') + I(X_1; Y_3 | X_2) + I(\hat{Y}_2; X_1, Y_3 | X_2) - \delta(\epsilon) = \\ &= \underline{I(X_2; Y_3)} - I(\hat{Y}_2; Y_2 | X_2) + \underline{I(X_1; Y_3 | X_2)} + I(\hat{Y}_2; X_1, Y_3 | X_2) - 2\delta(\epsilon) - \delta(\epsilon') = \\ &= I(X_1 X_2; Y_3) - I(\hat{Y}_2; Y_2 | X_2) + I(\hat{Y}_2; X_1, Y_3 | X_2) + \delta'(\epsilon) \end{aligned} \quad (2.84)$$

Со оглед на тоа што $\hat{Y}_2 \rightarrow (X_2 Y_2) \rightarrow (X_1 Y_3)$ следи:

$$I(\hat{Y}_2; X_1 Y_2 Y_3 | X_2) = H(\hat{Y}_2 | X_2) - H(\hat{Y}_2 | X_2 Y_2) = I(\hat{Y}_2; Y_2 | X_2) \quad (2.85)$$

Ако се замени (2.85) во (2.84) ќе се добие:

$$R \leq I(X_1, X_2; Y_3) + I(\hat{Y}_2; X_1 Y_3 | X_2) - I(\hat{Y}_2; X_1 Y_2 Y_3 | X_2) - \delta'(\epsilon) \quad (2.86)$$

Вторите два члена од (2.86) можат да се сведат на:

$$\begin{aligned} & I(\hat{Y}_2; X_1 Y_3 | X_2) - I(\hat{Y}_2; X_1 Y_2 Y_3 | X_2) = \\ & = \cancel{I(\hat{Y}_2; X_1 Y_3 | X_2)} - \cancel{I(\hat{Y}_2; X_1 Y_3 | X_2)} - I(\hat{Y}_2; Y_2 | X_1 X_2 Y_3) = -I(\hat{Y}_2; Y_2 | X_1 X_2 Y_3) \end{aligned} \quad (2.87)$$

Ако (2.87) се замени во (2.86) се добива:

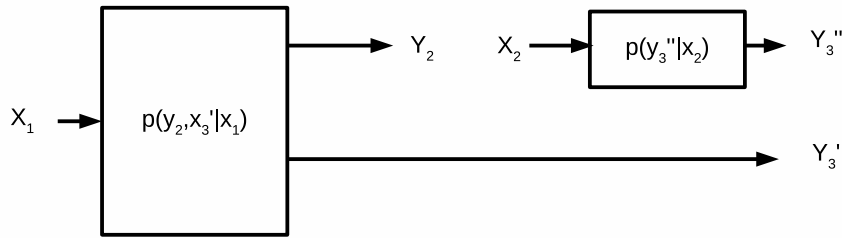
$$R \leq I(X_1 X_2; Y_3) - I(\hat{Y}_2; Y_2 | X_1 X_2 Y_3) - \delta'(\epsilon) \quad (2.88)$$

Со ова се комплетира доказот на долната граница на компримирај-и-проследи.

Забелешка 2.1. Постојат неколку други кодни методи кои ја достигнуваат долната граница за компримирај-и-проследи, на пример во [14, ch.(18.3)] е опишана методата за бучно мрежно кодирање (анг. NNC- Noisy Network Coding).

Релеен канал со ортогонални приемни компоненти:

DMRC со ортогонални приемни компоненти е прикажан на слика 2.5



Слика 2.5: Релеен канал со ортогонални приемни компоненти

Кај овој модел $Y_3 = (Y_3', Y_3'')$ и $p(y_2, y_3 | x_1 x_2) = p(y_3', y_2 | x_1) \cdot p(y_3'' | x_2)$, со што се раздвојуваат дифузниот канал од изворот до релето и дестинацијата од директниот канал од релето до дестинацијата. Капацитетот на DMRC со ортогонални компоненти не е познат во општа форма. CUB во теорема 2.1 се сведува на:

$$C \leq \max_{p(x_1)p(x_2)} \min \{I(X_1; Y_3') + I(X_2; Y_3''), I(X_1; Y_2, Y_3')\} \quad (2.89)$$

Доказ: Ако

$$p(y_2, y_3', y_3'' | x_1 x_2) = p(y_3'' | x_1 x_2 y_2 y_3') \cdot p(y_3', y_2 | x_1 x_2) \quad (2.90)$$

се спореди со условот:

$$p(y_2, y_3 | x_1 x_2) = p(y_2, y_3', y_3'' | x_1 x_2) = p(y_3'' | x_2) \cdot p(y_3', y_2 | x_1) \quad (2.91)$$

може да се заклучи дека y_3'' зависи само од x_2 т.е. не зависи од x_1, y_2, y_3' (y_2 не содржи повеќе информација за y_3'' од онаа што веќе е содржана во x_2), и y_3', y_2 зависат само од x_1

т.е. не зависи од x_2 и y_3'' . Првиот член од изразот за минимизација во (2.89) се добива од CUB (теорема 2.1) на следниов начин:

$$I(X_1X_2; Y_3) = I(X_1X_2; Y_3', Y_3'') = I(X_1X_2; Y_3') + I(X_1X_2; Y_3''|Y_3') = \quad (2.92)$$

$$= H(Y_3') - H(Y_3'|X_1X_2) + H(Y_3''|Y_3') - H(Y_3''|X_1X_2Y_3') = \quad (2.93)$$

$$= H(Y_3') - H(Y_3'|X_1) + H(Y_3'') - H(Y_3''|X_2) = I(X_1; Y_3') + I(X_2; Y_3'') \quad (2.94)$$

Вториот член од изразот за минимизација во (2.89) се добива од CUB на следниов начин:

$$I(X_1; Y_2Y_3'Y_3''|X_2) = I(X_1; Y_2Y_3'|X_2) + I(X_1; Y_3''|Y_2, Y_3', X_2) = \quad (2.95)$$

$$= H(Y_2, Y_3'|X_2) - H(Y_2, Y_3'|X_2X_1) + H(Y_3''|Y_2Y_3'X_2) - H(Y_3''|Y_2Y_3'X_1X_2) = \quad (2.96)$$

$$= H(Y_2, Y_3') - H(Y_2, Y_3'|X_1) + \cancel{H(Y_3''|X_2)} - \cancel{H(Y_3''|X_2)} = I(X_1; Y_2Y_3') \quad (2.97)$$

Да земеме дека $C_0 = \max_{p(x_2)} I(X_2, Y_3'')$ го означува капацитетот на каналот од релето до дестинацијата. Тогаш CUB за овој модел на RC може да се изрази како:

$$C \leq \max_{p(x_1)} \min \{I(X_1; Y_3') + C_0, I(X_1; Y_2, Y_3')\} \quad (2.98)$$

За споредба, долната граница за компримирај-и-проследи (види теорема 2.4) за овој RC се сведува на:

$$C \geq \max_{p(x_1)p(\hat{y}_2|y_2)} \min \left\{ I(X_1; Y_3') + C_0 - I(Y_2; \hat{Y}_2|X_1Y_3'), I(X_1; \hat{Y}_2, Y_3') \right\} \quad (2.99)$$

Доказ на изразот (2.99):

Вториот член од изразот за минимизација во (2.73) се сведува на:

$$I(X_1; \hat{Y}_2, Y_3|X_2) = I(X_1; \hat{Y}_2, Y_3'Y_3''|X_2) = I(X_1; \hat{Y}_2, Y_3'|X_2) + I(X_1; Y_3''|X_2\hat{Y}_2, Y_3') = \quad (2.100)$$

$$= I(X_1; \hat{Y}_2, Y_3'|X_2) + H(Y_3''|X_2\hat{Y}_2, Y_3') - H(Y_3''|X_1X_2\hat{Y}_2, Y_3') = \quad (2.101)$$

$$= I(X_1; \hat{Y}_2, Y_3'|X_2) + \cancel{H(Y_3''|X_2\hat{Y}_2, Y_3')} - \cancel{H(Y_3''|X_2\hat{Y}_2, Y_3')} = \quad (2.102)$$

$$= I(X_1; \hat{Y}_2, Y_3'|X_2) = H(\hat{Y}_2Y_3'|X_2) - H(\hat{Y}_2, Y_3'|X_2X_1) = \quad (2.103)$$

$$= H(\hat{Y}_2Y_3') - H(\hat{Y}_2, Y_3'|X_1) = I(X_1; \hat{Y}_2Y_3') \quad (2.104)$$

Првата здружена информација од разликата од првиот член од изразот за минимизација во (2.73) се сведува на:

$$I(X_1X_2; Y_3) = I(X_1; Y_3') + I(X_2; Y_3'') = I(X_1; Y_3') + C_0 \quad (2.105)$$

Втората здружена информација од разликата од првиот член од изразот за минимизација во (2.73) се сведува на:

$$I(Y_2; \hat{Y}_2|X_1X_2Y_3) = I(Y_2Y_3; \hat{Y}_2|X_1X_2) - I(Y_3; \hat{Y}_2|X_1X_2) = \quad (2.106)$$

$$= H(Y_2Y_3|X_1X_2) - H(Y_2Y_3|\hat{Y}_2X_1X_2) - I(Y_3'Y_3''; \hat{Y}_2|X_1X_2) = \quad (2.107)$$

$$= H(Y_2Y_3'Y_3''|X_1X_2) - H(Y_2Y_3'Y_3''|\hat{Y}_2X_1X_2) -$$

$$- I(Y'_3; \hat{Y}_2 | X_1 X_2) - I(Y''_3; \hat{Y}_2 | X_1 X_2 Y'_3) = \quad (2.108)$$

$$= H(Y_2 Y'_3 | X_1 X_2) + H(Y''_3 | X_1 X_2 Y_2 Y'_3) - H(Y_2 Y'_3 | \hat{Y}_2 X_1 X_2) - H(Y''_3 | \hat{Y}_2 X_1 X_2 Y_2 Y'_3) - \quad (2.109)$$

$$- H(Y'_3 | X_1 X_2) + H(Y'_3 | \hat{Y}_2 X_1 X_2) - H(Y''_3 | X_1 X_2 Y'_3) + H(Y''_3 | \hat{Y}_2 X_1 X_2 Y'_3) = \quad (2.110)$$

$$= H(Y_2 Y'_3 | X_1) + \cancel{H(Y''_3 | X_2)} - H(Y_2 Y'_3 | \hat{Y}_2 X_1) - \cancel{H(Y''_3 | \hat{Y}_2 X_2)} - \quad (2.111)$$

$$- H(Y'_3 | X_1) + H(Y'_3 | \hat{Y}_2 X_1) - \cancel{H(Y''_3 | X_2)} + \cancel{H(Y''_3 | \hat{Y}_2 X_2)} = \quad (2.112)$$

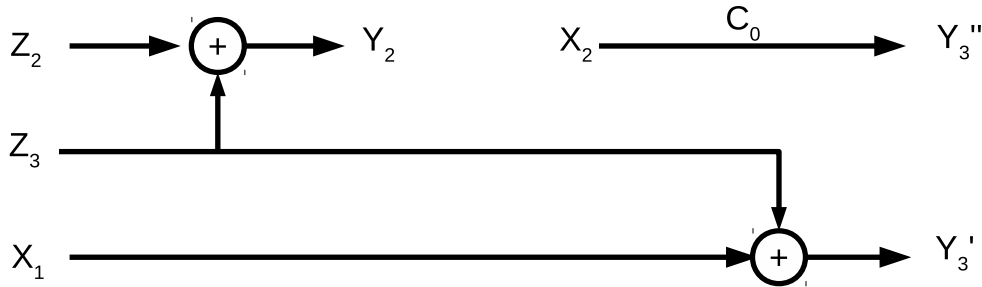
$$= I(\hat{Y}_2; Y_2 Y'_3 | X_1) - I(\hat{Y}_2; Y'_3 | X_1) = \quad (2.113)$$

$$= \cancel{I(\hat{Y}_2; Y''_3 | X_1)} + I(\hat{Y}_2; Y_2 | X_1 Y'_3) - \cancel{I(\hat{Y}_2; Y''_3 | X_1)} = I(\hat{Y}_2; Y_2 | X_1 Y'_3) \quad (2.114)$$

Овие две граници се поклопуваат за детерминистички RC со ортогонални приемни компоненти каде Y_2 е функција од (X_1, Y'_3) . Доказот следи со земање дека $\hat{Y}_2 = Y_2$ во долната граница за компримирај-и-проследи (2.99) и со користење на фактот дека $H(Y_2 | X_1 Y'_3) = 0$. Треба да се забележи дека капацитетот зависи од $p(y''_3 | x_2)$ само преку C_0 .

Следниов пример покажува дека CUB не е достиглива во општ случај.

Пример 2.2. Релеен канал со сума по модул 2.



Слика 2.6: Релеен канал со сума по модул 2

Да го разгледуваме DMRC со ортогонални приемни компоненти прикажан на слика 2.6, каде:

$$Y'_3 = X_1 \oplus Z_3, \quad Y_2 = Z_2 \oplus Z_3 \quad (2.115)$$

и $Z_2 \sim \text{Bern}(p)^1$, $Z_3 \sim \text{Bern}(1/2)$ се независни една од друга и од X_1 .

Тврдење 2.1.

За $C_0 \in [0, 1]$, капацитетот на овој RC е [14, exp.(16.2)]:

$$C = 1 - H(p * H^{-1}(1 - C_0)) \quad (2.116)$$

каде $H^{-1}(v) \in [0, 1/2]$ е инверзна функција од бинарната ентрописка функција.

¹Каде $\text{Bern}(p)$ е Бернулиева PMF (види 8.2).

Доказ: Доказот за достигливост следи ако се земе $\hat{Y}_2 = Y_2 \oplus V$ каде $V \sim \text{Bern}(\alpha)$ е случајна променлива независна од (X_1, Z_2, Z_3) и $\alpha = H^{-1}(1 - C_0)$, во долната граница за CF (2.99) (види глава 8.2). За доказ на реципроцитетот се зема во предвид:

$$nR \leq I(X_1^n; Y_3^m, Y_3^{\prime m}) + n\epsilon_n \quad (2.117)$$

Со оглед на тоа што X_1^n не зависи од $(Z_2^n, Z_3^n, X_2^n, Y_3^{\prime m})$ за здружената информација во (2.117) се добива:

$$I(X_1^n; Y_3^m, Y_3^{\prime m}) = \overbrace{I(X_1^n; Y_3^{\prime m})}^0 + I(X_1^n; Y_3^m | Y_3^{\prime m}) = I(X_1^n; Y_3^m | Y_3^{\prime m}) \quad (2.118)$$

Ако (2.118) се замени во (2.117) се добива:

$$nR \leq I(X_1^n; Y_3^m | Y_3^{\prime m}) + n\epsilon_n \quad (2.119)$$

За здружената информација во (2.119) се добива:

$$\begin{aligned} I(X_1^n; Y_3^m | Y_3^{\prime m}) &= H(Y_3^m | Y_3^{\prime m}) - H(Y_3^m | Y_3^{\prime m}, X_1^n) = \\ &= \sum_{i=1}^n H(Y_{3i}' | Y_3^{\prime m}, Y_3^{i-1}) - H(Y_3^m | Y_3^{\prime m}, X_1^n) \stackrel{(a)}{\leq} \sum_{i=1}^n H(Y_{3i}' | Y_3^{i-1}) - H(Y_3^m | Y_3^{\prime m}, X_1^n) \leq \\ &\stackrel{(b)}{\leq} \sum_{i=1}^n H(Y_{3i}') - H(Y_3^m | Y_3^{\prime m}, X_1^n) \leq n - H(Y_3^m | Y_3^{\prime m}, X_1^n) \end{aligned} \quad (2.120)$$

Каде (а) следи од фактот дека условеноста ја намалува ентропијата [9, th.(2.6.5)], а (b) од претпоставката дека се работи за DMRC. Ако (2.120) и (2.115) се заменат во (2.119) се добива:

$$\begin{aligned} nR &\leq n - H(Y_3^m | X_1^n, Y_3^{\prime m}) + n\epsilon_n = n - H(X_1^n + Z_3^n | Y_3^{\prime m}, X_1^n) + n\epsilon_n = \\ &= n - H(Z_3^n | Y_3^{\prime m}) + n\epsilon_n = n - H(Z_3^n | Y_3^{\prime m}) + n\epsilon_n \end{aligned} \quad (2.121)$$

Доколку во (2.121) се употреби векторската форма на Лемата на Г-ѓа Гереберс [14, ch.(2.1)] се добива:

$$n \cdot R \leq n - n \cdot H(p * H^{-1}(H(Y_2^n | Y_3^{\prime m}) / n)) + n\epsilon_n, \quad (2.122)$$

Ако се има во предвид дека $Y_2 \rightarrow X_2 \rightarrow Y_3^{\prime m}$ и се употреби нееднаквоста за процесирање на податоци [9, th.(2.8.1)], аргументот во ентрописката функција во (2.122) може да се сведе на:

$$\begin{aligned} nC_0 &\geq I(X_2^n; Y_3^{\prime m}) \geq I(Y_2^n, Y_3^{\prime m}) = H(Y_2^n) - H(Y_2^n | Y_3^{\prime m}) = n - H(Y_2^n | Y_3^{\prime m}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{H(Y_2^n | Y_3^{\prime m})}{n} \geq 1 - C_0 \end{aligned} \quad (2.123)$$

Ако се замени (2.123) во (2.122) се добива:

$$R \leq 1 - H(p * H^{-1}(1 - C_0)) + \epsilon_n \quad (2.124)$$

Треба да се забележи дека CUB за овој канал (2.98) се сведува на $\min\{1 - H(p), C_0\}$ (види глава 8.3), што е строго поголема вредност од капацитетот (2.116) доколку $p \neq 1/2$ и $1 - H(p) \leq C_0^2$. Оттука следи дека во општ случај CUB не е многу прецизна.

²Лесно се покажува дека за било кое $\alpha \in [0, 1]$ $H(\alpha * p) \geq H(p)$, а оттука следи дека $1 - H(p * H^{-1}(1 - C_0)) \leq 1 - H(p)$. Еднаквоста се достигнува за $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. Значи за овој канал најдобра поточна горна граница која е помала од CUB, со што се докажува дека CUB за одредени RC не е многу точна.

Забелешка 2.2.

Долната граница за методата компримирај-и-проследи може еквивалентно да се карактеризира како:

$$C \geq \max \left\{ I \left(X_1; \hat{Y}_2, Y_3 | X_2 \right) \right\} \quad (2.125)$$

каде максимумот е по сите условни веројатности $p(x_1)p(x_2)p(\hat{y}_2|x_2y_2)$ така што:

$$I(X_2; Y_3) \geq I(Y_2; \hat{Y}_2 | X_2 Y_3) \quad (2.126)$$

Еквивалентноста на теорема 2.4 со карактеризацијата во забелешката 2.2 е докажана во [14, app.(16C)].

2.4 Гаусов релеен канал

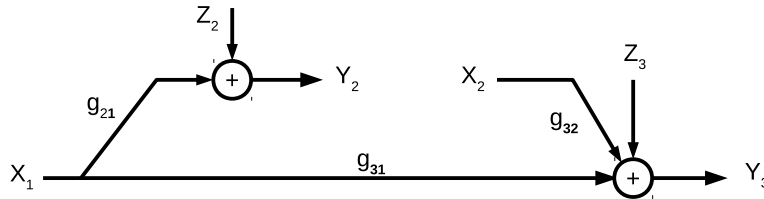
2.4.1 Горна пресечна граница и капацитет за DF, DT и каскаден Гаусов RC

Да го разгледуваме Гаусовиот RC прикажан на слика 2.7, кој претставува едноставен модел за безжични точка-точка комуникации преку реле. Излезите на каналот кои кореспондираат на влезовите X_1 и X_2 се:

$$Y_2 = g_{21}X_1 + Z_2$$

$$Y_3 = g_{31}X_1 + g_{32}X_2 + Z_3,$$

каде g_{21}, g_{31} , и g_{32} се каналните коефициенти, и $Z_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и $Z_3 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ се независните компоненти на шумот. Да претпоставиме дека P е ограничувањето на средната моќност за X_1 и X_2 . Бидејќи релето може да го испраќа X_2 и прима Y_2 во исто време, овој модел понекогаш се нарекува дуплексен Гаусов RC, за разлика од полу-дуплексниот модел кој ќе биде разгледуван во глава 2.4.3.



Слика 2.7: Гаусов Релеен Канал

Односот сигнал-шум за директниот канал ќе го обележиме со $\gamma_{31} = g_{31}^2 P$, односот сигнал-шум на каналот од изворот до дестинацијата со $\gamma_{21} = g_{21}^2 P$, и односот сигнал-шум од релето до дестинацијата со $\gamma_{32} = g_{32}^2 P$. Треба да се забележи дека во овој модел, релејниот канал не е деградиран и капацитетот не е познат за произволен избор на $\gamma_{21}, \gamma_{31}, \gamma_{32} > 0$.

За ваквиот канал ќе ги пресметаме горните и долните граници за капацитетот кои беа анализирани во претходните глави.

Горна пресечна граница (CUB): Доказот на CUB дадена во теоремата 2.1 се однесува на произволна азбука од кодни знаци. Со отпимизација на границата за дадено

ограничување на моќност, се покажува дека се постигнува доколку (X_1, X_2) ја следат здружена Гаусова функција на густина на веројатност [9, eq.(8.35)]:

$$C \leq \max_{0 \leq \rho \leq 1} \min \{C(\gamma_{31} + \gamma_{32} + 2\rho\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}}), C((1 - \rho^2)(\gamma_{31} + \gamma_{21}))\} = \quad (2.127)$$

$$= \begin{cases} C \left(\left(\sqrt{\gamma_{21}\gamma_{32}} + \sqrt{\gamma_{31}(\gamma_{31} + \gamma_{21} - \gamma_{32})} \right)^2 / (\gamma_{31} + \gamma_{21}) \right) & \text{доколку } \gamma_{21} \geq \gamma_{32} \\ C(\gamma_{31} + \gamma_{21}) & \text{во спротивно} \end{cases} \quad (2.128)$$

каде $\rho = E(X_1 X_2) / \sqrt{E(X_1^2) \cdot E(X_2^2)}$. Доказот на изразот (2.127) е даден во глава 2.130 и [14, app.(16A)].

Доколку се изврши минимизацијата во изразот (2.127) ќе се добие изразот (2.128). Се работи за две непрекинати и конкавни функции кои се сечат во една пресечна точка. До пресечната точка првиот член од парот е помал, а после пресечната точка помал е вториот член. Имајќи го тоа во предвид следи дека пресечната точка всушност претставува максимум на резултантаната функција која е минимум од двете функции. Пресечната точка се наоѓа доколку се реши равенството (2.129)

$$1 + \gamma_{31} + \gamma_{32} + 2\rho\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} - 1 - (1 - \rho^2)(\gamma_{31} + \gamma_{21}) = 0 \quad (2.129)$$

Пресечната точка е:

$$\rho_0 = \frac{-\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} + \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{21} - \gamma_{32}\gamma_{21} + \gamma_{21}^2}}{\gamma_{31} + \gamma_{21}}. \quad (2.130)$$

Доколку пресечната точка (2.130) се замени во, на пример, првиот член од изразот за минимизација во (2.127) ќе се добие

$$\begin{aligned} f(\rho_0) &= 1 + \gamma_{31} + \gamma_{32} + 2\rho_0 \cdot \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} = \\ &= 1 + \gamma_{31} + \gamma_{32} + 2 \frac{\left(-\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} + \sqrt{\gamma_{21}\gamma_{31} - \gamma_{32}\gamma_{21} + \gamma_{21}^2} \right) \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}}}{\gamma_{31} + \gamma_{21}} = \end{aligned} \quad (2.131)$$

$$= 1 + \gamma_{31} + \gamma_{32} + 2 \cdot \frac{\overbrace{\left(-\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} + \sqrt{\gamma_{21}(\gamma_{31} - \gamma_{32} + \gamma_{21})} \right)}^{(e)} \cdot \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}}}{\gamma_{31} + \gamma_{21}} = \quad (2.132)$$

$$= 1 + \frac{(\gamma_{31} + \gamma_{32})(\gamma_{31} + \gamma_{21}) + 2 \cdot \left(-\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} + \sqrt{\gamma_{21}(\gamma_{31} - \gamma_{32} + \gamma_{21})} \right) \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}}}{\gamma_{31} + \gamma_{21}} = \quad (2.133)$$

$$= 1 + \frac{\gamma_{31}^2 + \gamma_{21}\gamma_{31} + \gamma_{21}\gamma_{32} - \gamma_{31}\gamma_{32} + 2 \cdot \sqrt{\gamma_{21}\gamma_{31}\gamma_{32}(\gamma_{31} - \gamma_{32} + \gamma_{21})}}{\gamma_{31} + \gamma_{21}} = \quad (2.134)$$

$$= 1 + \frac{\left(\sqrt{\gamma_{21}\gamma_{32}} + \sqrt{\gamma_{31}(\gamma_{31} + \gamma_{21} - \gamma_{32})} \right)^2}{\gamma_{31} + \gamma_{21}} \quad (2.135)$$

Со оглед на тоа што бараме горна граница, а изразот (e) може да биде поголем или помал од нула во зависност од γ_{21}, γ_{31} и γ_{32} може да се разликуваат два случаи:

- Доколку $\gamma_{21} \geq \gamma_{32}$ изразот (e) е поголем од нула и ја дефинира горната граница:

$$\left(-\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} + \sqrt{\gamma_{21}(\gamma_{31} - \gamma_{32} + \gamma_{21})} \right) \cdot \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} = \quad (2.136)$$

$$= \left(-\gamma_{31}\gamma_{32} + \sqrt{\gamma_{21}\gamma_{31}\gamma_{32}(\gamma_{31} + \gamma_{21} - \gamma_{32})} \right) \geq \quad (2.137)$$

$$\geq \left(-\gamma_{31}\gamma_{32} + \sqrt{\gamma_{21}\gamma_{31}\gamma_{32}(\gamma_{31} + \gamma_{21} - \gamma_{21})} \right) = \quad (2.138)$$

$$= (-\gamma_{31}\gamma_{32} + \gamma_{31}\sqrt{\gamma_{21}\gamma_{32}}) \geq (-\gamma_{31}\gamma_{32} + \gamma_{31}\sqrt{\gamma_{32}\gamma_{32}}) = (-\gamma_{31}\gamma_{32} + \gamma_{31}\gamma_{32}) = 0 \quad (2.139)$$

- Доколку $\gamma_{21} < \gamma_{32}$ изразот (е) е помал од нула и не влијае врз горната граница

$$\left(-\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} + \sqrt{\gamma_{21}(\gamma_{31} - \gamma_{32} + \gamma_{21})} \right) \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} = \left(-\gamma_{31}\gamma_{32} + \sqrt{\gamma_{21}\gamma_{31}\gamma_{32}(\gamma_{31} + \gamma_{21} - \gamma_{32})} \right) \quad (2.140)$$

$$< \left(-\gamma_{31}\gamma_{32} + \sqrt{\gamma_{21}\gamma_{31}\gamma_{32}(\gamma_{31} + \gamma_{21} - \gamma_{21})} \right) = \quad (2.141)$$

$$(-\gamma_{31}\gamma_{32} + \gamma_{31}\sqrt{\gamma_{21}\gamma_{32}}) < (-\gamma_{31}\gamma_{32} + \gamma_{31}\sqrt{\gamma_{32}\gamma_{32}}) = (-\gamma_{31}\gamma_{32} + \gamma_{31}\gamma_{32}) = 0 \quad (2.142)$$

Со ова се докажува изразот (2.129).

Ако се анализира изразот (2.128), може да се забележи дека со зголемување на ρ се зголемува првиот член од парот за минимизацијата т.е. $I(X_1, X_2; Y)$ со помагање на преносот во пресекот кој одговара на канал со повеќекратен пристап, но тоа го ограничува преносот на информација во пресекот кој одговара на дифузниот канал. Со други зборови, со воведувањето на корелација помеѓу сигналот на влезот од каналот и сигналот на излезот од релето ја зголемуваме брзината за пренесување на информации во пресекот од релејниот канал кој одговара на каналот со повеќекратен пристап. Сепак тоа има и свој недостаток, т.е. тоа подразбира помала брзина на пренос на информациите во пресекот од релејниот канал кој одговара на дифузниот канал. Тоа може да се интерпретира како релето да има одредено предзнаење за дел од испраќаната порака од изворот што се должи на корелацијата на X_1 и X_2 .

Долна граница на капацитет за директен пренос: За директен пренос долната граница во (2.35) е:

$$C \geq C(\gamma_{31}) \quad (2.143)$$

Доказ:

$$C \geq \max_{p(x_1), x_2} I(X_1; Y_3 | X_2 = x_2) \quad (2.144)$$

$$Y_3 = g_{31}X_1 + g_{21}X_2 + Z_3 \quad (2.145)$$

$$I(X_1; Y_3 | X_2 = x_2) = h(Y_3 | X_2 = x_2) - h(Y_3 | X_1 X_2 = x_2) = \quad (2.146)$$

$$= h(g_{31}X_1 + Z_3) - h(Z_3) \leq \quad (2.147)$$

$$\leq \frac{1}{2} \log_2(2\pi e) \left(\overbrace{g_{31}^2 P}^{\gamma_{31}} + 1 \right) - \frac{1}{2} \log(2\pi e) = \frac{1}{2} \log_2(\gamma_{31} + 1) = C(\gamma_{31}) \quad (2.148)$$

Долна граница на капацитет за каскаден релеен канал: Да ја разгледуваме долната граница на каскадниот релеен канал дадена во (2.36) за дадено ограничување на моќност. Во општ случај не се познати функциите на густина на веројатност на влезните симболи X_1 и X_2 кои ја оптимизираат горната граница. Доколку се претпостави дека X_1 и X_2 ја следат Гаусовата PDF, се добива [14, eq.(16.5)]:

$$C \geq \min \{C(\gamma_{21}), C(\gamma_{32}/(\gamma_{31} + 1))\} \quad (2.149)$$

Доказ:

$$C \geq \max_{p(x_1)p(x_2)} \min \{I(X_2; Y_3), I(X_1; Y_2|X_2)\} \quad (2.150)$$

$$Y_3 = g_{32}X_2 + g_{31} \cdot X_1 + Z_3; \quad Y_2 = g_{21}X_1 + Z_2; \quad \gamma_{32} = g_{32}P \quad (2.151)$$

$$\begin{aligned} I(X_2; Y_3) &= h(Y_3) - h(Y_3|X_2) = \frac{1}{2} \log(2\pi e) (g_{32}^2 P + g_{31}^2 P + 1) - \frac{1}{2} \log(2\pi e) (g_{31}^2 P + 1) = \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{(g_{32}^2 P + g_{31}^2 P + 1)}{(g_{31}^2 P + 1)} = \frac{1}{2} \log \frac{(\gamma_{32} + \gamma_{31} + 1)}{(\gamma_{31} + 1)} = \\ &= \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\gamma_{32}}{\gamma_{31} + 1} \right) = C \left(\frac{\gamma_{32}}{\gamma_{31} + 1} \right) \end{aligned} \quad (2.152)$$

$$I(X_1; Y_2|X_2) = h(Y_2|X_2) - h(Y_2|X_1X_2) = \quad (2.153)$$

$$= \frac{1}{2} \log(g_{21}^2 \cdot E[X_1^2] + 1) = \frac{1}{2} \log(g_{21}^2 \cdot P + 1) = \frac{1}{2} \log(\gamma_{21} + 1) = C(\gamma_{21}) \quad (2.154)$$

Долна граница за методата декодирај-и-проследи: Со максимизација на долната граница за декодирај-и-проследи во теоремата 2.2 за дадено ограничување на моќност се добива [14, eq.(16.6)]:

$$C \geq \max_{0 \leq \rho \leq 1} \min \{C(\gamma_{31} + \gamma_{32} + 2\rho\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}}), C((1 - \rho^2) \cdot \gamma_{21})\} = \quad (2.155)$$

$$= \begin{cases} C \left(\left(\sqrt{\gamma_{31}(\gamma_{21} - \gamma_{32})} + \sqrt{\gamma_{32}(\gamma_{21} - \gamma_{31})} \right)^2 / \gamma_{21} \right) & \text{доколку } \gamma_{21} \geq \gamma_{31} + \gamma_{32} \\ C(\gamma_{21}) & \text{во спротивно} \end{cases} \quad (2.156)$$

Доказ:

$$C \geq \max_{p(x_1x_2)} \min \{I(X_1X_2; Y_3), I(X_1; Y_2|X_2)\} \quad (2.157)$$

$$Y_3 = g_{31}X_1 + g_{32}X_2 + Z_3, \quad Y_2 = g_{21}X_1 + Z_2 \quad (2.158)$$

$$I(X_1; Y_2|X_2) = h(Y_2|X_2) - h(Y_2|X_1X_2) \leq \quad (2.159)$$

$$\leq \frac{1}{2} \log(2\pi e) E[\text{Var}(Y_2|X_2)] + \frac{1}{2} \log(2\pi e) = \quad (2.160)$$

$$= \frac{1}{2} \log(2\pi e) (E[\text{Var}(g_{21}X_1|X_2)] + 1) - \frac{1}{2} \log(2\pi e) = \frac{1}{2} \log(E[\text{Var}(g_{21}X_1|X_2)] + 1) \quad (2.161)$$

$$\begin{aligned} E[\text{Var}(g_{21}X_1|X_2)] &= E_{x_2} [E_{x_1} (g_{21}^2 X_1^2|X_2)] - g_{21}^2 E_{x_2} [E_{x_1}^2 [X_1|X_2]] \leq \\ &\leq g_{21}^2 E_{x_1} (X_1^2) - \frac{g_{21}^2 E_{x_1x_2}^2 [X_1X_2]}{E[X_2^2]} = \end{aligned} \quad (2.162)$$

$$= g_{21}^2 E_{x_1} (X_1^2) - \frac{g_{21}^2 E[X_1^2] \cdot E_{x_1x_2}^2 [X_1X_2]}{E[X_2^2] E[X_1^2]} = \gamma_{21} - \gamma_{21}\rho^2 = \gamma_{21} (1 - \rho^2) \quad (2.163)$$

Ако се замени (2.163) во (2.161) се добива за второто член од парот за минимизација се добива:

$$I(X_1; Y_2|X_2) = \frac{1}{2} \log(2\pi e) (1 + \gamma_{21} (1 - \rho^2)) = C(\gamma_{21} (1 - \rho^2)) \quad (2.164)$$

Првиот член од (2.155) се добива со користење на (8.30)-(8.32) (види додаток 8.4).

Тврдење 2.2.

Доколку се изврши минимизацијата во изразот (2.155) се добива изразот (2.156).

Доказ: Доказот ги следи чекорите (2.129)- (2.142) од анализата на CUB за Гаусов релеен канал. Се бара пресечната точка на двете криви од парот за минимизација во која се достигнува максимум.

$$\gamma_{31} + \gamma_{32} + 2\rho\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} - (1 - \rho^2) \cdot \gamma_{21} = 0 \quad (2.165)$$

$$\rho_0 = -\frac{\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} - \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32} - \gamma_{31}\gamma_{21} - \gamma_{21}\gamma_{32} + \gamma_{21}^2}}{\gamma_{21}} \quad (2.166)$$

Доколку пресечната точка (2.166) се замени во на пример првиот член од изразот на минимизација (2.155) ќе се добие:

$$f(\rho_0) = 1 + \gamma_{31} + \gamma_{32} - 2 \cdot \frac{\left(\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} + \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32} - \gamma_{31}\gamma_{21} - \gamma_{21}\gamma_{32} + \gamma_{21}^2}\right) \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}}}{\gamma_{21}} = \quad (2.167)$$

$$= 1 + \gamma_{31} + \gamma_{32} - \frac{2 \cdot \left(\gamma_{31}\gamma_{32} + \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}(\gamma_{31}\gamma_{32} - \gamma_{31}\gamma_{21} - \gamma_{21}\gamma_{32} + \gamma_{21}^2)}\right)}{\gamma_{21}} = \quad (2.168)$$

$$= \frac{\gamma_{21} + \gamma_{31}\gamma_{21} + \gamma_{32} \cdot \gamma_{21} - 2 \cdot \gamma_{31}\gamma_{32} + 2 \cdot \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}(\gamma_{31}\gamma_{32} - \gamma_{31}\gamma_{21} - \gamma_{21}\gamma_{32} + \gamma_{21}^2)}}{\gamma_{21}} \quad (2.169)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{31}\gamma_{32}(\gamma_{31}\gamma_{32} - \gamma_{31}\gamma_{21} - \gamma_{21}\gamma_{32} + \gamma_{21}^2) &= \gamma_{31}\gamma_{32}(\gamma_{31}(\gamma_{32} - \gamma_{21}) + \gamma_{21}(\gamma_{21} - \gamma_{32})) = \\ &= \gamma_{31}\gamma_{32}(-\gamma_{31}(\gamma_{21} - \gamma_{32}) + \gamma_{21}(\gamma_{21} - \gamma_{32})) = \gamma_{31}\gamma_{32}(\gamma_{21} - \gamma_{31})(\gamma_{21} - \gamma_{32}). \end{aligned} \quad (2.170)$$

Доколку се замени (2.170) во (2.169) се добива:

$$f(\rho_0) = 1 + \frac{\gamma_{31}\gamma_{21} + \gamma_{32} \cdot \gamma_{21} - 2 \cdot \gamma_{31}\gamma_{32} + 2 \cdot \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}(\gamma_{21} - \gamma_{31})(\gamma_{21} - \gamma_{32})}}{\gamma_{21}} \quad (2.171)$$

Броителот во (2.171) може да се прикаже во следнава форма:

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{\gamma_{31}(\gamma_{21} - \gamma_{32})} + \sqrt{\gamma_{32}(\gamma_{21} - \gamma_{31})}\right)^2 = \\ &= \gamma_{31}(\gamma_{21} - \gamma_{32}) + \gamma_{32}(\gamma_{21} - \gamma_{31}) + 2\sqrt{\gamma_{31}(\gamma_{21} - \gamma_{32}) \cdot \gamma_{32}(\gamma_{21} - \gamma_{31})} = \\ &= \gamma_{31}\gamma_{21} + \gamma_{32}\gamma_{21} - 2 \cdot \gamma_{32}\gamma_{31} + 2\sqrt{\gamma_{31} \cdot \gamma_{32} \cdot (\gamma_{21} - \gamma_{32}) \cdot (\gamma_{21} - \gamma_{31})}. \end{aligned} \quad (2.172)$$

Конечно, со замена на (2.172) во (2.171) се добива изразот 2.156. Треба да се забележи дека кога $\gamma_{21} \leq \gamma_{31}$, брзината на пренесување на податоците за декодирај-и-проследи станува помала од онаа за директен пренос $C(\gamma_{31})$.

Анализата на капацитетот за *деградиран* гаусов канал кој користи DF постапка за процесирање на податоците во релето е даден во глава 8.5.

Долна граница за некохерентен декодирај-и-проследи канал: Бидејќи имплементацијата на кохерентни комуникации е тешка во бежичните системи, може да се користи некохерентниот декодирај-и-проследи канал, каде X_1 и X_2 се независни. Во тој случај долната граница е [14, eq.(16.7)]:

$$C \geq \min \{C(\gamma_{31} + \gamma_{32}), C(\gamma_{21})\} \quad (2.173)$$

Оваа метода го користи истиот начин за генерирање на кодната книга и чекорите за кодирање како за каскадниот релеен канал, но постигнува поголема брзина на пренесување заради тоа што врши истовремено декодирање.

$$Y_3 = g_{31}X_1 + g_{32}X_2 + Z_3, \quad Y_2 = g_{21}X_1 + Z_2, \quad \gamma_{31} = g_{31}P = g_{31}E(X_1^2) \quad (2.174)$$

$$I(X_1, X_2; Y_3) = h(Y_3) - h(Y_3|X_1X_2) = h(Y_3) - \frac{1}{2} \log(2\pi e) \leq \frac{1}{2} \log(E(Y_3^2)) \quad (2.175)$$

$$\leq \frac{1}{2} \log(1 + g_{31}^2 E[X_1^2] + g_{32}^2 E[X_2^2] + 2g_{31}g_{32}E[X_1X_2]) \quad (2.176)$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot \log\left(1 + \gamma_{31} + \gamma_{32} + 2\rho E(X_1)E(X_2)\right) = \frac{1}{2} \cdot \log(1 + \gamma_{31} + \gamma_{32}) = C(\gamma_{31} + \gamma_{32}) \quad (2.177)$$

$$I(X_1; Y_2|X_2) = h(Y_2|X_2) - h(Y_2|X_1X_2) = \quad (2.178)$$

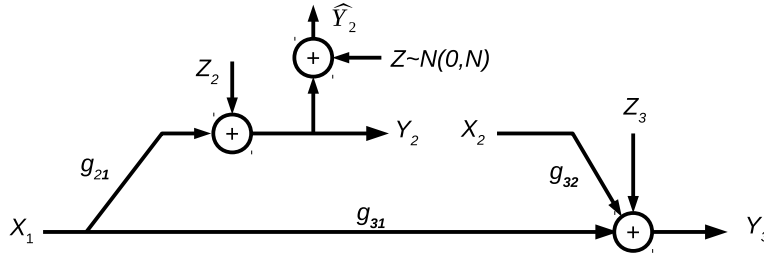
$$= h(g_{21}X_1 + Z_2|X_2) - h(g_{21}X_1 + Z_2|X_1, X_2) = \quad (2.179)$$

$$= \frac{1}{2} \log(2\pi e) (g_{21}^2 P + 1) - \frac{1}{2} \log(2\pi e) = \frac{1}{2} \log(1 + \gamma_{21}) = C(\gamma_{21}) \quad (2.180)$$

2.4.2 Гаусов канал со компримирај-и-проследи

Условната веројатност $F(x_1)F(x_2)F(\hat{y}_2|y_2, x_2)$ која ја достигнува долната граница на компримирај-и-проследи во теоремата 2.4 не е позната во општа форма за Гаусов РС. Да земеме дека $X_1 \sim \mathcal{N}(0, P)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(0, P)$, и $Z \sim \mathcal{N}(0, N)$ се здружено независни и $\hat{Y}_2 = Y_2 + Z$ (види слика 2.8). Со замена во долната граница од компримирај-и-проследи (теорема 2.4) и оптимизација по N , се добива долната граница [14, eq.(16.12)]:

$$C \geq C\left(\gamma_{31} + \frac{\gamma_{21}\gamma_{32}}{\gamma_{31} + \gamma_{21} + \gamma_{32} + 1}\right) \quad (2.181)$$



Слика 2.8: Компримирај-и-проследи за Гаусов релеен канал

Доказ: Имајќи во предвид дека $X_1 \sim \mathcal{N}(0, P)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(0, P)$, и $Z \sim \mathcal{N}(0, N)$ се здружено независни и $\hat{Y}_2 = Y_2 + Z$:

$$Y_3 = g_{31}X_1 + g_{32}X_2 + Z_3 \quad Y_2 = g_{21}X_1 + Z_2 \quad \hat{Y}_2 = Y_2 + Z = g_{21}X_1 + Z_2 + Z \quad (2.182)$$

Доколку (2.182) се замени во (2.73) за изразите од разликата во првиот член од минимизацијата се добива:

$$\begin{aligned} I(X_1, X_2; Y_3) &= h(Y_3) - h(Y_3|X_1X_2) \leq \frac{1}{2} \log(2\pi e) (g_{31}^2 P + g_{32}^2 P + 1) - \frac{1}{2} \log(2\pi e) = \\ &= \frac{1}{2} \log(1 + \gamma_{31} + \gamma_{32}) = C(\gamma_{31} + \gamma_{32}) \end{aligned} \quad (2.183)$$

$$\begin{aligned} I(Y_2; \hat{Y}_2|X_1X_2Y_3) &= h(\hat{Y}_2|X_1X_2Y_3) - h(\hat{Y}_2|X_1X_2Y_3Y_2) = \\ &= h(Y_2 + Z|X_1X_2Y_3) - h(Y_2 + Z|X_1X_2Y_3Y_2) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= h(g_{21}X_1 + Z_2 + Z|X_1X_2Y_3) - \frac{1}{2} \log(2\pi e)(N) = \\
 &= \frac{1}{2} \log(2\pi e)(N+1) - \frac{1}{2} \log(2\pi e)(N) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{N+1}{N}\right)
 \end{aligned} \tag{2.184}$$

за вториот член од (2.73) се добива:

$$\begin{aligned}
 I(X_1; \hat{Y}_2, Y_3|X_2) &= h(\hat{Y}_2, Y_3|X_2) - h(\hat{Y}_2, Y_3|X_1X_2) = \\
 &= h(\hat{Y}_2|X_2) + h(Y_3|X_2\hat{Y}_2) - h(\hat{Y}_2|X_1X_2) - h(Y_3|X_1X_2\hat{Y}_2) = \\
 &= h(g_{21}X_1 + Z_2 + Z|X_2) + h(g_{31}X_1 + g_{32}X_2 + Z_3|X_2\hat{Y}_2) - \\
 &\quad - h(g_{21}X_1 + Z_2 + Z|X_1X_2) - h(g_{31}X_1 + g_{32}X_2 + Z_3|X_1X_2\hat{Y}_2) \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} \log(E[\text{Var}(g_{21}X_1)] + 1 + N) + \frac{1}{2} \log(E[\text{Var}(g_{31}X_1|\hat{Y}_2)] + 1) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \log 2\pi e(1 + N) - \frac{1}{2} \log 2\pi e = \\
 &= \frac{1}{2} \log 2\pi e(\gamma_{21} + 1 + N) + \frac{1}{2} \log 2\pi e \left(\gamma_{31} - \frac{g_{31}^2 E^2(X_1 \cdot \hat{Y}_2)}{E[\hat{Y}_2^2]} + 1 \right) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \log 2\pi e(1 + N) - \frac{1}{2} \log 2\pi e = \\
 &= \frac{1}{2} \log \frac{(\gamma_{21} + 1 + N)}{N + 1} + \frac{1}{2} \log \left(\gamma_{31} - \frac{g_{31}^2 E^2(X_1 \cdot (g_{21}X_1 + Z_2 + Z))}{E[\hat{Y}_2^2]} + 1 \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \log \frac{(\gamma_{21} + 1 + N)}{N + 1} + \frac{1}{2} \log \left(\gamma_{31} - \frac{g_{31}^2 g_{21}^2 E^2(X_1^2)}{\gamma_{21} + 1 + N} + 1 \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \log \frac{(\gamma_{21} + 1 + N)}{N + 1} + \frac{1}{2} \log \left(\gamma_{31} - \frac{\gamma_{31}\gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N} + 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \log \frac{(\gamma_{21} + 1 + N)}{N + 1} \cdot \left(\gamma_{31} - \frac{\gamma_{31}\gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N} + 1 \right)
 \end{aligned} \tag{2.185}$$

Доколку се заменат (2.183), 2.184 и (2.185) во (2.73) се добива:

$$\begin{aligned}
 C &\geq \max \min \left\{ \frac{1}{2} \log(1 + \gamma_{31} + \gamma_{32}) \cdot \left(\frac{N}{N+1} \right), \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{2} \log \frac{(\gamma_{21} + 1 + N)}{N + 1} \cdot \left(\gamma_{31} - \frac{\gamma_{31}\gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N} + 1 \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{2.186}$$

Се работи за две непрекинати и конкавни функции кои се сечат во една пресечна точка. До пресечната точка првиот член од парот е помал, а после пресечната точка помал е вториот член. Имајќи го тоа во предвид следи дека пресечната точка всушност претставува максимум на резултантаната функција која е минимум од двете функции. Имајќи го тоа во предвид, пресечната точка се наоѓа доколку се реши равенството (2.187):

$$(1 + \gamma_{31} + \gamma_{32}) \cdot \left(\frac{N}{N+1} \right) - \frac{(\gamma_{21} + 1 + N)}{N + 1} \cdot \left(\gamma_{31} - \frac{\gamma_{31}\gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N} + 1 \right) = 0 \tag{2.187}$$

Пресечната точка е дадена со (2.188):

$$N_0 = \frac{1 + \gamma_{31} + \gamma_{21}}{\gamma_{32}} \quad (2.188)$$

Ако (2.188) се замени во првиот или вториот член од минимизацијата во (2.186) ќе се добие:

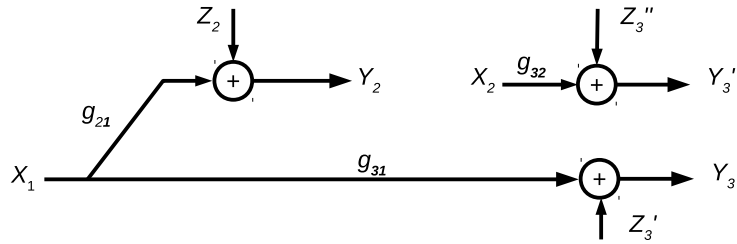
$$\begin{aligned} \frac{(1 + \gamma_{31} + \gamma_{32}) \cdot (1 + \gamma_{31} + \gamma_{21})}{\gamma_{32} \cdot \left(\frac{1 + \gamma_{31} + \gamma_{21}}{\gamma_{32}} + 1 \right)} &= \frac{(1 + \gamma_{31} + \gamma_{32}) \cdot (1 + \gamma_{31} + \gamma_{21})}{(1 + \gamma_{31} + \gamma_{21} + \gamma_{32})} = \\ &= \frac{\gamma_{31}^2 + \gamma_{21}\gamma_{31} + \gamma_{32}\gamma_{31} + 2\gamma_{31} + \gamma_{21} + \gamma_{21}\gamma_{32} + \gamma_{32} + 1}{(1 + \gamma_{31} + \gamma_{21} + \gamma_{32})} = \\ &= 1 + \frac{\gamma_{31}^2 + \gamma_{21}\gamma_{31} + \gamma_{32}\gamma_{31} + \gamma_{31} + \gamma_{21}\gamma_{32}}{(1 + \gamma_{31} + \gamma_{21} + \gamma_{32})} = \\ &= 1 + \frac{\gamma_{31}(\gamma_{31} + \gamma_{21} + \gamma_{32} + 1) + \gamma_{21}\gamma_{32}}{(1 + \gamma_{31} + \gamma_{21} + \gamma_{32})} = 1 + \gamma_{31} + \frac{\gamma_{21}\gamma_{32}}{(1 + \gamma_{31} + \gamma_{21} + \gamma_{32})}, \end{aligned} \quad (2.189)$$

со што се докажува (2.181). Границата во (2.181) се достигнува ако $\gamma_{32} \rightarrow \infty$. Кога вредноста на γ_{21} е мала, границата може да се подобри со временска распределба во предавателот на изворот.

CF методата дава подобри резултати од DF кога каналот од изворот до релето е послаб од каналот од изворот до дестинацијата т.е. кога $\gamma_{21} < \gamma_{31}$, или кога каналот од релето до дестинацијата е доволно силен. DF методата покажува подобри резултати од CF во другите режими. Во општ случај, може да се покаже дека и двата методи достигнуваат брзини на пренесување во рамките на пола бит од CUB[14, ch.(16.7.2)].

2.4.3 Гаусов релеен канал со фреквентна распределба во дестинацијата

Релејниот канал со фреквентна распределба во приемникот на дестинацијата (анг. RFD - Receiver Frequency Division) прикажан на слика 2.9 еден од можните начини за имплементација на релејниот канал со ортогонални приемни компоненти.



Слика 2.9: Гаусов канал со фреквентна распределба во дестинацијата

Во овој *полудуплексен* модел, каналот од релето до дестинацијата користи различен фреквентен опсег од дифузниот канал од изворот до релето и дестинацијата. Уште поточно, во овој модел $Y_3 = (Y_3', Y_3'')$ и

$$Y_2 = g_{21}X_1 + Z_2, \quad Y_3' = g_{31}X_1 + Z_3', \quad Y_3'' = g_{32}X_2 + Z_3'', \quad (2.190)$$

каде g_{21} , g_{31} , и g_{32} се каналните коефициенти, и $Z_2 \sim N(0, 1)$ и $Z_3 \sim N(0, 1)$ се независните компоненти на шумот. Да претпоставиме дека за X_1 и X_2 постои ограничување на средната моќност на вредност P . Капацитетот на овој канал не е познат во општ случај.

Тврдење 2.3.

CUB во теоремата 2.1 (под услов на ограничувањето на моќност) се сведува на [14, eq.(16.15)]:

$$C \leq \begin{cases} C(\gamma_{31}) + C(\gamma_{32}) & \text{доколку } \gamma_{21} \geq \gamma_{32}(\gamma_{31} + 1) \\ C(\gamma_{21} + \gamma_{31}) & \text{во спротивно} \end{cases} \quad (2.191)$$

Доказ: CUB за приемник со ортогонални приемни компоненти е дадена со(2.98):

$$C \leq \max_{p(x_1)} \min \{I(X_1; Y_3') + C_0, I(X_1; Y_2, Y_3')\}; \quad (2.192)$$

$$C_0 = \max_{p(x_2)} I(X_2; Y_3''); \quad p(y_2, y_3 | x_1 x_2) = p(y_3', y_2 | x_1) p(y_3'' | x_2) \quad (2.193)$$

Ако се употреби (2.190) во (2.193) ќе се добие:

$$C_0 = I(X_2; Y_3'') = h(Y_3'') - h(Y_3'' | X_2) = \frac{1}{2} \log(\gamma_{32} + 1) = C(\gamma_{32}) \quad (2.194)$$

$$I(X_1; Y_3') = h(Y_3') - h(Y_3' | X_1) = \frac{1}{2} \log 2\pi e (g_{31}^2 P + 1) - \frac{1}{2} \log(2\pi e) = \frac{1}{2} \log(1 + \gamma_{31}) = C(\gamma_{31}) \quad (2.195)$$

$$I(X_1; Y_3') + C_0 = C(\gamma_{31}) + C(\gamma_{32}) = \frac{1}{2} \log(1 + \gamma_{31})(1 + \gamma_{32}) \quad (2.196)$$

Вториот член од изразот за минимизација во (2.192) може да се сведе на:

$$\begin{aligned} I(X_1; Y_2, Y_3') &= h(Y_2 Y_3') - h(Y_2 Y_3' | X_1) = h(Y_2) + h(Y_3' | Y_2) - h(Y_2 | X_1) - h(Y_3' | Y_2 X_1) = \\ &\leq \frac{1}{2} \log(2\pi e) (\gamma_{21} + 1) + \frac{1}{2} \log(2\pi e) \left(E[Y_3'^2] - \frac{E^2[Y_3' \cdot Y_2]}{E[Y_2^2]} \right) - \frac{1}{2} \cdot \log(2\pi e) - \frac{1}{2} \cdot \log(2\pi e) = \\ &= \frac{1}{2} \log(\gamma_{21} + 1) + \frac{1}{2} \log \left(\gamma_{31} + 1 - \frac{E^2[(g_{31} X_1 + Z_3) \cdot (g_{21} X_1 + Z_2)]}{E[Y_2^2]} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \log(\gamma_{21} + 1) + \frac{1}{2} \log \left(\gamma_{31} + 1 - \frac{g_{31}^2 g_{21}^2 \cdot E^2[X_1^2]}{\gamma_{21} + 1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \log(\gamma_{21} + 1) + \frac{1}{2} \log \left(\gamma_{31} + 1 - \frac{\gamma_{21} \gamma_{31}}{\gamma_{21} + 1} \right) = \frac{1}{2} \log(\gamma_{21} + 1) \cdot \left(\gamma_{31} + 1 - \frac{\gamma_{21} \gamma_{31}}{\gamma_{21} + 1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \log(1 + \gamma_{21} + \gamma_{31}) \end{aligned} \quad (2.197)$$

Ако се заменат (2.194), (2.195) и (2.197) во (2.192) се добива:

$$\begin{aligned} C &\leq \max_{p(x_1)} \min \{I(X_1; Y_3') + C_0, I(X_1; Y_2, Y_3')\} = \\ &= \max_{p(x_1)} \min \left\{ \frac{1}{2} \log(1 + \gamma_{31}) + \frac{1}{2} \log(1 + \gamma_{32}), \frac{1}{2} \log(1 + \gamma_{21} + \gamma_{31}) \right\} \end{aligned} \quad (2.198)$$

$$\begin{aligned} (1 + \gamma_{31})(1 + \gamma_{32}) &\leq (1 + \gamma_{31} + \gamma_{21}) \quad \gamma_{32} \gamma_{31} + \gamma_{31} + \gamma_{32} + 1 \leq \\ &\leq 1 + \gamma_{31} + \gamma_{21} \quad \gamma_{32} \gamma_{31} + \gamma_{32} \leq \gamma_{21} \quad \gamma_{32}(\gamma_{31} + 1) \leq \gamma_{21} \end{aligned} \quad (2.199)$$

Доколку во изразот (2.199) десната страна од знакот \geq е поголема од левата тогаш минимизацијата во (2.198) го дава првиот член, а доколку левата страна е поголема од десната тогаш минимизацијата во (2.198) го дава вториот член со што се потврдува тврдењето 2.3.

Тврдење 2.4.

Долната граница за декодирај-и-проследи во теоремата 2.2 за RFD канал се сведува на [14, eq.(16.16)]:

$$C \geq \begin{cases} C(\gamma_{31}) + C(\gamma_{32}) & \text{доколку } \gamma_{21} \geq \gamma_{32}(\gamma_{31} + 1) \\ C(\gamma_{21}) & \text{во спротивно} \end{cases} \quad (2.200)$$

Доказ: Долната граница за декодирај-и-проследи согласно теорема 2.2 е:

$$C \geq \max_{p(x_1x_2)} \min \{I(X_1, X_2; Y_3), I(X_1; Y_2|X_2)\} \quad (2.201)$$

$$Y_2 = g_{21}X_1 + Z_2, \quad Y_3' = g_{31}X_1 + Z_3', \quad Y_3'' = g_{32}X_2 + Z_3'' \quad (2.202)$$

Ако изразите за Гаусов RFD канал (2.202) се заменат во (2.201), првиот член од (2.201) се сведува на:

$$\begin{aligned} I(X_1X_2; Y_3) &= I(X_1X_2; Y_3', Y_3'') = I(X_1X_2; Y_3') + I(X_1X_2; Y_3''|Y_3') = \\ &= h(Y_3') - h(Y_3'|X_1X_2) + h(Y_3''|Y_3') - h(Y_3''|X_1X_2Y_3') = \\ &= h(Y_3') - h(Y_3'|X_1) + h(Y_3'') - h(Y_3''|X_2) = I(X_1; Y_3') + I(X_2; Y_3'') = \\ &= \frac{1}{2} \log 2\pi e (\gamma_{31} + 1) - \frac{1}{2} \log 2\pi e + \frac{1}{2} \log 2\pi e (\gamma_{32} + 1) - \frac{1}{2} \log 2\pi e = C(\gamma_{31}) + C(\gamma_{32}) \end{aligned} \quad (2.203)$$

Вториот член од (2.201) се сведува на:

$$I(X_1; Y_2|X_2) = h(Y_2|X_2) - h(Y_2|X_2X_1) \leq \frac{1}{2} \log 2\pi e \cdot (\gamma_{21} + 1) - \frac{1}{2} \log 2\pi e = C(\gamma_{21}) \quad (2.204)$$

Ако (2.203) и (2.204) се заменат во (2.201) се добива:

$$C \geq \max_{p(x_1x_2)} \min \{C(\gamma_{31}) + C(\gamma_{32}), C(\gamma_{21})\} \quad (2.205)$$

$$\log(1 + \gamma_{31}) + \frac{1}{2} \log(1 + \gamma_{32}) \leq \frac{1}{2} \cdot \log(1 + \gamma_{21}) \quad (2.206)$$

$$\begin{aligned} (1 + \gamma_{31}) \cdot (1 + \gamma_{32}) &\leq (1 + \gamma_{21}) & 1 + \gamma_{31} + \gamma_{32}(1 + \gamma_{31}) &\leq 1 + \gamma_{21} \\ \gamma_{31} + \gamma_{32}(1 + \gamma_{31}) &\leq \gamma_{21} \end{aligned} \quad (2.207)$$

Доколку во изразот (2.207) десната страна од знакот \geq е поголема од левата тогаш минимизацијата во (2.205) го дава првиот член, а доколку левата страна е поголема од десната тогаш минимизацијата во (2.205) го дава вториот член со што се потврдува изразот (2.200) односно тврдењето 2.4. Кога $\gamma_{21} \geq \gamma_{31} + \gamma_{32}(\gamma_{31} + 1)$ границите во (2.191) и (2.200) се поклопуваат и капацитетот $C = C(\gamma_{31}) + C(\gamma_{32})$ се достигнува со декодирај-и-проследи. Доколку $\gamma_{21} \leq \gamma_{31}$, долната граница за декодирај-и-проследи $C(\gamma_{21})$ е полоша од долната граница за директен пренос $C(\gamma_{31})$.

Тврдење 2.5.

Долната граница за компримирај-и-проследи во теорема 2.4 со $X_1 \sim N(0, P)$, $X_2 \sim N(0, P)$ и $Z \sim N(0, N)$, кои се независни една од друга, и $\hat{Y}_2 = Y_2 + Z$, се сведува (после оптимизацијата по N) на [14, eq.(16.17)]:

$$C \geq C\left(\gamma_{31} + \frac{\gamma_{21}\gamma_{32}(\gamma_{31} + 1)}{\gamma_{21} + (\gamma_{31} + 1)(\gamma_{32} + 1)}\right). \quad (2.208)$$

Доказ: Доколку во долната граница за CF RFD канал ((2.99)) се заменат:

$$\hat{Y}_2 = Y_2 + Z \quad X_1 \sim N(0, P), \quad X_2 \sim N(0, P) \quad \text{и} \quad Z \sim N(0, N) \quad (2.209)$$

$$Y_2 = g_{21}X_1 + Z_2, \quad Y_3' = g_{31}X_1 + Z_3', \quad Y_3'' = g_{32}X_2 + Z_3'' \quad \hat{Y}_2 = Y_2 + Z = g_{21}X_1 + Z_2 + Z \quad (2.210)$$

за вториот член од минимизацијата во (2.99) се добива:

$$\begin{aligned} I(X_1; \hat{Y}_2, Y_3') &= I(X_1; \hat{Y}_2) + I(X_1; Y_3' | \hat{Y}_2) = h(\hat{Y}_2) - h(\hat{Y}_2 | X_1) + I(X_1; Y_3' | \hat{Y}_2) \\ &= h(g_{21}X_1 + Z_2 + Z) - h(g_{21}X_1 + Z_2 + Z | X_1) + I(X_1; Y_3' | \hat{Y}_2) = \\ &= \frac{1}{2} \log(2\pi e) (\gamma_{21} + 1 + N) - \frac{1}{2} \log(2\pi e) (1 + N) + I(X_1; Y_3' | \hat{Y}_2) = \end{aligned} \quad (2.211)$$

Приемниот сигнал во релето y_2 (односно неговата реконструкција \hat{y}_2) и сигналот во дестинацијата y_3' се корелирани бидејќи тие се копии од еден ист сигнал (x_1) добиени од две независни патеки со шум и просторно слабење. Имајќи го ова во предвид за условната здружената информација во (2.211) се добива:

$$I(X_1; Y_3' | \hat{Y}_2) = h(Y_3' | \hat{Y}_2) - h(Y_3' | X_1 \hat{Y}_2) \quad (2.212)$$

$$\begin{aligned} h(Y_3' | \hat{Y}_2) &= E[h(Y_3' | \hat{y}_2)] \leq E\left[\frac{1}{2} \log 2\pi e (\text{Var}(Y_3' | \hat{y}_2))\right] \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \log 2\pi e (E[\text{Var}(Y_3' | \hat{y}_2)]) \leq \frac{1}{2} \log 2\pi e \left(E[Y_3'^2] - \frac{E^2[Y_3' \hat{Y}_2]}{E[\hat{Y}_2^2]} \right) \end{aligned} \quad (2.213)$$

Изразот под логаритамот во (2.213) може да се сведе на:

$$\begin{aligned} E[Y_3'^2] - \frac{E^2[Y_3' \hat{Y}_2]}{E[\hat{Y}_2^2]} &= \gamma_{31} + 1 - \frac{E^2[(g_{31}X_1 + Z_3') \cdot (g_{21}X_1 + Z_2 + Z)]}{\gamma_{21} + 1 + N} = \\ &= \gamma_{31} + 1 - \frac{g_{31}^2 g_{21}^2 P^2}{\gamma_{21} + 1 + N} = \gamma_{31} + 1 - \frac{\gamma_{31} \gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N} \end{aligned} \quad (2.214)$$

Ако се замени (2.214) во (2.213) ќе се добие:

$$h(Y_3' | \hat{Y}_2) \leq \frac{1}{2} \log 2\pi e \left(\gamma_{31} + 1 - \frac{\gamma_{31} \gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N} \right) \quad (2.215)$$

Ако (2.215) се замени во (2.212) се добива:

$$\begin{aligned} I(X_1; Y_3' | \hat{Y}_2) &\leq \frac{1}{2} \log 2\pi e \left(\gamma_{31} + 1 - \frac{\gamma_{31} \gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N} \right) - \frac{1}{2} \log 2\pi e = \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\gamma_{31} + 1 - \frac{\gamma_{31} \gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N} \right) \end{aligned} \quad (2.216)$$

Ако (2.216) се замени во (2.211) се добива:

$$I(X_1; \hat{Y}_2, Y_3') \leq \frac{1}{2} \log(2\pi e) (\gamma_{21} + 1 + N) - \frac{1}{2} \log(2\pi e) (1 + N) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \cdot \log \left(\gamma_{31} + 1 - \frac{\gamma_{31}\gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N} \right) = \\
 & = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\gamma_{21}}{1 + N} + 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot \log \left(\gamma_{31} + 1 - \frac{\gamma_{31}\gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N} \right) = \\
 & = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\gamma_{21}}{1 + N} + 1 \right) \left(\gamma_{31} + 1 - \frac{\gamma_{31}\gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N} \right) \quad (2.217)
 \end{aligned}$$

Првиот член од изразот за минимизацијата во (2.99) е:

$$C_1 = I(X_1; Y_3') + C_0 - I(Y_2; \hat{Y}_2 | X_1 Y_3') \quad (2.218)$$

Првите два члена од (2.218) се сведуваат на:

$$I(X_1; Y_3') = \frac{1}{2} \log(\gamma_{31} + 1) \quad (2.219)$$

$$C_0 = I(X_2; Y_3'') = \frac{1}{2} \log(\gamma_{32} + 1) \quad (2.220)$$

Третиот член од (2.218) се сведува на:

$$\begin{aligned}
 I(Y_2; \hat{Y}_2 | X_1 Y_3') & = h(\hat{Y}_2 | X_1 Y_3') - h(\hat{Y}_2 | X_1 Y_3' Y_2) = h(g_{21} X_1 + Z_2 + Z | X_1 Y_3') - \\
 & - h(Y_2 + Z | X_1 Y_3' Y_2) = \frac{1}{2} \log 2\pi e(1 + N) - \frac{1}{2} \log 2\pi e N = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{N} + 1 \right) \quad (2.221)
 \end{aligned}$$

Доколку се заменат (2.219), (2.220) и (2.221) во (2.218) се добива:

$$\begin{aligned}
 C_1 & = \frac{1}{2} \log(\gamma_{31} + 1) + \frac{1}{2} \log(\gamma_{32} + 1) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{N} + 1 \right) = \\
 & = \frac{1}{2} \log(\gamma_{31} + 1)(\gamma_{32} + 1) \left(\frac{N}{N + 1} \right) \quad (2.222)
 \end{aligned}$$

Доколку (2.222) и (2.217) се заменат во (2.99) се добива:

$$\begin{aligned}
 C & = \min \left\{ \frac{1}{2} \log(\gamma_{31} + 1)(\gamma_{32} + 1) \left(\frac{N}{N + 1} \right), \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} \log \left(\frac{\gamma_{21}}{1 + N} + 1 \right) \left(\gamma_{31} + 1 - \frac{\gamma_{31}\gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N} \right) \right\} \quad (2.223)
 \end{aligned}$$

Се работи за две непрекинати и конкавни функции кои се сечат во една пресечна точка. До пресечната точка едниот член од парот е помал, а после пресечната точка помал е другиот член. Имајќи го тоа во предвид следи дека пресечната точка всушност претставува максимум на резултантаната функција која е минимум од двете функции. Пресечната точка се наоѓа доколку се реши равенството:

$$(\gamma_{31} + 1)(\gamma_{32} + 1) \left(\frac{N}{N + 1} \right) - \left(\frac{\gamma_{21}}{1 + N} + 1 \right) \left(\gamma_{31} + 1 - \frac{\gamma_{31}\gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1 + N} \right) = 0 \quad (2.224)$$

$$N_0 = \frac{1 + \gamma_{31} + \gamma_{21}}{\gamma_{32}} \quad (2.225)$$

Ако пресечната точка дадена со (2.225) се замени во, на пример, првиот член од (2.223), после упростувањето на дропките се добива:

$$(\gamma_{31} + 1)(\gamma_{32} + 1) \left(\frac{N_0}{N_0 + 1} \right) = 1 + \gamma_{31} + \frac{\gamma_{21}\gamma_{32}(\gamma_{31} + 1)}{\gamma_{21} + (\gamma_{31} + 1)(\gamma_{32} + 1)} \quad (2.226)$$

Конечно, доколку (2.226) се замени во (2.223) се добива:

$$C = \frac{1}{2} \log \left(1 + \gamma_{31} + \frac{\gamma_{21}\gamma_{32}(\gamma_{31} + 1)}{\gamma_{21} + (\gamma_{31} + 1)(\gamma_{32} + 1)} \right) \quad (2.227)$$

Оваа граница станува асимптотски многу прецизна доколку γ_{31} или γ_{32} се приближуваат до бесконечност. За мало γ_{21} , т.е. мал SNR во каналот од изворот до релето, CF методата дава подобри перформанси од DT и DF методите. Освен тоа, брзината на пренесување на CF методата може да се подобри со временска распределба во изворот, т.е., да му се дозволи на изворот да испраќа со моќност P/α во дел $\alpha \in [0, 1]$ од времето и нула моќност за преостанатото време.

2.4.4 Линеарен Гаусов RC со фреквентна распределба во дестинацијата

Да разгледуваме Гаусов RFD релеен канал со релејни функции кои се линеарни комбинации од претходно примените симболи. Треба да се забележи дека под претпоставка на ортогонални приемни компоненти, може да се елиминира доцнењето при кодирањето во релето со едноставно преименување на времето за пренос во каналот X_2 во Y_3'' . На сличен начин еквивалентно разгледуваме релејни функции во форма $x_{2i} = \sum_{j=1}^n a_{ij}y_{2j}$ $i \in [1 : n]$ или во векторска форма $X_2^n = A \cdot Y_2^n$ каде A е $n \times n$ долна триаголна матрица.

$$\begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{21} \\ y_{22} \\ \dots \\ y_{2n} \end{bmatrix} \quad (2.228)$$

Оваа метода го сведува релејниот канал на точка-точка Гаусов канал со влез X_1^n и излез $Y_3^n = (Y_3^m, Y_3^{m'})$. Треба да се забележи дека релејниот канал со линеарната релејна функција може значително полесно да се имплементира во пракса отколку DF и CF каналите. Се покажува дека неговите перформанси се споредливи со перформансите на овие покомплексни методи во случај на голем SNR.

Капацитетот на системот со линеарна релејна функција, C_L , се карактеризира со израз со повеќе знаци [14, ch.(16.8.1)]:

$$C_L = \lim_{k \rightarrow \infty} C_L^{(k)} \quad (2.229)$$

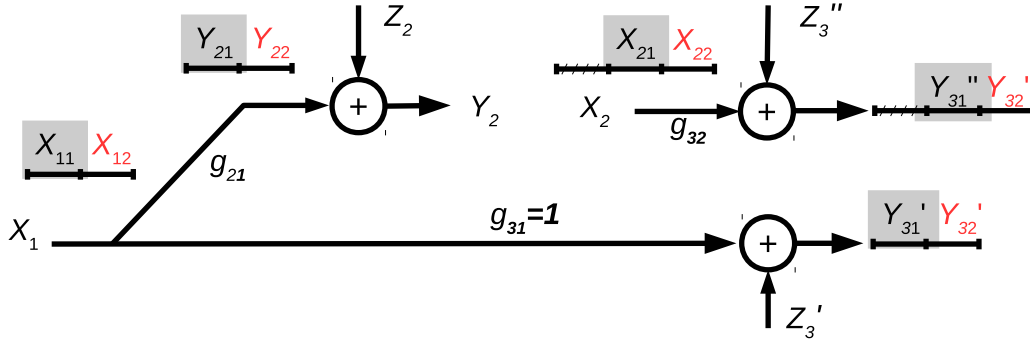
$$C_L^{(k)} = \max_{F(x_1^k), A} \frac{1}{k} \cdot I(X_1^k; Y_3^k) \quad (2.230)$$

Максимумот е по сите кумулативни веројатности $F(x_1^k)$ и долни триаголни матрици A кои го задоволуваат ограничувањето на моќност во изворот и релето - P . Може да се покаже дека $C_L^{(k)}$ се достигнува со Гаусов влезен сигнал X_1^k кој го задоволува ограничувањето на моќност.

2.4.5 Гаусов релеен канал со засили-и-проследи

Да разгледуваме $C_L^{(1)}$, што ја дава максималната брзина за пренос која може да се достигне со едноставна засили-и-проследи релејна функција. Може да се покаже дека $C_L^{(1)}$ се достигнува со избор $X_1 \sim \mathcal{N}(0, P)$ и $X_2 = Y_2 \sqrt{P/(\gamma_{21} + 1)}$. Во тој случај [14, eq.(16.18)]:

$$C_L^{(1)} = C \left(\gamma_{31} + \frac{\gamma_{21}\gamma_{32}}{\gamma_{21} + \gamma_{32} + 1} \right) \quad (2.231)$$



Слика 2.10: Засили-и-проследи релеен канал

Доказ: Да го разгледуваме AF релејниот канал прикажан на слика 2.10. Да претпоставиме дека X_1, X_2, \dots се i.i.d $\sim \mathcal{N}(0, P)$, $Z_2, Z_3'', Z_3' \sim \mathcal{N}(0, N)$ и $x'_i = A \cdot y'_i$ каде A е:

$$A = \sqrt{\frac{P}{g_{21}^2 P + N}} \quad A^2 = \frac{P}{g_{21}^2 P + N} = \frac{\frac{P}{N}}{g_{21}^2 \frac{P}{N} + 1} \quad (2.232)$$

Факторот на засилување - A се избира согласно (2.232) за да се задоволи ограничувањето на моќност во релето [16, eq.(9)].

Каналот е опишан со следниве изрази:

$$X_1 \sim \mathcal{N}(0, P) \quad Y_2 = g_{21} \cdot X_1 + Z_2 \quad X_2 = A \cdot Y_2, \quad (2.233)$$

$$\begin{aligned} Y_3'' &= Y_{31}'' = g_{32} \cdot X_2 + Z_3'' = g_{32} \cdot A \cdot (g_{21} \cdot X_1 + Z_2) + Z_3'' = \\ &= g_{32} \cdot A \cdot g_{21} \cdot X_1 + g_{32} \cdot A \cdot Z_2 + Z_3'' \quad Y_3' = Y_{31}' = X_1 + Z_3' \end{aligned} \quad (2.234)$$

Капацитетот на каналот е даден со изразот (2.230) кој за случај на засили-и-проследи се сведува на барање на максимум од следнава здружена информација:

$$I(X_1; Y_{31}' Y_{31}'') = h(Y_{31}' Y_{31}'') - h(Y_{31}' Y_{31}'' | X_1) = \quad (2.235)$$

$$= h(Y_{31}'') + h(Y_{31}' | Y_{31}'') - h(Y_{31}' | X_1) - h(Y_{31}'' | X_1 Y_{31}') \quad (2.236)$$

Ако се земе во предвид (2.234) и дека се работи за гаусов канал првиот член од (2.236) се сведува на:

$$h(Y_{31}'') = h(g_{32} \cdot A \cdot g_{21} \cdot X_1 + g_{32} \cdot A \cdot Z_2 + Z_3'') \leq \frac{1}{2} \log(2\pi e) (g_{32}^2 A^2 g_{21}^2 P + g_{32}^2 A^2 N + N), \quad (2.237)$$

а вториот член се сведува на:

$$h(Y'_{31}|Y''_{31}) = h(X_1 + Z|Y''_{31}) = \frac{1}{2} \log(2\pi e) E(\text{Var}(X_1 + Z|Y''_{31})) \quad (2.238)$$

Изразот во логаритамот во (2.238) се сведува на:

$$\begin{aligned} E(\text{Var}(X_1 + Z|Y''_{31})) &= E(\text{Var}(X_1|Y''_{31})) + N = P - \frac{E^2(X_1 \cdot Y''_{31})}{E(Y''_{31})} + N = \\ &= P - \frac{E^2(X_1 \cdot (g_{32} \cdot A \cdot g_{21} \cdot X_1 + g_{32} \cdot A \cdot Z_2 + Z''_3))}{E(Y''_{31})} + N = P - \frac{g_{32}^2 \cdot A^2 \cdot g_{21}^2 \cdot P^2}{g_{32}^2 A^2 g_{21}^2 P + g_{32}^2 A^2 N + N} + N \end{aligned} \quad (2.239)$$

Ако (2.239) се замени во (2.238) се добива:

$$h(Y'_{31}|Y''_{31}) = \frac{1}{2} \log(2\pi e) \left(P - \frac{g_{32}^2 \cdot A^2 \cdot g_{21}^2 \cdot P^2}{g_{32}^2 A^2 g_{21}^2 P + g_{32}^2 A^2 N + N} + N \right) \quad (2.240)$$

Ако се сумираат (2.237) и (2.240) се добива првиот член од (2.235) односно сумата од првите два члена во (2.236):

$$\begin{aligned} h(Y'_{31} Y''_{31}) &= \frac{1}{2} \log(2\pi e) (g_{32}^2 A^2 g_{21}^2 P + g_{32}^2 A^2 N + N) + \\ &+ \frac{1}{2} \log(2\pi e) \left(P - \frac{g_{32}^2 \cdot A^2 \cdot g_{21}^2 P^2}{g_{32}^2 A^2 g_{21}^2 P + g_{32}^2 A^2 N + N} + N \right) = \\ &= \frac{1}{2} \log(2\pi e)^2 (g_{21}^2 g_{32}^2 A^2 N P + g_{32}^2 A^2 N^2 + g_{32}^2 A^2 N P + N^2 + N P) \end{aligned} \quad (2.241)$$

Третиот член од (2.236) се сведува на:

$$h(Y'_{31}|X_1) = \frac{1}{2} \log(2\pi e) (N) \quad (2.242)$$

Четвртиот член од (2.236) се сведува на:

$$\begin{aligned} h(Y''_{31}|X_1 Y'_{31}) &= h(g_{32} \cdot A \cdot g_{21} \cdot X_1 + g_{32} \cdot A \cdot Z_2 + Z''_3 | X_1 Y'_{31}) = \\ &= \frac{1}{2} \log(2\pi e) \text{Var}(g_{32} \cdot A \cdot Z_2 + Z''_3 | Y'_{31}) = \frac{1}{2} \log(2\pi e) (g_{32}^2 \cdot A^2 \cdot N + N) \end{aligned} \quad (2.243)$$

Ако се заменат 2.241, 2.242 и 2.243 во (2.236) се добива:

$$\begin{aligned} I(X_1; Y'_{31} Y''_{31}) &= \frac{1}{2} \log(2\pi e)^2 (g_{21}^2 g_{32}^2 A^2 N P + g_{32}^2 A^2 N^2 + g_{32}^2 A^2 N P + N^2 + N P) - \\ &- \frac{1}{2} \log(2\pi e)^2 \cdot N \cdot (g_{32}^2 \cdot A^2 \cdot N + N) = \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{(g_{21}^2 g_{32}^2 A^2 N P + g_{32}^2 A^2 N^2 + g_{32}^2 A^2 N P + N^2 + N P)}{N \cdot (g_{32}^2 \cdot A^2 \cdot N + N)} = \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\underbrace{1 + \frac{(g_{21}^2 g_{32}^2 A^2 N P + g_{32}^2 A^2 N P + N P)}{g_{32}^2 \cdot A^2 \cdot N^2 + N^2}}_{(a)} \right) \end{aligned} \quad (2.244)$$

Ако се замени (2.232) во (2.244) и се разгледувам само изразот под логаритамот, се добива:

$$\begin{aligned}
 a &= 1 + \frac{\left((g_{21}^2 + 1) g_{32}^2 \cdot \frac{P}{g_{21}^2 P + N} \cdot NP + NP \right)}{N^2 \left(g_{32}^2 \cdot \frac{P}{g_{21}^2 P + N} + 1 \right)} = 1 + \frac{P \left((g_{21}^2 + 1) \cdot g_{32}^2 \cdot \frac{P}{g_{21}^2 P + N} + 1 \right)}{N \left(\frac{g_{32}^2 P + g_{21}^2 P + N}{g_{21}^2 P + N} \right)} = \\
 &= 1 + \frac{P \left((g_{21}^2 + 1) g_{32}^2 \cdot P + g_{21}^2 P + N \right)}{N \left(g_{32}^2 P + g_{21}^2 P + N \right)} = 1 + \frac{P}{N} \cdot \left(1 + \frac{g_{21}^2 g_{32}^2 \cdot P}{(g_{21}^2 + g_{32}^2) P + N} \right) \quad (2.245)
 \end{aligned}$$

Ако се замени (2.245) во (2.244) се добива:

$$\begin{aligned}
 I(X_1; Y'_{31} Y''_{31}) &= \frac{1}{2} \cdot \log \left(1 + \frac{P}{N} \cdot \left(1 + \frac{g_{21}^2 g_{32}^2 \cdot P}{(g_{21}^2 + g_{32}^2) P + N} \right) \right) = \\
 &= C \left(\frac{P}{N} \cdot \left(1 + \frac{g_{21}^2 g_{32}^2 \cdot P}{(g_{21}^2 + g_{32}^2) P + N} \right) \right) \quad (2.246)
 \end{aligned}$$

Изразот (2.246) може да се прикаже преку соодветните односи сигнал-шум:

$$I(X_1; Y'_{31} Y''_{31}) = C \left(\frac{P}{N} + \frac{g_{21}^2 g_{32}^2}{(g_{21}^2 + g_{32}^2) \frac{P}{N} + 1} \cdot \frac{P^2}{N^2} \right) = C \left(\gamma_{31} + \frac{\gamma_{21} \cdot \gamma_{32}}{\gamma_{21} + \gamma_{32} + 1} \right) \quad (2.247)$$

Со што се докажува изразот (2.231) за капацитет на системот засили-и-проследи.

Се покажува дека [14, ch.(16.8.2)] дека CF методата дава подобри перформанси од AF но е многу покомплексен за имплементација.

2.4.6 Капацитет на AF каскаден релеен канал

Моделот на AF каскадниот релеен канал се базира на моделот на Гаусовиот релеен канал со засили и проследи прикажан на слика 2.10 но без постоење на директната компонента од изворот до дестинацијата ($g_{31} = 0$).

Тврдење 2.6.

Капацитетот на овој тип на канал може да се добие доколку во изразот (2.231) се земе $\gamma_{31} = 0$:

$$C_L^{(1)} = C \left(\frac{\gamma_{21} \gamma_{32}}{\gamma_{21} + \gamma_{32} + 1} \right) \quad (2.248)$$

Доказ: Истиот израз може да се добие доколку на сликата 2.10 се гледа само горната гранка:

$$Y_2 = g_{21} \cdot X_1 + Z_2, \quad \gamma_{21} = \frac{|g_{21}|^2 P}{N}, \quad \gamma_{32} = \frac{|g_{32}|^2 P}{N} \quad (2.249)$$

$$Y_3'' = g_{32} \cdot X_2 + Z_3'' = g_{32} \cdot A \cdot Y_2 + Z_3'' = g_{32} \cdot A \cdot (g_{21} \cdot X_1 + Z_2) + Z_3'' = g_{32} \cdot A \cdot g_{21} \cdot X_1 + g_{32} \cdot A \cdot Z_2 + Z_3'' \quad (2.250)$$

$$Z_3'' \sim N(0, N) \quad Z_2 \sim N(0, N) \quad A = \sqrt{\frac{P}{g_{21}^2 P + N}} \quad (2.251)$$

Ако се замени (2.251) во (2.250) се добива:

$$Y_3'' = Y_{31}'' = g_{32} \cdot X_2 + Z_3'' = g_{32} \cdot g_{21} \cdot \sqrt{\frac{P}{g_{21}^2 P + N}} \cdot X_1 + g_{32} \cdot \sqrt{\frac{P}{g_{21}^2 P + N}} Z_2 + Z_3'' \quad (2.252)$$

Капацитетот на каналот е даден со изразот (2.230) кој за случај на засили-и-проследи без директна компонента се сведува на барање на максимум од следнава здружена информација:

$$\begin{aligned}
 I(X; Y_3'') &= h(Y_3'') - h(Y_3''|X_1) = \\
 &= h\left(g_{32} \cdot g_{21} \cdot \sqrt{\frac{P}{g_{21}^2 P + N}} \cdot X_1 + g_{32} \cdot \sqrt{\frac{P}{g_{21}^2 P + N}} \cdot Z_2 + Z_3''\right) - h(g_{32} \cdot A \cdot Z_2 + Z) = \\
 &= \frac{1}{2} \log 2\pi e \left(g_{32}^2 \cdot g_{21}^2 \cdot \frac{P}{g_{21}^2 P + N} \cdot P + \frac{g_{32}^2 \cdot P}{g_{21}^2 P + N} \cdot N + N \right) - \frac{1}{2} \log 2\pi e \cdot \left(\frac{g_{32}^2 \cdot P \cdot N}{g_{21}^2 P + N} + N \right) \\
 &= \frac{1}{2} \log \frac{g_{32}^2 \cdot \frac{g_{21}^2 P}{g_{21}^2 \cdot \frac{P}{N} + 1} \cdot P + \frac{g_{32}^2 \cdot P}{g_{21}^2 P + N} \cdot N + N}{\left(N \cdot \frac{g_{32}^2 P}{g_{21}^2 P + N} + N \right)} = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\frac{g_{32}^2 \cdot P \cdot \gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1}}{N \cdot \left(\frac{g_{32}^2 P}{g_{21}^2 \frac{P}{N} + 1} + 1 \right)} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\frac{\gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1} \cdot \gamma_{32}}{\left(\frac{\gamma_{32}}{\gamma_{21} + 1} + 1 \right)} \right) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\gamma_{32} \cdot \gamma_{21}}{\gamma_{32} + \gamma_{21} + 1} \right), \tag{2.253}
 \end{aligned}$$

со што се докажува изразот (2.248).

3 Перформанси на МИМО релеен канал со две делници и две антени по јазол

Во безжичните комуникациски системи веројатноста на грешка (EP) и веројатност на испад (OP) се најважните метрики на перформансите на системот. Во оваа глава ќе ги анализираме EP и OP перформансите на релеен канал со две делници, кој се состои од извор (со две антени), реле (со една или две антени) и дестинација (со една или две антени), кои го користат OSTBC кодирањето на Аламути [17] во случај на Рејлиев фединг ([19], [18]). OSTBC кодот на Аламути е високо ефикасна техника која ги користи расположивите степени на слобода на комуникацискиот канал (или делница) со две предавателни антени со удвојување на добивката во капацитет и диверзитет [17].

Во оваа глава се користи варијанта на засили-и-проследи релејна метода, наречана раздвои-и-проследи (DCF), врз основ на која релето ги раздвојува OSTBC сигналите примени од изворот во две независни податочни низи, ги засилува секоја од нив независно и ги испраќа кон дестинацијата. Во DCF методата ќе користиме променливо засилување (VG) во релето [6] за кое е потребно познавање на каналните информации во релето и дестинацијата.

Во продолжението на оваа глава ќе спроведеме теоретска анализа на OP перформансите на овие канали и ќе ги споредиме со каналите со две делници кои имаат по една антена во изворот, релето и дестинацијата и со точка-точка каналите кои имаат по две антени. Резултатите добиени од теоретската анализа ќе ги спроедиме со резултатите добиени со Монте-Карло симулации.

Со користење на Монте-Карло симулации ќе ги анализираме EP перформансите на овие релејни канали и ќе ги споредиме со декодирај-и-проследи релејната метода. Освен тоа со помош на симулации ќе го споредиме разгледуваниот систем кој користи релее со променливо засилување (VG) со системот кој користи релее со фиксно засилување (FG).

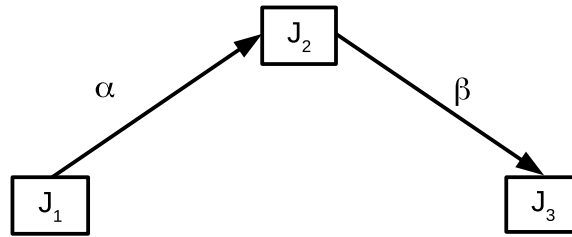
Во трудот [33] е дадена анализа на веројатноста за грешка на DCF систем со две делници со две антени во изворот, релето и дестинацијата. Во трудот [34] е дадена анализа на веројатноста за грешка за DCF систем со две делници и повеќе антени во изворот и дестинацијата и една антена во релето.

Оваа глава е организирана на следниов начин. Во глава 3.1 ќе дадеме краток осврт на системите кои користат по една антена во јазлите. Во наредната глава (3.2) накратко ќе ги проучиме основните системи со диверзитет во приемникот и предавателот кои се базични за понатамошната анализа. Главата 3.4 го презентира моделот на системот и на каналот. Во главата 3.4 ќе го изведеме изразот за крај-крај односот сигнал-шум (SNR) и функцијата за генерирање на моменти (MGF) кои се неопходни за успешна анализа на веројатноста за испад на овие системи. Резултатите ќе бидат презентирани во глава 3.5.

3.1 Релеен канал со една антена по јазол

Во зависност од природата и комплексноста на релето, релејните канали можат да се класифицираат во две основни категории: регенеративни и транспарентни (нерегенеративни) системи. Во регенеративните системи релето во целост го декодира

сигналот испратен од изворот преку првата делница и ја проследува декодираната верзија во втората делница. Од друга страна транспарентните системи користат поедноставни релеи кои само го засилуваат и проследуваат примениот сигнал без да вршат декодирање. Релеите во транспарентните системи можат да се поделат на: (1) релеи со променливо засилување кои имаат CSI за првата делница и (2) „слепи“ релеи [6]. Транспарентните системи со релеи со променливо засилување го користат моменталниот CSI за првата делница за да го контролираат засилувањето на релето така што на излез од релето се добие константна моќност. На системите со „слепи“ релеи на релеите не им е потребно да го знаат моменталниот CSI на првата делница. Релеите во овие системи користат засилувачи со фиксно засилување поради што на излезот од релето се добива сигнал со променлива моќност. Иако за системите со слепи релеи не се очекува да имаат перформанси како системите со променливо засилување во релето, нивната едноставност и лесна имплементација (заедно со нивните споредливи перформанси) ги прави атрактивни од практична гледна точка.



Слика 3.1: Безжичен комуникациски систем каде јазолот J_2 го проследува сигналот од јазолот J_1 кон J_3

Да го разгледуваме безжичниот комуникациски систем прикажан на 3.1. Во системот јазолот J_1 комуницира со јазолот J_3 преку јазолот J_2 кој се однесува како реле. Да претпоставиме дека јазолот J_1 го испраќа сигналот $x(t)$ со средна моќност E_1 . Приемниот сигнал во терминалот J_2 е:

$$r_2(t) = \alpha \cdot x(t) + n_2(t) \quad (3.1)$$

каде α е амплитудата на федингот на каналот од J_1 до J_2 , и $n_2(t)$ е додавачки бел Гаусов шум (AWGN) со моќност N_{02} на влезот на J_2 . Кај транспарентните системи, приемниот сигнал во јазолот J_2 се множи со фактор на засилување A , и потоа се проследува кон јазолот J_3 . Приемниот сигнал во терминалот J_3 е:

$$r_3 = \beta \cdot A \cdot (\alpha \cdot x(t) + n_2(t)) + n_3(t) = \alpha \cdot \beta \cdot A \cdot x(t) + \beta \cdot A \cdot n_2(t) + n_3(t) \quad (3.2)$$

каде β е амплитудата на федингот на каналот помеѓу јазлите J_2 и J_3 и $n_3(t)$ е бел додавачки Гаусов шум со моќност N_{03} на влез од јазолот J_3 . Од (3.2) може да се добие крај-крај односот сигнал-шум:

$$\gamma_{eq} = \frac{\alpha^2 \cdot \beta^2 \cdot A^2 \cdot E_1}{\beta^2 \cdot A^2 \cdot N_{02} + N_{03}} = \frac{\alpha^2 \cdot \beta^2 \cdot A^2 \cdot E_1}{A^2 \cdot N_{02} \cdot N_{03} \cdot \left(\frac{\beta^2}{N_{03}} + \frac{1}{A^2 \cdot N_{02}} \right)} = \frac{\frac{\alpha^2 \cdot E_1}{N_{02}} \cdot \frac{\beta^2}{N_{03}}}{\frac{\beta^2}{N_{03}} + \frac{1}{A^2 \cdot N_{02}}} \quad (3.3)$$

Од (3.3) јасно е дека изборот на факторот на засилување го дефинира крај-крај односот сигнал-шум.

Во случај на постоење на CSI во јазолот J_2 , во [21] е предложено засилување:

$$A^2 = \frac{E_2}{E_1 \alpha^2 + N_{02}} \quad (3.4)$$

каде E_2 е моќност на сигналот на излез од релето. Ваквиот избор на факторот на засилување има за цел да го инвертира фединг ефектот на првата делница но исто така ја ограничува излезната моќност на релето доколку амплитудата на федингот α , е мала. Сепак на релите со променливо засилување им е потребна постојана естимација на амплитудата на федингот во првата делница што го прави ваквиот избор на засилување тешко остварлив од практична гледна точка. Ако се замени (3.4) во (3.3) се добива:

$$\begin{aligned} \gamma_{eq1} &= \frac{\frac{\alpha^2 \cdot E_1}{N_{02}} \cdot \frac{\beta^2}{N_{03}}}{\frac{\beta^2}{N_{03}} + \frac{E_1 \alpha^2 + N_{02}}{E_2 \cdot N_{02}}} = \frac{\frac{\alpha^2 \cdot E_1}{N_{02}} \cdot \frac{\beta^2}{N_{03}}}{\frac{\beta^2 \cdot E_2 \cdot N_{02} + N_{03} \cdot E_1 \alpha^2 + N_{03} N_{02}}{E_2 \cdot N_{02} \cdot N_{03}}} = \\ &= \frac{\frac{\alpha^2 \cdot E_1}{N_{02}} \cdot \frac{\beta^2 \cdot E_2}{N_{03}}}{\frac{\beta^2 \cdot E_2}{N_{03}} + \frac{\alpha^2 E_1}{N_{02}} + 1} = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2 + 1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

каде $\gamma_1 = \frac{\alpha^2 \cdot E_1}{N_{02}}$ и $\gamma_2 = \frac{\beta^2 \cdot E_2}{N_{03}}$ се моменталните односи сигнал-шум за првата и втората делница, соодветно. Перформансите на релејните канали кои користат релее со променливо засилување согласно 3.4 во Рејлиев фединг се анализирани во [21], [22] и [23], а анализата на перформансите за Накагами фединг е дадена во [24].

Системите со „слепи“ релее користат фиксен фактор на засилување без оглед на амплитудата на федингот во првата делница. Доколку во (3.3) земеме $C = E_2 / (A^2 N_{02})$ се добива:

$$\gamma_{eq2} = \frac{\frac{\alpha^2 \cdot E_1}{N_{02}} \cdot \frac{\beta^2 E_2}{N_{03}}}{\frac{\beta^2 E_2}{N_{03}} + \frac{E_2}{A^2 \cdot N_{02}}} = \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_2}{C + \gamma_2} \quad (3.6)$$

каде C е константа за фиксно A .

Може да претпоставиме дека релето не го знае моменталниот CSI за првата делница, но има статистички CSI за првата делница односно ја знае средната моќност на федингот $\Omega = E[\alpha^2]$ која се менува споро во спроедба со α . Ваквото реле не мора постојано да го мониторира каналот, како што е случај за релите со променливо засилување. Ваквите релее ќе ги нарекуваме „полу-слепи“. Засилувањето во „полу-слепите“ релее се избира согласно [6, eq.(13)]:

$$A^2 = E \left[\frac{E_2}{E_1 \cdot \alpha^2 + N_{02}} \right] \quad (3.7)$$

На овој начин релето со променливо засилување (3.4) и полу-слепото реле (3.7) во просек внесуваат исто засилување. За рејлиев фединг (1.22) факторот на засилување даден со (3.7) се сведува на:

$$A^2 = \int_0^\infty \frac{E_2}{N_{02} \cdot (\gamma_1 + 1)} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot e^{-\frac{\gamma_1}{\gamma}} d\gamma \quad (3.8)$$

Изразот (3.8) доколку се употреби дефиницијата за експоненцијален интеграл [39, eq. (5.1.1)] се сведува на:

$$A^2 = \frac{E_2}{E_1 \cdot \Omega} \cdot e^{\frac{1}{\bar{\gamma}_1}} \cdot E_1 \left(\frac{1}{\bar{\gamma}_1} \right) \quad (3.9)$$

Следователно за C добиваме:

$$C = \frac{E_2}{A^2 N_{02}} = \frac{\cancel{E_2}}{N_{02} \cdot \frac{\cancel{E_2}}{E_1 \cdot \Omega} \cdot e^{\frac{1}{\bar{\gamma}_1}} \cdot E_1 \left(\frac{1}{\bar{\gamma}_1} \right)} = \frac{(E_1 \cdot \Omega) / N_{02}}{e^{\frac{1}{\bar{\gamma}_1}} \cdot E_1 \left(\frac{1}{\bar{\gamma}_1} \right)} = \frac{\bar{\gamma}_1}{e^{\frac{1}{\bar{\gamma}_1}} \cdot E_1 \left(\frac{1}{\bar{\gamma}_1} \right)} \quad (3.10)$$

каде $\bar{\gamma}_1 = E_1 \cdot \Omega / N_{02}$ е средниот однос сигнал-шум за делницата од изворот до дестинацијата. Доколку (3.10) се замени во (3.6) ќе се добие:

$$\gamma_{eq2} = \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_2}{\gamma_2 + \bar{\gamma}_1 / [e^{1/\bar{\gamma}_1} E_1 (1/\bar{\gamma}_1)]} \quad (3.11)$$

Во трудот [6] е покажано дека за средни до големи вредности на средниот однос сигнал-шум, системот со променливо засилување (3.4) покажува подобри перформанси од системот со фиксно засилување (3.9). Во истиот труд е покажано дека системот со релей со фиксно засилување имаат подобри перформанси во поглед на веројатноста на испад од релеите со променливо засилување за мали до средни вредности на средниот однос сигнал-шум. Ова се должи на фактот дека релеите со променливо засилување имаат максимално засилување E_2/N_{02} во случај кога α е многу мало, што е релативно чест случај во регионот на мали до средни вредности на средниот однос сигнал-шум. Овој регион може да се прошири и на десно со зголемување на прагот γ_{th} (види (1.7)).

3.2 Приеман и предавателен диверзитет

Системите кои имаат повеќе антени во приемникот велиме дека имаат приеман диверзитет, а системите кои имаат повеќе антени во предавателот велиме дека имаат предавателен диверзитет. Од системите со приеман диверзитет во оваа глава ќе ги разгледуваме системи кои во дестинацијата користат комбинирање со максимален сооднос (анг. MRC - Maximum Ratio Combiner). За таа цел ќе разгледуваме систем со N приемни антени во дестинацијата и една предавателна антена во изворот.

Во i -та приемна антена приемниот сигнал е:

$$y_i = h_i x + n_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.12)$$

Каде h_i е комплексна случајна променлива која го опишва федингот во каналот од предавателната антена до i -та приемна антена, x е испратениот симбол и n_i е шумот во i -та приемна антена. Изразот (3.12) може да се претстави со користење на матрици:

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}x + \mathbf{n} \quad (3.13)$$

каде:

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T \quad \mathbf{h} = [h_1, h_2, \dots, h_N]^T \quad \mathbf{n} = [n_1, n_2, \dots, n_N]^T \quad (3.14)$$

Доколку во дестинацијата се користи MRC естимацијата на испратениот симбол се добива на следниот начин:

$$\tilde{x} = \frac{\mathbf{h}^H \cdot \mathbf{y}}{\mathbf{h}^H \cdot \mathbf{h}} = \frac{\mathbf{h}^H \cdot \mathbf{h} \cdot x}{\mathbf{h}^H \cdot \mathbf{h}} + \frac{\mathbf{h}^H \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{h}^H \cdot \mathbf{h}} = x + \frac{\mathbf{h}^H \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{h}^H \cdot \mathbf{h}} \quad (3.15)$$

каде:

$$\mathbf{h}^H \cdot \mathbf{h} = \sum_{i=1}^N |h_i|^2 \quad (3.16)$$

Доколку се претпостави дека шумот има нулта средна вредност и варијанса N_0 , компонентите на шумот во различни временски интервали се идентично распределени и меѓусебно независни (i.i.d - Independent and Identically Distributed) и E_s е средната испратена моќност по симбол, од изразот (3.15) може да се добие моменталниот однос сигнал-шум на овој систем:

$$\gamma = \frac{E_s}{E \left[\left(\sum_{i=1}^N h_i^* n_i \right)^2 \right]} \cdot \left(\sum_{i=1}^N |h_i|^2 \right)^2 = \frac{E_s}{N_0 \cdot \sum_{i=1}^N |h_i|^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^N |h_i|^2 \right)^2$$

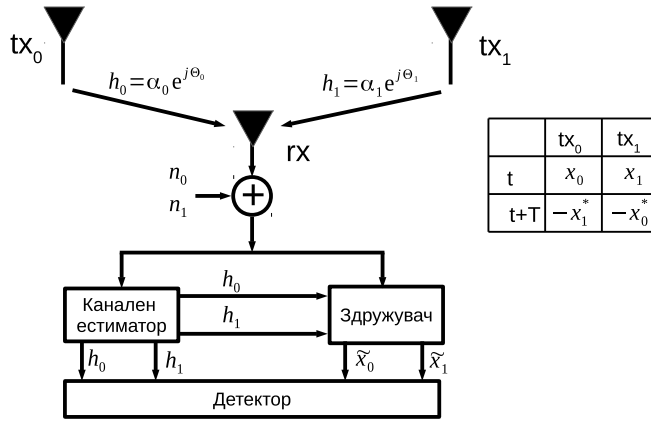
$$\gamma = \frac{E_s}{N_0} \cdot \sum_{i=1}^N |h_i|^2 \quad (3.17)$$

Доколку средната квадратна вредности на федингот е: $E[|h_{ij}|^2] = 1$, средниот однос сигнал-шум е:

$$\bar{\gamma} = E[\gamma] = N \cdot \frac{E_s}{N_0} = N \cdot \bar{\gamma}_0 \quad (3.18)$$

Каде $\bar{\gamma}_0 = E_s/N_0$ е средниот однос сигнал-шум на системот со една предавателна и една приемна антена. Од (3.18) може да се заклучи дека средниот однос сигнал-шум во систем со N приемни антени во дестинацијата е N пати поголем од средниот однос сигнал-шум од системот со една предавателна и една приемна антена.

Во исклучителниот труд на С. М. Аламути [17] е покажано дека е можно да се генерира иста вкава добивка со користење на систем со *предавателен диверзитет*. На сликата 3.2 е прикажан таков систем со две предавателни и една една приемна антена.



Слика 3.2: Систем со предавателен диверзитет и една антена во дестинацијата

Се претпоставува дека влијанието на федингот во каналот е моделиран со комплексен мултипликативен коефициент h_0 во едната предавателна антена и со h_1 во другата предавателна антена. Се претпоставува дека федингот е константен во два последователни симболи т.е.:

$$h_0(t) = h_0(t+T) = h_0 = \alpha_0 \cdot e^{j\theta_0} \quad h_1(t) = h_1(t+T) = h_1 = \alpha_1 \cdot e^{j\theta_1} \quad (3.19)$$

каде T е времетраење на симболот. Во овој случај приемниот сигнал е:

$$r_0 = r(t) = h_0 x_0 + h_1 x_1 + n_0 \quad r_1 = r(t+T) = -h_0 x_1^* + h_1 x_0^* + n_1 \quad (3.20)$$

каде r_0 и r_1 се сигналите во приемната антена во моментот t и $t+T$, а n_0 и n_1 се комплексни случајни променливи кои го претставуваат шумот во приемникот и интерференцијата.

Здружувачот (анг. combiner) на слика 3.2 ги дава на излез следниве два здружени сигнали кои потоа се испраќаат до детекторот:

$$\tilde{x}_0 = h_0^* r_0 + h_1 r_1^* \quad \tilde{x}_1 = h_1^* r_0 - h_0 r_1^* \quad (3.21)$$

Доколку се заменат (3.19) и (3.20) во (3.21) се добива:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= \alpha_0 e^{-j\theta_0} \cdot (\alpha_0 e^{j\theta_0} \cdot x_0 + \alpha_1 \cdot e^{j\theta_1} \cdot x_1 + n_0) + \alpha_1 \cdot e^{j\theta_1} (-\alpha_0 \cdot e^{j\theta_0} \cdot x_1^* + \alpha_1 \cdot e^{j\theta_1} \cdot x_0^* + n_1)^* = \\ &= \alpha_0^2 \cdot x_0 + \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot e^{j(\theta_1 - \theta_0)} \cdot x_1 + n_0 \cdot \alpha_0 e^{-j\theta_0} + \alpha_1 \cdot e^{j\theta_1} (-\alpha_0 \cdot e^{-j\theta_0} \cdot x_1 + \alpha_1 \cdot e^{-j\theta_1} \cdot x_0 + n_1^*) = \\ &= \alpha_0^2 \cdot x_0 + \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot e^{j(\theta_1 - \theta_0)} \cdot x_1 + n_0 \cdot \alpha_0 e^{-j\theta_0} - \alpha_1 \cdot \alpha_0 \cdot e^{j(\theta_1 - \theta_0)} \cdot x_1 + \alpha_1^2 \cdot x_0 + n_1^* \alpha_1 \cdot e^{j\theta_1} = \end{aligned}$$

$$= (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) \cdot x_0 + h_0^* \cdot n_0 + h_1 \cdot n_1^* \quad (3.22)$$

На сличен начин се добива естимацијата на вториот испратен симбол:

$$\tilde{x}_1 = (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) \cdot x_1 - h_0 n_1^* + h_1^* \cdot n_0. \quad (3.23)$$

Од изразот (3.22) односно (3.23) може да се добие моменталниот однос сигнал-шум:

$$\gamma = \frac{(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^2 \cdot E_s}{(\alpha_0^2 + \alpha_1^2) \cdot N_0} = \frac{E_s}{N_0} \cdot \sum_{i=0}^1 |h_i|^2 \quad (3.24)$$

Од (3.24) може да се забележи дека моменталниот однос сигнал-шум на системот со предавателен диверзитет е идентичен со изразот (3.17) што се добива со системот со две гранки во дестинацијата кој користи комбинирање со максимален сооднос. Оваа метода воведена од С. М. Аламути потоа ќе се генерализира и ќе стане позната како просторно-временско блоковско кодирање (STBC).

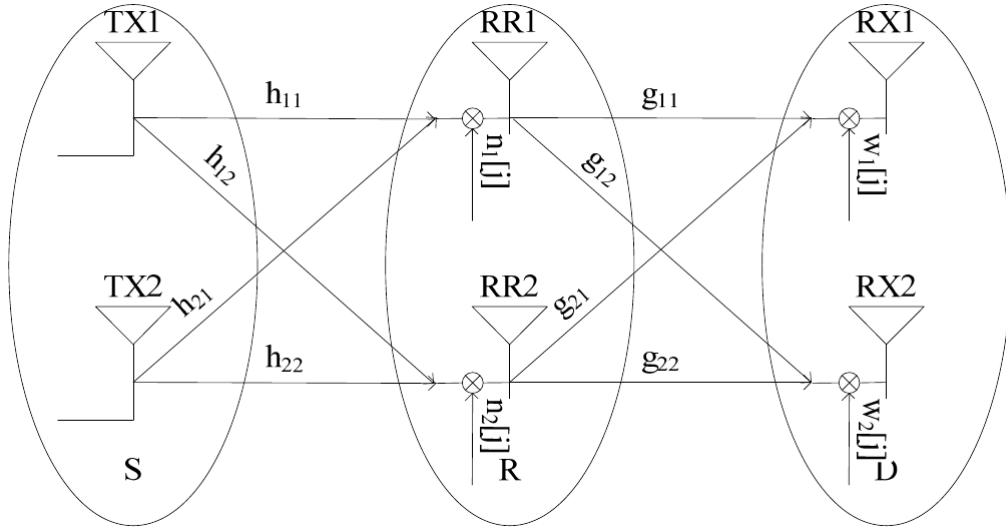
3.3 Модел на каналот

Во оваа глава ќе анализираме МИМО релејни канали кои ја користат методата на Аламути во три различни системски конфигурации со две делници: 2x1x1 МИМО релеен канал (каде само изворот е екипиран со две антени), 2x2x1 МИМО релеен канал (каде изворот и релето се екипирани со две антени), и 2x2x2 МИМО релеен канал (каде изворот, релето и дестинацијата се екипирани со две антени). На слика 3.3 е прикажан 2x2x2 МИМО релеен канал (како најопшта конфигурација која ги вклучува другите два специјални случаи), каде изворот, релето и дестинацијата се обележани со S , R и D , соодветно. Делниците S - R и R - D се претпоставува дека се независни 2x2 МИМО Релејни канали со соодветни канални матрици: $H = [h_{11}, h_{12}; h_{21}, h_{22}]$ и $G = [g_{11}, g_{12}; g_{21}, g_{22}]$. Елементите h_{ij} и g_{ij} на овие матрици ги претставуваат каналните коефициенти помеѓу соодветните парови од i -та предавателна антена и j -та приемна антена, и се смета дека се независни циркуларно-симетрични комплексни Гаусови случајни променливи со нулта средна вредност и единична варијанса. Затоа, квадратот на амплитудата на сигналот пренесен преку каналот h_{ij} (g_{ij}) ја следи експоненцијалната опаѓачка функција на густина на веројатност [35] со идентични средни квадратни вредности $E[|h_{ij}|^2] = E[|g_{ij}|^2] = 1$. Предавателните моќности од секоја предавателна антена се сметаат за идентични и еднакви на E . Релето и дестинацијата имаат целосно познавање на CSI за претходната делница и не постои директна комуникација помеѓу изворот и дестинацијата.

Согласно слика 3.3 ќе разгледуваме МИМО полудуплексен релеен канал каде комуникацискиот процес е поделен во две фази (фаза 1 и фаза 2). Изворот S испраќа кон R за време на фазата 1, потоа R испраќа кон D за време на фаза 2. Ќе претпоставиме дека изворот S користи Аламути OSTBC. Поточно, групи од 2 независни симболи (x_1 и x_2) се испраќаат преку две предавателни антени (со користење на ортогоналната предавателна матрица $[x_1, x_2; -x_2^*, x_1^*]$) во два последователни симболни интервали од фазата 1 (симболни интервали 1 и 2). За време на фазата 2, R испраќа два засилени раздвоени симболи за време на симболните интервали 3 и 4. Во овој контекст се и ознаките во слика 3.3 каде подзнакот во ознаките за шумот $n_i[j]$, $w_i[j]$ означува приемна антена, а индексот во средните загради означува симболен интервал.

3.3.1 2x1x1 МИМО канал со две делници

За анализа на 2x1x1 системот претпоставуваме дека само една антена во релето и дестинацијата е активна. Во симболните интервали 1 и 2 приемните сигнали во една



Слика 3.3: МИМО релеен канал со две делници и две антени во јазлите

антена во релето (означени со подзнакот) се дадени со:

$$y_1 [1] = \sqrt{E_s} (h_{11} \cdot x_1 + h_{21} \cdot x_2) + n_1 [2], \quad (3.25)$$

$$y_1 [2] = \sqrt{E_s} (-h_{11} \cdot x_2^* + h_{21} \cdot x_1^*) + n_1 [2], \quad (3.26)$$

каде $n_1 [1]$ и $n_1 [2]$ го означуваат додавачкиот комплексен бел Гаусов шум (AWGN) во симболниот интервал 1 и 2 во релејната антена, и E_s е предавателната моќност на секоја од двете предавателни антени во изворот¹. Гаусовиот шум има нулта средна вредности и варијанса N_0 . Со користење на $y_1 [1]$ и $y_1 [2]$, релето ги раздвојува испратените симболи x_1 и x_2 (со мултипликација на примениот сигнал со матрицата за раздвојување $[h_{11}^*, h_{21}; h_{21}^*, h_{11}]$) но при тоа релето не врши детекција (види глава 3.3.2). После раздвојувањето релето ги засилува раздвоените симболи \tilde{x}_1 и \tilde{x}_2 со засилувачки фактор A_1 и ги испраќа кон дестинацијата преку делницата $R-D$ во симболните интервали 3 и 4.

Оваа релејна метода ја нарекуваме раздвои-и-проследи (DCF) релејна метода. Во споредба со декодирај-и-проследи (DF), DCF методата поедноставно се имплементира, а притоа дава споредливи перформанси (како што ќе биде презентирано во глава 3.5). Раздвоените симболи во релето се:

$$\tilde{x}_1 = h_{11}^* y_1 [1] - h_{21} y_1^* [2] = \sqrt{E_s} \Delta_1 x_1 + \xi_1, \quad (3.27)$$

$$\tilde{x}_2 = h_{21}^* y_1 [1] - h_{11} y_1^* [2] = \sqrt{E_s} \Delta_1 x_2 + \xi_2, \quad (3.28)$$

каде:

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \|H\|_F^2 &= |h_{11}|^2 + |h_{21}|^2, & \xi_1 &= h_{11}^* n_1 [1] + h_{21} n_1^* [2] \\ \xi_2 &= h_{21}^* n_1 [1] - h_{11} n_1^* [2]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Во (3.29) $\Delta_1 = \|H\|_F^2$ претставува квадрат на Фробениусовата норма за 2×1 каналниот вектор за $S-R$ делницата, и ξ_1 и ξ_2 се додавачките гаусови компоненти на шумот кои се со нулта средна вредност и варијанса $\Delta_1 N_0$. После засилувањето, R ги испраќа раздвоените симболи \tilde{x}_1 и \tilde{x}_2 сервиски преку една антена кон D во двата последователни симболни

¹Се претпоставува дека средна моќност на симболите $E[x_i^2] = 1$

интервали 3 и 4. По завршувањето на симболните интервали 3 и 4, приемните сигнали во дестинацијата се:

$$r_1 [3] = A_1 g_{11} \tilde{x}_1 + w_1 [3], \quad (3.30)$$

$$r_1 [4] = A_1 g_{11} \tilde{x}_2 + w_1 [4], \quad (3.31)$$

каде A_1 е факторот на засилување на релето, а $w_1 [j]$ го означува AWGN-от во едната приемна антена во дестинацијата D кој е со нулта средна вредност и варијанса N_0 .

Во понатамошното излагање, фактор на засилување и квадратот на Фробениусовата норма на S - R и R - D делниците за секоја системска конфигурација ќе бидат означени со соодветен индекс k , т.е., со g_k, Δ_k и Λ_k , соодветно. Вредностите на индексот k ($k = 1, 2$ и 3) означуваат $2 \times 1 \times 1$, $2 \times 2 \times 1$ и $2 \times 2 \times 2$ системски конфигурации, соодветно (слика 3.3).

Имајќи во предвид дека е потребно познавање на CSI за првата делница за имплементација на декодерот на Аламути, во релето R избравме релеен метод со променливо засилување за да го инвертираме ефектот на федингот во делницата S - R со дополнително ограничување на предавателната моќност на релето доколку сигналот во таа делница е многу ослабнат. Врз база на [6] и [33] и изборот на променливо засилување во релето согласно [6, eq.(4)] за $2 \times 1 \times 1$ системот го избираме следново засилување:

$$A_1 = \sqrt{\frac{E_R}{E_I \Delta_1^2 + \Delta_1 N_0}} \quad (3.32)$$

каде E_I и E_R се предавателните моќности на една антена во изворот S и релето R .

Во дестинацијата D , приемниот сигнал [35] се пропушта низ прилагоден филтер [36], [37] (бидејќи D ги знае каналните коефициенти во делницата R - D), после што дестинацијата ги детектира двата независни симболи (\tilde{x}_1 и \tilde{x}_2) во нивните симболни интервали 3 и 4.

3.3.2 Раздвојување за 222 OSTBC за 2×1 систем

Во оваа глава ќе спроведе анализата4системот разгледуван во глава 3.3.1 со користење на линеарна алгебра, што е неопходно за ефикасна имплементација на системот во софтверските пакети за нумеричка и алгебарска анализа. Векторот кој ги претставува симболите испратени во изворот \mathbf{X} и каналната матрица (вектор) \mathbf{H} се:

$$\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2]; \quad \mathbf{H} = [h_{11} \quad h_{21}]; \quad (3.33)$$

За разлика од глава 3.3.1 во оваа глава заради поедноставна анализа претпоставуваме дека симболите не се со единечна моќност т.е. моќноста $E[x_i^2] = E_s$. Шумот во делницата од изворот до релето и помошната променлива за шумот се:

$$\mathbf{N} = [n_1 \quad n_2] \quad \mathbf{N}_a = [n_1 \quad n_2^*] \quad (3.34)$$

Кодна матрица за 2×1 Аламути кодот и нејзината транспонрана матрица се:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2^* & x_1^* \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2^* \\ x_2 & x_1^* \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Еквивалентната виртуелна канална матрица (анг. EVCM - Equivalent Virtual Channel Matrix) (Ω) и нејзината хермитска матрица се дадени со:

$$\Omega = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21}^* \\ h_{21} & -h_{11}^* \end{bmatrix} \quad \Omega^H = \begin{bmatrix} h_{11}^* & h_{21}^* \\ h_{21} & -h_{11} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Приемниот сигнал во релето е:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} x_1 h_{11} + x_2 h_{21} + n_1 \\ -x_2^* h_{11} + x_1^* h_{21} + n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

каде индексот i на приемниот сигнал во релето y_i го означува симболниот интервал. Модифицираната верзија од сигналот даден со (3.37) е:

$$\mathbf{Y}_a = \begin{bmatrix} y_1 & y_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 h_{11} + x_2 h_{21} + n_1; & -x_2 h_{11}^* + x_1 h_{21}^* + n_2^* \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Раздвоениот сигнал во релето е:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{X}} &= \mathbf{Y}_a \cdot \mathbf{\Omega}^H = \begin{bmatrix} y_1 & y_2^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{11}^* & h_{21}^* \\ h_{21} & -h_{11} \end{bmatrix} = \\ &= [y_1 h_{11}^* + y_2^* h_{21}, y_1 h_{21}^* - y_2^* h_{11}] = \\ &= \left[(h_{11}^2 + h_{21}^2) x_1 + n_2^* h_{21} + n_1 h_{11}^*, (h_{11}^2 + h_{21}^2) x_2 + n_1 h_{21}^* - n_2^* h_{11} \right] \end{aligned} \quad (3.39)$$

Компонентата на шумот во раздвоениот сигнал може да се добие и директно без да се пресметува (3.39):

$$\mathbf{\Theta} = \mathbf{N}_a \cdot \mathbf{\Omega}^H = \begin{bmatrix} n_1 h_{11}^* + n_2^* h_{21} & n_1 h_{21}^* - n_2^* h_{11} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Модифицираната верзија на приемниот сигнал во релето \mathbf{Y}_a може да се добие на алтернативен начин со користење на еквивалентната виртуелна канална матрица :

$$\mathbf{Y}_a = \mathbf{X} \cdot \mathbf{\Omega} + \mathbf{N}_a = \begin{bmatrix} x_1 h_{11} + x_2 h_{21} + n_1; & -x_2 h_{11}^* + x_1 h_{21}^* + n_2^* \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

3.3.3 2x2x1 и 2x2x2 МИМО системи со две делници

За овие две системски конфигурации, приемниот сигнал во антената 1 во симболниот интервал 1 и 2 се дадени со:

$$\begin{aligned} y_1 [1] &= \sqrt{E_s} h_{11} \cdot x_1 + \sqrt{E_s} h_{21} \cdot x_2 + n_1 [1], \\ y_1 [2] &= -\sqrt{E_s} h_{11} \cdot x_2^* + \sqrt{E_s} h_{21} \cdot x_1^* + n_1 [2]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Сигналите во антената 2 од релето во симболните интервали 1 и 2 се:

$$\begin{aligned} y_2 [1] &= \sqrt{E_s} h_{12} \cdot x_1 + \sqrt{E_s} h_{22} \cdot x_2 + n_2 [1], \\ y_2 [2] &= -\sqrt{E_s} h_{12} \cdot x_2^* + \sqrt{E_s} h_{22} \cdot x_1^* + n_2 [2], \end{aligned} \quad (3.43)$$

каде $n_i [j]$ се AWGN компонентите во првата и втората антена во симболните интервали 1 и 2. Раздвоените сигнали во релето се (види глава 3.3.4):

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= h_{11}^* y_1 [1] + h_{21} y_1^* [2] + h_{12}^* y_2 [1] + h_{22} y_2^* [2] = \\ &= \sqrt{E_s} \Delta_2 x_1 + \eta_1, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2 &= h_{21}^* y_1 [1] - h_{11} y_1^* [2] + h_{22}^* y_2 [1] - h_{12} y_2^* [2] \\ &= \sqrt{E_s} \Delta_2 x_2 + \eta_2, \end{aligned} \quad (3.45)$$

Каде:

$$\Delta_2 = \Delta_3 = |h_{11}|^2 + |h_{12}|^2 + |h_{21}|^2 + |h_{22}|^2 \quad (3.46)$$

$$\eta_1 = h_{11}^* n_1 [1] + h_{21} n_1^* [2] + h_{12}^* n_2 [1] + h_{22} n_2^* [2], \quad (3.47)$$

$$\eta_2 = h_{21}^* n_1 [1] - h_{11} n_1^* [2] + h_{22}^* n_2 [1] - h_{12} n_2^* [2], \quad (3.48)$$

Каде η_1 и η_2 означуваат циркуларно-симетричен комплексен AWGN со нулта средна вредност и варијанса $\Delta_2 N_0 = \Delta_3 N_0$. Сигналите \tilde{x}_1 и \tilde{x}_2 потоа се засилуваат со соодветниот релеен фактор на засилување. Слично на 2x1x1 конфигурацијата, ги земаме во предвид (3.44), (3.45) и [6, eq.(4)] и за 2x2x1 и 2x2x2 системите го избираме следниот фактор на засилување :

$$A_2 = A_3 = \sqrt{\frac{E_R}{E_I \cdot \Delta_2^2 + \Delta_2 N_0}}. \quad (3.49)$$

После засилувањето, во симболните интервали 3 и 4 релето R ги испраќа симболите \tilde{x}_1 и \tilde{x}_2 кон дестинацијата со користење на Аламути OSTBC преку неговите две антени. Дестинацијата D го раздвојува сигналот примен од R во овие два симболни интервали. Овие раздвоени симболи потоа се испраќаат во детекторот на D , чии перформанси ќе бидат мерени од аспект на ОР и ЕР.

Во случај на 2x2x1 систем раздвоените симболи во дестинацијата се (види глава 3.3.4):

$$\hat{x}_1 = A_2 \Lambda_2 \tilde{x}_1 + \zeta_1, \quad (3.50)$$

$$\hat{x}_2 = A_2 \Lambda_2 \tilde{x}_2 + \zeta_2, \quad (3.51)$$

каде:

$$\Lambda_2 = \|G\|_F^2 = |g_{11}|^2 + |g_{21}|^2 \quad (3.52)$$

$$\zeta_1 = g_{11}^* w_1 [3] - g_{21} w_1^* [4]. \quad (3.53)$$

$$\zeta_2 = g_{21}^* w_1 [3] - g_{11} w_1^* [4]. \quad (3.54)$$

Во (3.52) $\Lambda_2 = \|G\|_F^2$ го претставува квадрат на Фробениусовата норма на 2x1 каналниот вектор на делницата $R-D$, ζ_1 и ζ_2 се додавачките Гаусови компоненти на шумот со нулта средна вредности и варијанса $\Lambda_2 N_0$. Во случај на 2x2x2 МИМО систем раздвоените симболи во дестинацијата се:

$$\hat{x}_1 = A_3 \Lambda_3 \tilde{x}_1 + \mu_1, \quad (3.55)$$

$$\hat{x}_2 = A_3 \Lambda_3 \tilde{x}_2 + \mu_2, \quad (3.56)$$

каде:

$$\Lambda_3 = \|G\|_F^2 = |g_{11}|^2 + |g_{12}|^2 + |g_{21}|^2 + |g_{22}|^2$$

$$\mu_1 = g_{11}^* w_1 [3] + g_{21} w_1^* [4] + g_{12}^* w_2 [3] + g_{22} w_2^* [4], \quad (3.57)$$

$$\mu_2 = g_{21}^* w_1 [3] - g_{11} w_1^* [4] + g_{22}^* w_2 [3] - g_{12} w_2^* [4]. \quad (3.58)$$

Во изразите (3.57) и (3.58), μ_1 и μ_2 означуваат гаусов шум со нулта средна вредност и варијанса $\Delta_3 N_0$ и Δ_3 е Фробениусовата норма на 2x2 каналната матрица на делницата $R-D$.

3.3.4 Раздвојување за 222 OSTBC за 2x2 систем

Во оваа глава анализата на првата делница на системот разгледуван во глава 3.3.3 ќе ја спроведеме со користење на линеарна алгебра. Векторот кој ги претставува симболите испратени во изворот X и каналната матрица H се:

$$\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2] \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Шумот во делницата од изворот до релето и помошната променлива за шумот се:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_a = [n_{11} \quad n_{12}^* \quad n_{21} \quad n_{22}^*] \quad (3.60)$$

Заради едноставна претстава во облик на матрици и вектори во оваа анализа вториот индекс j за шумот n_{ij} го означува симболниот интервал. Во просторно-временскиот код на Аламути [17], два последователни симболи $[x_1, x_2]$ се мапираат во матрица на кодни зборови \mathbf{C} согласно следново мапирање:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2^* & x_1^* \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2^* \\ x_2 & x_1^* \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

За разлика од глава 3.3.3 во оваа глава заради поедноставна анализа претпоставуваме дека симболите не се со единечна моќност т.е. моќноста $E[x_i^2] = E_s$. Со оваа дефиниција на матрицата \mathbf{C} , редиците означуваат временски диверзитет, а колоните означуваат просторен диверзитет и примениот сигнал после $L = 2$ употреби на каналот може да се изрази во следнава форма:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} x_1 h_{11} + x_2 h_{21} + n_{11} & x_1 h_{12} + x_2 h_{22} + n_{21} \\ -x_2^* h_{11} + x_1^* h_{21} + n_{12} & -x_2^* h_{12} + x_1^* h_{22} + n_{22} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Еквивалентната виртуелна канална матрица Ω и нејзината хермитска матрица се:

$$\Omega = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21}^* & h_{12} & h_{22}^* \\ h_{21} & -h_{11}^* & h_{22} & -h_{12}^* \end{bmatrix} \quad \Omega^H = \begin{bmatrix} h_{11}^* & h_{21}^* \\ h_{21} & -h_{11} \\ h_{12}^* & h_{22}^* \\ h_{22} & -h_{12} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Симболите во првата антена во моментот t и $t + T_s$, каде T_s е симболниот интервал, се:

$$y_{11} = x_1 h_{11} + x_2 h_{21} + n_{11} \quad y_{12} = -x_2^* h_{11} + x_1^* h_{21} + n_{12}, \quad (3.64)$$

а симболите во втората антена од релето во моментот t и $t + T_s$ се:

$$y_{21} = x_1 h_{12} + x_2 h_{22} + n_{21} \quad y_{22} = -x_2^* h_{12} + x_1^* h_{22} + n_{22}. \quad (3.65)$$

каде вториот индекс j во ознаката на приемниот сигнал во релето y_{ij} го означува симболниот интервал.

Модифицираната верзија од сигналот даден со (3.37) е:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_a &= [Y_{11}, Y_{12}^*, Y_{21}, Y_{22}^*] = \\ &= [x_1 h_{11} + x_2 h_{21} + n_{11}, -x_2^* h_{11} + x_1^* h_{21} + n_{12}, \\ &\quad x_1 h_{12} + x_2 h_{22} + n_{21}, -x_2^* h_{12} + x_1^* h_{22} + n_{22}] \end{aligned} \quad (3.66)$$

Раздвоенот сигнал во релето е:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{Y}_a \cdot \Omega^H = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2] \quad (3.67)$$

$$\tilde{x}_1 = (|h_{11}|^2 + |h_{21}|^2 + |h_{12}|^2 + |h_{22}|^2) x_1 + h_{11}^* n_{11} + h_{21} n_{12}^* + h_{12}^* n_{21} + h_{22} n_{22}^* \quad (3.68)$$

$$\tilde{x}_2 = (|h_{11}|^2 + |h_{21}|^2 + |h_{12}|^2 + |h_{22}|^2) x_2 + h_{21}^* n_{11} - h_{11} n_{12}^* + h_{22}^* n_{21} - h_{12} n_{22}^* \quad (3.69)$$

Компонентата на шумот во раздвоениот сигнал може да се добие и директно без да се пресметува (3.39):

$$\Theta = \mathbf{N}_a \cdot \mathbf{\Omega}^H = \begin{bmatrix} h_{11}^* n_{11} + h_{21} n_{12}^* + h_{12}^* n_{21} + h_{22} n_{22}^* & ; h_{21}^* n_{11} - h_{11} n_{12}^* + h_{22}^* n_{21} - h_{12} n_{22}^* \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Модифицираната верзија на приемниот сигнал во релето \mathbf{Y}_a може да се добие на алтернативен начин со користење на еквивалентната виртуелна канална матрица :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_a &= \mathbf{X} \cdot \mathbf{\Omega} + \mathbf{N}_a = \\ &= \begin{bmatrix} x_1 h_{11} + x_2 h_{21} + n_{11}, & x_1 h_{21}^* - x_2 h_{11}^* + n_{12}^*, & x_1 h_{12} + x_2 h_{22} + n_{21}, & x_1 h_{22}^* - x_2 h_{12}^* + n_{22}^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.71)$$

3.4 Веројатност на испад

Веројатноста на испад е дефинирана како веројатност дека моменталниот SNR ќе падне под одреден претходно дефиниран праг - γ_{th} :

$$P_{out} = P(\gamma_k < \gamma_{th}) = 1 - P(\gamma_k > \gamma_{th}) = 1 - P\left(\frac{1}{\gamma_k} < \frac{1}{\gamma_{th}}\right) \quad (3.72)$$

каде γ_k го претстаува еквивалентниот крај-крај моментален SNR на релејниот канал со две делници. Вредностите на индексот k ($k = 1, 2$ or 3) означуваат 2x1x1, 2x2x1 и 2x2x2 системски конфигурации, соодветно (слика 3.3). Подолу ќе го изведеме крај-крај односот сигнал-шум за 2x1x1, 2x2x1, и 2x2x2 релеен канал со две делници. За 2x1x1 МИМО систем, ако се земат во предвид (3.27) и (3.30) приемниот сигнал ов дестинацијата во симболниот интервал 3 е:

$$r_1 [3] = A_1 g_{11} \tilde{x}_1 + w_1 [3] = A_1 g_{11} \left(\sqrt{E_s} \Delta_1 x_1 + \xi_1 \right) + w_1 [3] = \quad (3.73)$$

$$= A_1 g_{11} \sqrt{E_s} \Delta_1 x_1 + A_1 g_{11} \xi_1 + w_1 [3]. \quad (3.74)$$

Соодветниот премен сигнал во симболниот интервал 4, $r_1 [4]$, го опфаќа симболот x_2 , но дава ист крај-крај однос сигнал-шум. Затоа, следново изведување на крај-крај односот сигнал-шум се однесува на двата симболи. Моменталната моќност на сигналот е:

$$P_s = \left| A_1 g_{11} \sqrt{E_s} \Delta_1 \right|^2 = E_s \cdot A_1^2 \cdot |g_{11}|^2 \cdot \Delta_1^2 \quad (3.75)$$

и моменталната моќност на шумот е:

$$P_N = |A_1 g_{11}|^2 \cdot (|h_{11}|^2 N_0 + |h_{21}|^2 N_0) + N_0 = A_1^2 |g_{11}|^2 \Delta_1 N_0 + N_0. \quad (3.76)$$

Оттука крај-крај моменталниот однос сигнал-шум на влез од детекторот од D за 2x1x1 за релеен канал со две делници е:

$$\gamma_1 = \frac{P_s}{P_N} = \frac{E_s}{N_0} \cdot \frac{A_1^2 |g_{11}|^2 \Delta_1^2}{A_1^2 |g_{11}|^2 \Delta_1 + 1}. \quad (3.77)$$

каде индексот 1 во γ_1 се однесува на 2x1x1 системска конфигурација. За 2x2x1 МИМО систем, ако го замениме (3.44) во (3.50) се добива:

$$\hat{x}_1 = A_2 \Lambda_2 \Delta_2 \sqrt{E_s} x_1 + A_2 \Lambda_2 \eta_1 + \zeta_1. \quad (3.78)$$

Ако се следат истите чекори како во (3.75)-(3.77) почнувајќи од (3.78) лесно се покажува дека моменталниот крај-крај однос сигнал-шум за 2x2x1 систем е:

$$\gamma_2 = \frac{E_s}{N_0} \cdot \frac{A_2^2 \Lambda_2 \Delta_2^2}{A_2^2 \Lambda_2 \Delta_2 + 1}, \quad (3.79)$$

На сличен начин може да се покаже дека за 2x2x2 систем крај-крај SNR-от е:

$$\gamma_3 = \frac{E_s}{N_0} \cdot \frac{A_3^2 \Lambda_3 \Delta_3^2}{A_3^2 \Lambda_3 \Delta_3 + 1}. \quad (3.80)$$

За полесна математичка анализа на релејниот канал со две делници, ќе ги апроксимираме A_1 , A_2 и A_3 од (3.32) и (3.49) со [6]:

$$A_k \cong \frac{1}{\Delta_k}. \quad (3.81)$$

Со промена на (3.81) во (3.77),(3.79) или (3.80) се добива апроксимативниот моментален крај-крај SNR - γ_k во следнава форма:

$$w_k = \frac{1}{\gamma_k} = \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot \Delta_k} + \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot \Lambda_k} = u_k + v_k, \quad (3.82)$$

каде $\bar{\gamma} = E_s/N_0$ е средниот однос сигнал-шум, $U_k = 1/(\bar{\gamma}\Delta_k)$ и $V_k = 1/\bar{\gamma}\Lambda_k$. Имајќи во предвид дека моменталната моќност на каналот ја следи експоненцијалната дистрибуција, Δ_k ја следи гама дистрибуција:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\theta}}, \text{ for } x \geq 0, \wedge \alpha, \theta > 0, \quad (3.83)$$

со единечен параметар на размер $\theta = 1$ и параметар на облик α . Бидејќи $E[|h_{ij}|^2] = E[|g_{ij}|^2] = 1$, функциите на густина на веројатност на квадратот на Фробениусовата норма за разгледуваните конфигурации се:

$$f_{\Delta_1}(x) = \frac{x}{\Gamma(2)} e^{-x}, \quad f_{\Delta_2}(x) = f_{\Delta_3}(x) = \frac{x^3}{\Gamma(4)} e^{-x}, \quad x \geq 0, \quad (3.84)$$

$$f_{\Lambda_1}(x) = e^{-x}, \quad f_{\Lambda_2}(x) = \frac{x}{\Gamma(2)} e^{-x}, x \geq 0 \quad f_{\Lambda_3}(x) = \frac{x^3}{\Gamma(4)} \cdot e^{-x}, \quad x \geq 0, \quad (3.85)$$

Со користење на функционална трансформација на случајните променливи $u_k = 1/(\bar{\gamma} \cdot \Delta_k)$ и $v_k = 1/(\bar{\gamma} \cdot \Lambda_k)$ може да се покаже дека тие ја следат инверзната гама функција на густина на веројатност:

$$f(x) = \frac{x^{-\alpha-1}}{\bar{\gamma}^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{1}{x\bar{\gamma}}}, \quad \text{for } x > 0, \wedge \alpha, \theta > 0, \quad (3.86)$$

со параметар на размер еднаков на $1/\bar{\gamma}$, затоа, нивните функции на густина на веројатност се дадени со:

$$f_{U_1}(x) = \frac{x^{-3}}{\bar{\gamma}^2 \Gamma(2)} e^{-\frac{1}{x\bar{\gamma}}}, \quad f_{U_2}(x) = f_{U_3}(x) = \frac{x^{-5}}{\bar{\gamma}^4 \Gamma(4)} e^{-\frac{1}{x\bar{\gamma}}} \quad (3.87)$$

$$f_{V_1}(x) = \frac{x^{-2}}{\bar{\gamma}} e^{-\frac{1}{x\bar{\gamma}}} \quad f_{V_2}(x) = \frac{x^{-3}}{\bar{\gamma}^2 \Gamma(2)} e^{-\frac{1}{x\bar{\gamma}}} \quad f_{V_3}(x) = \frac{x^{-5}}{\bar{\gamma}^4 \Gamma(4)} e^{-\frac{1}{x\bar{\gamma}}}, \quad x > 0, \quad (3.88)$$

Со помош на [38, eq.(3.471.9)] лесно се наоѓа дека функцијата за генерирање на моменти (MGF) за случајните променливи U_k и V_k е:

$$M(-s) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{s}{\bar{\gamma}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} K_{\alpha} \left(2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}}\right), \quad (3.89)$$

каде α го означува производот на предавателни антени и приемни антени $N_T \times N_R$ за дадената делница и K_{α} означува Беселова функција од втор тип и α -ти ред. Ако се земе во предвид (3.89) соодветните MGF-и за U_k и V_k за 2x1x1, 2x2x1 и 2x2x2 МИМО релеен канал се:

$$M_{U_1}(-s) = \frac{2}{\Gamma(2)} \frac{s}{\bar{\gamma}} K_2 \left(2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}}\right), \quad M_{U_2}(-s) = M_{U_3}(-s) = \frac{2}{\Gamma(4)} \cdot \left(\frac{s}{\bar{\gamma}}\right)^2 K_4 \left(2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}}\right) \quad (3.90)$$

$$M_{V_1}(-s) = 2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}} K_1 \left(2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}}\right), \quad M_{V_2}(-s) = \frac{2}{\Gamma(2)} \cdot \frac{s}{\bar{\gamma}} \cdot K_2 \left(2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}}\right) \quad (3.91)$$

$$M_{V_3}(-s) = \frac{2}{\Gamma(4)} \cdot \left(\frac{s}{\bar{\gamma}}\right)^2 \cdot K_4 \left(2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}}\right). \quad (3.92)$$

Со оглед на тоа дека првата и втората делница во релејниот канал се под влијание на независен Рејлиев фединг, U_k и V_k се независни случајни променливи и MGF-от од нивната сума е производ од нивните MGF-и:

$$M_{w_1} = \frac{4}{\Gamma(2)} \left(\frac{s}{\bar{\gamma}}\right)^{\frac{3}{2}} K_2 \left(2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}}\right) K_1 \left(2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}}\right), \quad (3.93)$$

$$M_{w_2}(-s) = \frac{4}{\Gamma(4)\Gamma(2)} \left(\frac{s}{\bar{\gamma}}\right)^3 K_4 \left(2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}}\right) K_2 \left(2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}}\right), \quad (3.94)$$

$$M_{w_3}(-s) = \frac{4}{\gamma^2(4)} \left(\frac{s}{\bar{\gamma}}\right)^4 \left(K_4 \left(2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}}\right)\right)^2 \quad (3.95)$$

Со оглед на тоа што го имаме MGF-от на $w_k = 1/\gamma_k$ за анализираните релејни канали со две делници можеме да ја најдеме ОР со користење на [35]:

$$P(\gamma_k < \gamma_{th}) = 1 - \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{M_{w_k}(-s)}{s} \right) \Big|_{1/\gamma_{th}}, \quad (3.96)$$

што претставува веројатност дека моменталниот крај-крај SNR ќе падне под претходно одреден праг γ_{th} . Операторот \mathcal{L}^{-1} означува инверзна Лапласова трансформација. Со користење на (3.93), (3.94) и (3.95) и Ојлеровата техника за нумеричка инверзија на Лапласовата трансформација, веројатноста на испад за сите три системски конфигурации може да се пронајде нумерички [35, Appendix 9B.1], [53]. Покрај тоа, може да се најдат точните изрази во затворена форма за ОР за 2x2x2 системската конфигурација. Од [54, eq.(3.16.6.6)] може да се најде инверзната Лапласова трансформација за изразот во заградите во (3.95):

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma^2(4)\bar{\gamma}^4}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{M_{w_3}(-s)}{s^4} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[2 \left(K_4 \left(\sqrt{\frac{2s}{\bar{\gamma}}} \right) \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{w_3} e^{\frac{-2}{\bar{\gamma}w_3}} K_4 \left(\frac{2}{\bar{\gamma}w_3} \right). \end{aligned} \quad (3.97)$$

Со користење на [34, eq.(9)] ОР може да се изрази како трет извод од инверзната Лапласова трансформација од количникот $M_{w_3}(-s)/s^4$:

$$P(\gamma_3 < \gamma_{th}) = 1 - \left\{ \frac{d^3}{dw_3^3} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{M_{w_3}(-s)}{s^4} \right] \right\} \Big|_{w_3 = \frac{1}{\gamma_{th}}} =$$

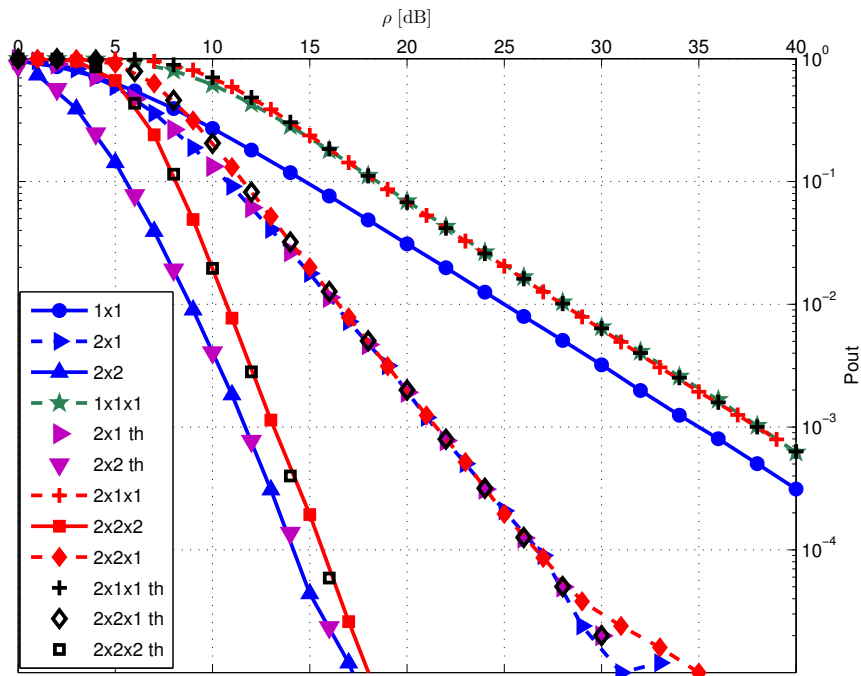
$$1 - \frac{2}{\gamma^2(4)\bar{\gamma}^4} \left\{ \frac{d^3}{dw_3^3} \left[\frac{e^{-\frac{2}{\bar{\gamma}w_3}}}{w_3} K_4 \left(\frac{2}{\bar{\gamma}w_3} \right) \right] \right\} \Big|_{w_3 = \frac{1}{\gamma_{th}}} \quad (3.98)$$

Изразот (3.98) може да се најде во затворена форма со користење на формулата за извод од модифицирана Беселова функција [39, eq. (9.6.29)] или со користење на систем за компјутерска алгебра². Во глава 4.3 ќе бидат прикажани многу точни апроксимации на веројатноста на испад кои можат да се користат наместо точниот израз (3.98).

3.5 Нумерички и симулациски резултати

Во оваа глава за системот од 3.3 ќе ги споредиме резултатите за ОР добиени со теоретската анализа во 3.4 со резултатите што се добиваат со Монте-Карло симулации. За симулациите избравме бинарна фазна модулација (BPSK). Резултатите за анализираните системски конфигурации ќе ги споредиме со:

- резултатите за релеен канал со две делници и една по јазол со променливо засилување во релето како горна граница, и
- резултатите за точка-точка канал со приемен диверзитет со 4 антени и комбинирање со максимален сооднос (MRC) во дестинацијата како долна граница.



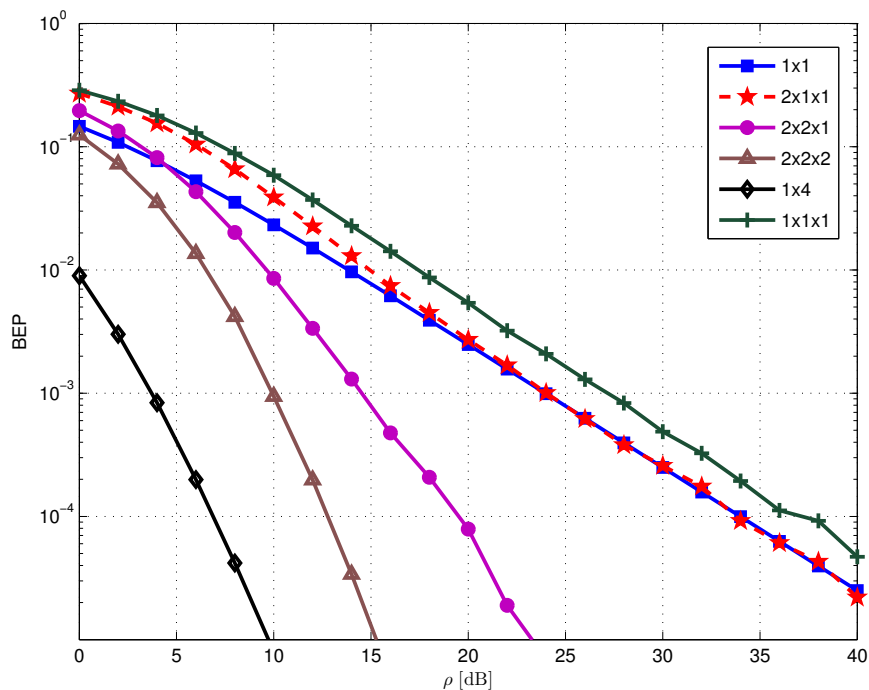
Слика 3.4: Споредба на теориските и симулациските резултати за ОР за 2x1x1, 2x2x1 и 2x2x2 DCF систем ($\gamma_{th} = 5dB$)

²На пример: Maxima, Maple Soft Maple[®] или Wolfram Mathematica[®].

Покрај тоа за системот од глава 3.3 ќе извршиме анализа на резултатите за BER добиени со Монте-Карло симулации и ќе ги споредиме со BER резултатите за претходно наведените референтни системи за споредба.

Обично, во апликациите од реалноста предавателната моќност на јазлите е ограничена. Од тие причини во симулациите ќе ја ограничиме предавателната моќност. Со цел да имаме идентична вкупна предавателна моќност од две предавателни антени со моќноста на една антена, енергијата алоцирана на секој симбол се дели со 2^3 . Од тие причини резултатите ќе бидат дадени во зависност од вкупниот среден однос сигнал-шум ρ кој заради употребата на две антени и OSTBC код со единечна брзина е двојно поголем од средниот однос сигнал-шум т.е.: $\rho = 2 \cdot \bar{\gamma}$.

На слика 3.4 се споредени резултатите добиени со Монте-карло симулација и теоретските резултати за ОР за разгледуваните системски конфигурации. Со цел на подобра споредба на истата слика се прикажани резултатите за точка-точка канал со една антена (означен со: 1x1), релеен канал со две делници и една антена (означен со: 1x1x1), точка-точка 2x1 систем и точка-точка 2x2 систем. На истата слика се претставени резултатите од теоретската анализа (означени со “th”) добиени врз основ на (3.96). Од сликата се гледа дека за резултатите за веројатноста на испад добиени со користење на нумерички пристап во (3.96) се идентични со резултатите добиени со Монте Карло симулација. Освен тоа, од слика 3.4 јасно е дека 2x1x1 системот има слични ОР перформанси како 1x1x1 системот. ОР перформансите за 2x2x1 и 2x2x2 системите се подобри од перформансите на 1x1x1 за 16dB и 25dB на ОР од 10^{-3} . Сепак овие два системи покажуваат послаби ОР перформанси во споредба со точка-точка 2x1 и 2x2 системите од 0dB до 4dB.

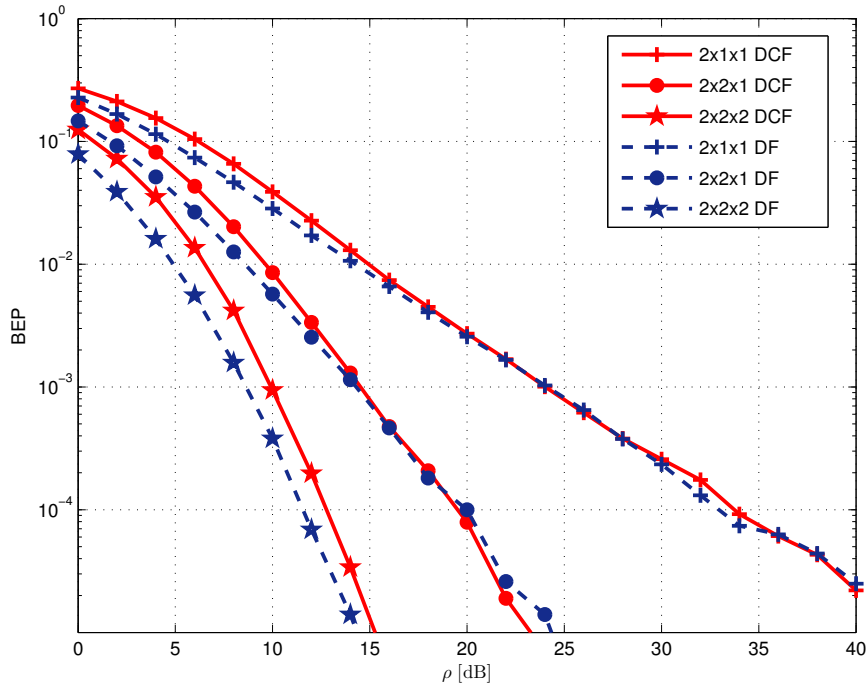


Слика 3.5: BER за DCF систем со две антени добиени со Монте Карло симулација

Резултатите за BER добиени со симулација за 2x1x1, 2x2x1, и 2x2x2 системите се дадени на слика 3.5. Од сликата 3.5 може да се забележи дека за 2x2x1 МИМО каналот добиваме

³Во општ случај, кога се користат OSTBC кои не се со цела брзина како што е случај за Аламути кодот, тогаш за да се задоволи ограничувањето на вкупна моќност, моќноста по симбол се зема да биде согласно 4.46.

добивка од диверзитет од 16dB на BER од 10^{-4} во споредба со 1x1x1 системот, а за 2x2x2 МИМО каналот имаме добивка од 23dB на BER of 10^{-4} . Тие резултати се слични со добивката од диверзитет за за точка-точка МИМО системите добиени во [17]. На слика 3.6 е дадена споредба на BER за не-регенеративниот DCF систем со BER перформансите на регенеративниот декодирај-и-проследи (DF) систем. DF системот има занемарливо подобри перформанси од DCF системот. Разликата во перформанси се зголемува како бројот на приемни антени во релето и дестинацијата се зголемува и средниот однос сигнал-шум се намалува.

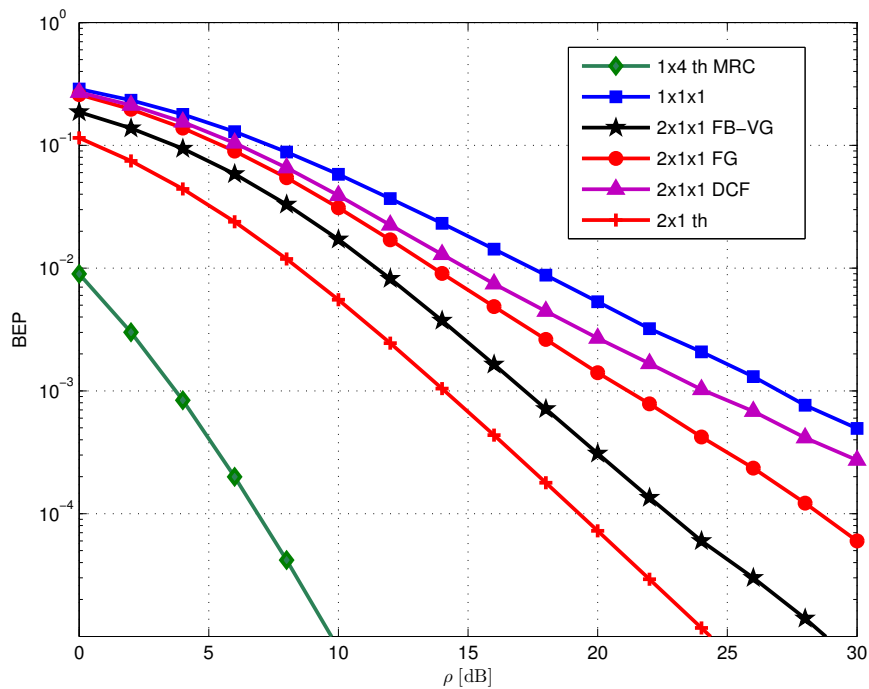


Слика 3.6: Споредба на BER за DCF и DF системите

На слика 3.7 се прикажани BER перформансите за 2x1x1 DCF систем кој користи полу-слепо реле со фиксно засилување (3.9):

$$A = \sqrt{e^{\frac{1}{\gamma}} \cdot E_1\left(\frac{1}{\gamma}\right)} \quad (3.99)$$

BER перформансите на овој систем се споредуваат со перформансите со систем со повратна спрега и променливо засилување (FB-VG) т.е. систем со формирање на зрак (анг. Beamforming) во предавателните антени на релето. Кај FB-VG системот потребно е изворот да поседува CSI за каналот меѓу изворот и релето. Таа информација се обезбедува со повратната спрега. Од сликата може да се забележи дека FB-VG системот има подобри перформанси од FG и DCF системот. DCF покажува најлоши BER перформанси. Сепак, FG и FB-VG системите имаат свои предности и недостатоци. Во FG системот релето работи со методата на засили-и-проследи што многу лесно се имплементира. Сепак тоа подразбира поголема сложености и цена во дестинацијата бидејќи таа треба во целост да имплементира Аламути декодер и има целосно знаење на каналните коефициенти во првата и втората делница. Во FB-VG системот релето има поголема сложеност и цена бидејќи тоа треба да ги естимира каналните коефициенти во втората делница со цел да ги компензира варијациите на амплитудата и фазата на каналот во втората



Слика 3.7: Споредба на 2x1x1 DCF, FB-VG, и FG системи

делница со множење на предавателниот сигнал со естимираниот коефициент. Освен тоа дестинацијата треба да ги естимира каналните коефициенти од првата делница, т.е. крај-крај каналните коефициенти и да имплементира Аламути декодер. Земајќи ги во предвид поголемата комплексност и цена на FG и FB-VG системите, сметаме дека DCF системот постигнува најдобар однос перформанси/цена.

Од друга страна добивката на перформансите на 2x1x1 DCF системот не доволно вредна во споредба со трошоците за имплементација, бидејќи овој систем има слични перформанси со 1x1x1 системот. Употребата на 2x2x1 системот дава значително подобрување на перформансите во споредба со системите со две делници и една антена во изворот, релето и дестинацијата. Сметаме дека ова е нај-изводлива конфигурација во идната инфраструктурна кооперација. На пример, една можна 2x2x1 конфигурација е каде изворната базна станица има две антени, кооперативната базна станица која се однесува како реле има две антени и мобилната станица има една антена. 2x2x2 системот дава најдобри BER и OP перформанси, сепак неговата употреба во идните безжични комуникациски системи изгледа помалку веројатна.

4 Перформанси на МИМО релеен канал со повеќе антени по јазол

Во оваа глава ќе ги анализираме ЕР (глава 4.2) и ОР (глава 4.3) за АФ МИМО релејните системи. Дополитено во глава 4.4 ќе се анализираат перформансите на АФ МИМО релејните канали со директна патека до дестинацијата.

Има многу научни трудови кои се однесуваат на АФ МИМО релејните канали. Некои се фокусираат на релеите со една антена ([40]-[43]) и некои на релеите со повеќе антени ([20], [44]-[48]). Трудот [40] обезбедува апроксимативна и асимптотска анализа на битската веројатност на грешка (BER) за дистрибуирани просторно-временски кооперативни системи со една антена во изворот, два релеа со една антена, и дестинација со една антена. BER анализа за дво-делнични МИМО системи кои користат OSTBC пренос со повеќе антенски извор, дестинација со една/повеќе-антени и реле со една антена е спроведена во [41] и [42]. Трудот [43] се фокусира на пронаоѓање на точна затворена форма и асимптотски изрази за перформансите за испад и грешка во релеен канал со една антена каде изворот и дестинацијата имаат повеќе антени со користење на OSTBC пренос и Накагами-м фединг. Анализата во [20] ја дополнува анализата во [42] за АФ МИМО релејни канали кои користат OSTBC пренос и кај кои изворот, релето, и дестинацијата имаат по две антени. Трудот [44] ја проширува анализата во [42] и [20] со анализа на горната граница на BER за извор, реле и дестинација со повеќе антени. Трудот [45] обезбедува анализа на перформансите на грешка за АФ МИМО релеен канал претставен во [44] каде секој од јазлите е екипиран со N антени. Исто така, во него е дадена анализа за асимптотската веројатност на грешка и споредба на АФ МИМО релејните канали со повеќе МИМО релеи со и без избор на реле за препраќање. Во трудот [47] е анализирана долната граница на перформансите на грешка во дистрибуиран просторно-временски блок систем на кодирање во кој постои директен линк помеѓу дво-антенскиот извор и дестинација и индиректен линк преку повеќе-антенско реле. Авторите на [48] обезбедуваат детална анализа на перформансите на дво-делничен АФ МИМО релеен канал кој користи OSTBC каде секој од јазлите има повеќе антени и има развиено точни изрази во затворена форма за веројатноста на грешка за одредени конфигурации на системот.

Освен за BER има многу трудови кои ги разгледуваат ОР перформансите на АФ МИМО релејните канали. Во Трудот [41] авторите презентираат перформанси на грешка и испад за кооперативните релејни канали со диверзитет на предавателот со и без пренос преку директен линк. Во трудот [49] авторите презентираат изрази во затворена форма за веројатноста за испад на кооперативен МИМО релеен канал во кој изворот и релето користат OSTBC пренос, додека релето и дестинацијата во приемникот користат комбинирање со максимален сооднос (MRC). Трудот [46] дава точни изрази и граници во затворена форма за веројатноста за испад за АФ МИМО релеен канал со користење на OSTBC каде секој од неговите јазли е екипиран со две антени преку Накагами-м фединг околина.

Горе споменатите трудови за имплементација на АФ МИМО релеен канал ([20], [42]-[48]) користат варијанта на засили-и-испрати (AF - Amplify and Forward) релејна шема наречена раздвои-и-испрати (DCF) која што неодамна беше предложена во [20]. DCF е техника за линеарно процесирање со која релето конвертира повеќе просторни поворки од примениот OSTBC сигнал во една просторна поворка без декодирање на симболите. Како

резултат на овој линеарен процес на раздвојување, доколку каналскиот шум се занемари, естимацијата од испратениот симбол може математички да се изрази како продукт од испратениот симбол и сумата од квадратите од модулите на коефициентите на МИМО каналот. Откако релето ќе го раздвои OSTBC сигналот примен од изворот тој повторно ги кодира раздвоените симболи со користење на OSTBC, ги засилува и испраќа преку делницата од релето до дестинацијата.

4.1 Модел на каналот

Во оваа глава ќе се анализираат перформансите на дво-делничниот релеен канал (кој се состои од извор, реле и дестинација), со повеќе антени и јазли кои користат OSTBC пренос (слика 4.1). Ќе се разгледуваат две системски конфигурации: $N \times 1 \times N$ конфигурација, во која изворот и дестинацијата се екипирани со $N_T = N_R = N$ антени¹, а релето со една антена и $N \times N \times N$ конфигурација, каде изворот, релето и дестинацијата се екипирани со N антени. Се претпоставува дека нема просторна корелација меѓу сигналите испратени или примени во различни антени. Во AF релето се врши засилување со променлив фактор на засилување (VG) на влезниот сигнал, за што е потребно релето да има информација за моменталната состојбата на каналот (CSI) во делницата од изворот до релето [6]. Исто така се претпоставува дека дестинацијата ја има информацијата за состојбата на каналот за делницата од релето до дестинацијата.

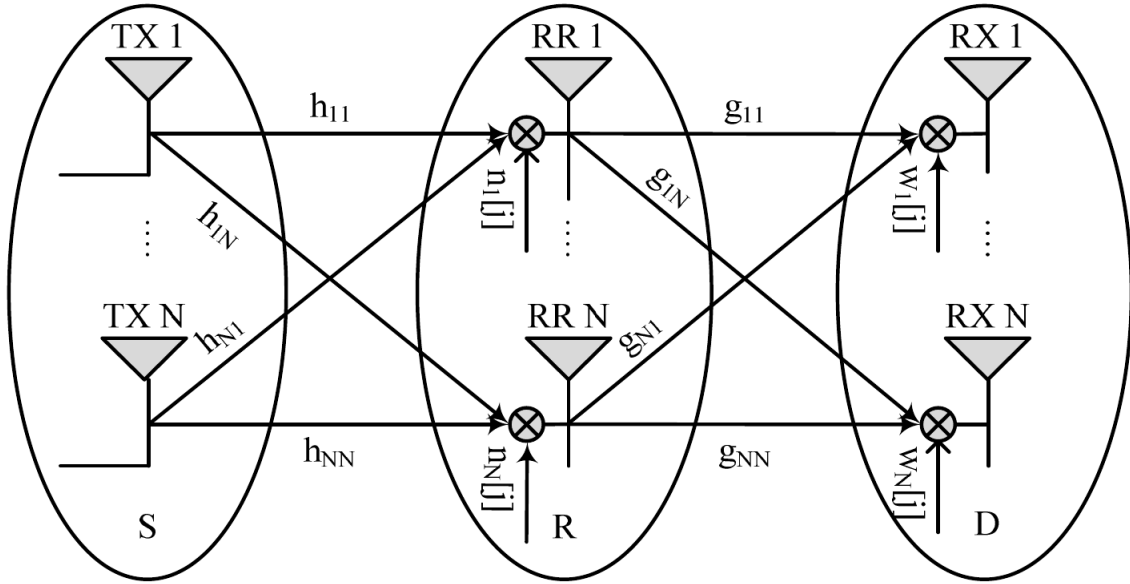
На слика 4.1 е претставен дво-делничниот МИМО систем (како најгенерална конфигурација која ги вклучува двете разгледувани конфигурации како специјален случај), каде изворот, релето и дестинацијата се обележани со S , R и D , соодветно. Релејниот канал е обележан како $N \times 1 \times N$ во случај кога релето R има една антена и $N \times N \times N$ кога релето R има N антени. Делниците S - R и R - D се моделирани како независни МИМО релејни канали со канални матрици \mathbf{H} и \mathbf{G} . Елементите h_{ij} и g_{ij} од овие матрици се каналните коефициенти помеѓу i -та предавателна антена и j -та приемна антена, кои се сметаат како независни циркуларно-симетрични комплексни Гаусови случајни променливи со нулта средна вредност и единична варијанса. Затоа, квадратот од амплитудата од сигналот испратен преку каналот h_{ij} (g_{ij}) ја следи опаѓачката експоненцијална функција на густина на веројатност [35] со исти средни квадратни вредности $E[|h_{ij}|^2] = E[|g_{ij}|^2] = 1$. Изворот S испраќа со моќност P и нема директната комуникација меѓу изворот и дестинацијата. Употребуваните OSTBC кодови се означуваат како кодови со три цифри, NKL , каде N е бројот на антени, K е бројот на кодни симболи испратени во еден коден блок, и L претставува број на потребни временски слотови за испраќање на еден коден збор [50].

Претпоставуваме дека комуникацискиот систем работи во полу-дуплексен мод, поделен во две фази (фаза 1 и фаза 2). Изворот S испраќа кон релето R за време на фаза 1, потоа R испраќа кон дестинацијата D за време на фаза 2. Под претпоставка дека изворот S користи OSTBC во фаза 1, група од K информациски симболи $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_K]^T$ се пренесуваат преку N предавателни антени во L последователно временски интервали. За време на фаза 2 релето на $N \times 1 \times N$ системот ги раздвојува, засилува и испраќа K -те примени симболи кон дестинацијата. Во случај на $N \times N \times N$ систем, за време на фаза 2 релето ги раздвојува, засилува, OSTBC кодира и испраќа K -те примени симболи кон дестинацијата. Приемниот сигнал во една антена во релето на крај од фазата 1 е:

$$\mathbf{Y} = \sqrt{E_S} \mathbf{C} \mathbf{H} + \mathbf{N}, \quad \mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_L]^T, \quad (4.1)$$

каде \mathbf{C} е $L \times N$ кодната матрица од OSTBC кодот, $\mathbf{H} = [h_1, h_2, \dots, h_N]^T$ е $N \times 1$ каналниот вектор на S - R делницата и $\mathbf{N} = [n_1, n_2, \dots, n_L]^T$ е $L \times 1$ вектор кој го претставува Гаусовот

¹ n_T - број на предавателни антени во изворот, n_R -број на приемни антени во дестинацијата



Слика 4.1: МИМО релеен канал со две делници.

бел шум (AWGN) на S - R делницата чии елементи имаат нулта средна вредност и варијанса N_0 .

Операторот \mathbf{T} во суперскриптот означува операција на транспонирање на матрица, и E_S е средната испратена моќност по симбол. Во [51] е покажано дека изразот за раздвоен симбол во една антена во релето е:

$$\tilde{x}_k = \sqrt{E_S} \|\mathbf{H}\|_F^2 x_k + \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (4.2)$$

каде $\|\mathbf{H}\|_F^2 = \sum_{i=1}^N |h_i|^2$ е квадрат од Фробениусовата норма на матрицата \mathbf{H} , ξ е гаусовиот шум претставен како комплексна случајна променлива со нулта средна вредност и варијанса $\|\mathbf{H}\|_F^2 N_0$. Во случајот каде релето има N антени ($N \times N \times N$ систем), раздвоениот симбол во релето повторно може да се претстави со изразот (4.2) каде $\|\mathbf{H}\|_F^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |h_{ij}|^2$. Раздвоениот симбол \tilde{x}_k за да се запази ограничувањето на моќност во релето се засилува со следниов фактор на засилување [16, eq.(9)]:

$$A = \sqrt{\frac{E_R}{E_I \|\mathbf{H}\|_F^4 + \|\mathbf{H}\|_F^2 N_0}}. \quad (4.3)$$

каде енергијата на испратените симболи од изворот (E_I) и релето (E_R) се исти т.е. $E_I = E_R = E_s$. За $N \times 1 \times N$ системот дестинацијата D ги комбинира примените сигнали од повеќето антени со користење на комбинирање со максимален сооднос (MRC). Со цел фер споредба на двата системи, се претпоставува иста предавателна моќност во релето во двете системски конфигурации. Затоа, за $N \times 1 \times N$ системот треба да се нормализира засилувањето на релето дадено со изразот (4.3) со фактор на нормализација c кој ќе ја зголеми предавателната моќност пропорционално со бројот на предавателни антени во S . Ако се земе тоа во предвид и ако за полесна аналитичка анализа се апроксимира изразот (4.3) засилувањето на релето може да се претстави со:

$$A \approx \frac{1}{\sqrt{b} \|\mathbf{H}\|_F^2}. \quad (4.4)$$

каде b е фактор за нормализација на моќност. Во изразот (4.4) избираме $b = c$ за $N \times 1 \times N$ и $b = 1$ за $N \times N \times N$ систем.

²Претпоставуваме дека каналната матрица H е нормализирана т.е. $E[\|H\|_F^2] = N_R N_T = N^2$.

Раздвоениот симбол во дестинацијата D е:

$$\hat{x}_k = A \|\mathbf{G}\|_F^2 \tilde{x}_k + \mu_k, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4.5)$$

каде $\|\mathbf{G}\|_F^2 = \sum_{i=1}^N |g_i|^2$ и $\|\mathbf{G}\|_F^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |g_{ij}|^2$ се соодветните Фробениусови норми на каналната матрица \mathbf{G} за $N \times 1 \times N$ и $N \times N \times N$ системи, и μ е комплексна случајна променлива која го претставува белиот Гаусов шум (AWGN) со нулта средна вредност и варијанса $\|\mathbf{G}\|_F^2 N_0$. Доколку се замени (4.2) во (4.5) ќе се добие изразот кој ги претставува раздвоените симболи во дестинацијата D за $N \times 1 \times N$ и $N \times N \times N$ конфигурациите :

$$\hat{x}_k = \sqrt{E_s} A \|\mathbf{H}\|_F^2 \|\mathbf{G}\|_F^2 x_k + A \|\mathbf{G}\|_F^2 \xi_k + \mu_k .$$

Моќностите на корисниот сигнал и на шумот се:

$$\begin{aligned} P_S &= E_s A^2 \|\mathbf{H}\|_F^4 \|\mathbf{G}\|_F^4 , \\ P_N &= A^2 \|\mathbf{G}\|_F^4 \|\mathbf{H}\|_F^2 N_0 + \|\mathbf{G}\|_F^2 N_0 . \end{aligned} \quad (4.6)$$

Затоа, односот сигнал-шум по информациона симбол за двата системи е:

$$\gamma = \frac{P_S}{P_N} = \frac{E_s}{N_0} \cdot \frac{A^2 \|\mathbf{G}\|_F^2 \|\mathbf{H}\|_F^4}{A^2 \|\mathbf{G}\|_F^2 \|\mathbf{H}\|_F^2 + 1} . \quad (4.7)$$

4.2 Веројатност на грешка

Во оваа глава, ќе дадеме апроксимаци на битските перформанси на дво-делничен DCF релеен канал, кој се состои од извор, DCF полу-дуплексно реле и дестинација, екипирани со повеќе антени кои користат OSTBC пренос во Рејлиева фединг околина. Слична апроксимативна BER анализа за AF МИМО релејните системи е дадена во [44]. Сепак, во оваа докторска теза се доаѓа до едноставни универзални апроксимации за веројатноста на грешка на овие системи, кои се покажува дека се многу точни во SNR опсези кои се од практичен интерес. Во нумеричките резултати на оваа глава ќе ги споредиме резултатите добиени со нашите апроксимации со резултатите добиени во [44].

Продолжението на оваа глава е согласно следниов редослед. Во наредната глава ќе изведеме изрази во затворена форма за многу прецизна апроксимација на веројатноста на грешка. Во глава 4.2.2 ќе презентираме дополнителни едноставни асимптотски апроксимации на веројатноста на грешка кои се валидни за висок однос сигнал-шум и нумеричките резултати се презентирани во глава 4.2.4.

4.2.1 Апроксимација на ER за произволен однос сигнал-шум

Кумулативната функција на веројатност (CDF) за случајната променлива γ се пресметува со наоѓање на инверзна Лапласова трансформација на нејзината функција за генерирање на моменти (MGF) [35]:

$$F_\Gamma(\gamma) = \mathcal{L}^{-1} [M_\Gamma(-s)/s] , \quad (4.8)$$

каде \mathcal{L}^{-1} означува инверзна Лапласова трансформација, и γ е моменталниот SNR на сигналот во дестинацијата D . Со замена на (4.4) во (4.7) моменталниот крај-крај SNR (γ) за двата системи може да се претстави во следнава форма [42]:

$$W = 1/\Gamma = 1/(\bar{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2) + b/(\bar{\gamma} \cdot \|\mathbf{G}\|_F^2) = U + V , \quad (4.9)$$

каде $W = 1/\Gamma$, $U = 1/(\bar{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2)$, $V = b/(\bar{\gamma} \cdot \|\mathbf{G}\|_F^2)$, $\bar{\gamma} = E_s/N_0 = c \cdot \rho$ е средниот SNR по симбол и ρ е вкупниот среден SNR во дестинацијата пред декодирањето. Изразот (4.9) важи за $N \times 1 \times N$ доколку се замени $b = c$ и за $N \times N \times N$ систем доколку се замени $b = 1$. Со оглед на тоа што моменталната моќност на каналните коефициенти ја следи експоненцијалната функција на густина на веројатност, $\|\mathbf{H}\|_F^2$ и $\|\mathbf{G}\|_F^2$ ја следат гама функцијата на густина на веројатност:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\theta}}, \text{ за } x > 0, \text{ и } \alpha, \theta > 0, \quad (4.10)$$

со параметар за размер $\theta = 1^3$ и параметар за облик $\alpha = m = m_1 = m_2$. Имајќи го тоа во предвид, функцијата на густина на веројатност на квадратот од Фробениусовата норма е:

$$f_{\|\mathbf{H}\|_F^2}(x) = \frac{x^{m_1-1}}{\Gamma(m_1)} e^{-x}, \quad f_{\|\mathbf{G}\|_F^2}(x) = \frac{x^{m_2-1}}{\Gamma(m_2)} e^{-x}, \quad (4.11)$$

каде $x > 0$, $m = m_1 = m_2 = N$ за $N \times 1 \times N$ системот и $m = m_1 = m_2 = N^2$ за $N \times N \times N$ системот. Со функционална трансформација на случајните променливи $U = 1/(\bar{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2)$ и $V = b/(\bar{\gamma} \cdot \|\mathbf{G}\|_F^2)$ се добиваат соодветните функции на густина на веројатност:

$$f_U(x) = \frac{x^{-m-1}}{\bar{\gamma}^m \cdot \Gamma(m)} e^{-\frac{1}{x \cdot \bar{\gamma}}}, \quad f_V(x) = \frac{b^m \cdot x^{-m-1}}{\bar{\gamma}^m \cdot \Gamma(m)} e^{-\frac{b}{x \cdot \bar{\gamma}}}. \quad (4.12)$$

Со користење на [38, eq.(3.471.9)] лесно се наоѓаат функциите за генерирање на моменти за U и V :

$$\begin{aligned} M_U(-s) &= \frac{2}{\Gamma(m)} (s/\bar{\gamma})^{\frac{m}{2}} K_m \left(2\sqrt{s/\bar{\gamma}} \right), \\ M_V(-s) &= \frac{2b^{m/2}}{\Gamma(m)} (s/\bar{\gamma})^{\frac{m}{2}} K_m \left(2\sqrt{b s/\bar{\gamma}} \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

каде K_m [38, eq.(8.432.1)] е модифицирана Беселова функција од втор тип од m -ти ред. Бидејќи S - R и R - D делниците се предмет на независен Рејлиев фединг, U и V се независни и функцијата за генерирање на моменти од нивната сума е производ од нивните MGF-и:

$$M_W(-s) = \frac{4 \cdot \sqrt{b^m}}{\Gamma^2(m)} \cdot \left(\frac{s}{\bar{\gamma}}\right)^m \cdot K_m \left(2\sqrt{\frac{s}{\bar{\gamma}}} \right) \cdot K_m \left(2\sqrt{\frac{b s}{\bar{\gamma}}} \right). \quad (4.14)$$

За $N \times 1 \times N$ систем конфигурација, MGF од $1/\Gamma$ е изразен како (4.14), каде $m = N$ и $b = c$, додека, за $N \times N \times N$ систем конфигурацијата, $m = N^2$ и $b = 1$. Кумулативната дистрибутивна функција на случајната променлива Γ се добива согласно [53, eq.(31)]:

$$F_\Gamma(\gamma) = 1 - \mathcal{L}^{-1} [M_w(-s)/s] \Big|_{w=1/\gamma}. \quad (4.15)$$

Лесно може да се покае дека $(m-1)$ -от извод од $L^{-1} [M_w(-s)/s^m]$ е еднаков на $\mathcal{L}^{-1} [M_w(-s)/s]$ и затоа (4.15) може да се претстави во следнава форма [42, eq.(9)]:

$$F_\Gamma(\gamma) = 1 - d^{m-1} L(w) / d w^{m-1} \Big|_{w=1/\gamma}, \quad (4.16)$$

каде:

$$L(w) = \mathcal{L}^{-1} [M_w(-s)/s^m]. \quad (4.17)$$

³Имајќи во предвид дека $E[|h_{ij}|^2] = E[|g_{ij}|^2] = 1$.

Со користење на [54, eq.(3.16.6.6)] $L(w)$ функцијата за MGF-от даден со (4.14) може да се претстави во следнава форма:

$$L(w) = \frac{2 b^{m/2} e^{-\frac{b+1}{\bar{\gamma}} w}}{w \Gamma^2(m) \bar{\gamma}^m} K_m \left(\frac{2 \sqrt{b}}{\bar{\gamma} w} \right), \quad (4.18)$$

каде K_m е модифицирана Беселова функција од втор тип. Со замена на (4.18) во (4.16) CDF-от за дадена вредност на N може да се добие во затворена форма за двете конфигурации на системот. PDF-от на крај-крај SNR-от може да се најде со вадење на извод од CDF-от даден со (4.16) т.е. $f_\Gamma(\gamma) = dF_\Gamma(\gamma)/d\gamma$. Во случај $N = 2$ CDF-от и PDF-от можат лесно да се најдат во затворена форма со користење на формулата за извод од модифицирана беселова функција [39, eq.(9.6.29)] ([42] [20]). За поголеми вредности од N многу е тешко да се најде израз во затворена форма за функцијата на густина на веројатност, а уште потешко е наоѓањето на израз во затворена форма за средната веројатност на грешка со користење на MGF пристапот даден во [35]. Затоа е потребно користење на апроксимативни методи. Со цел да се реши (4.16) во затворена форма, го апроксимиравме K_m со користење на [38, eq.(8.446)]. За мали вредности на променливата $z \rightarrow 0$, бесконечната сума во [38, eq.(8.446)] може да се занемари и да се задржи само конечната сума т.е:

$$K_m(z) \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{z}\right)^m \cdot \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \cdot \frac{(m-k-1)!}{k!} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}. \quad (4.19)$$

Со комбинирање на (4.18) и (4.19) во (4.16) се добива следната апроксимација на кумулативната дистрибутивна функција:

$$F_{\Gamma_a}(\gamma) \approx 1 - \frac{b^{m/2}}{\Gamma^2(m) \bar{\gamma}^m} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \cdot \frac{(m-k-1)!}{k!} \cdot \frac{d^{m-1}}{d w^{m-1}} \left[\frac{\exp\left(-\frac{b+1}{\bar{\gamma}} w\right)}{w} \cdot \left(\frac{\bar{\gamma} w}{\sqrt{b}}\right)^{m-2k} \right] \Bigg|_{w=1/\gamma}. \quad (4.20)$$

Со решавање на математичките операции во (4.20) може да се покаже дека апроксимативниот израз за кумулативната дистрибутивна функција за $N \times 1 \times N$ и $N \times N \times N$ системите е:

$$F_{\Gamma_a}(\gamma) \approx 1 + \frac{1}{\Gamma(m)} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m+k+n} \Gamma(m-k) \cdot (2k+n-m+1)_{m-n-1}}{\Gamma(m-n)} \cdot \frac{(b+1)^n b^k}{\Gamma(k+1) \Gamma(n+1)} \cdot \left(\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right)^{n+2k} \cdot \exp\left(-\frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}}\right). \quad (4.21)$$

каде (...) претставува Почхамеров симбол. Со користење на Лапласова трансформација $M_{\Gamma_a}(-s) = s \cdot \mathcal{L}[F_{\Gamma_a}(\gamma)]$ може да се добие функцијата за генерирање на моменти (MGF) за случајната променлива γ [35, eq.(1.5)]:

$$M_{\Gamma_a}(-s) \approx 1 + \frac{1}{\Gamma(m)} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-1)^{k+m+n} \Gamma(m-k) \Gamma(n+2k+1)}{\Gamma(k+1) \Gamma(n+1) \Gamma(m-n)} \cdot \frac{(2k+n-m+1)_{m-n-1} \cdot (b+1)^n \cdot b^k \cdot s \cdot \bar{\gamma}}{(s \cdot \bar{\gamma} + b + 1)^{n+2k+1}}. \quad (4.22)$$

Со вадење на извод од $F_{\Gamma_a}(\gamma)$ во (4.21) или со помош на инверзна лапласова трансформација од $M_{\Gamma_a}(-s)$ во (4.22) се добива функцијата за густина на веројатност (PDF) од γ :

$$f_{\Gamma_a}(\gamma) \approx \frac{1}{\Gamma(m)} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-1)^{k+m+n} \Gamma(m-k) (2k+n-m+1)_{m-n-1}}{\Gamma(k+1) \Gamma(n+1) \Gamma(m-n)} \cdot \frac{(b+1)^n b^k [\bar{\gamma}(n+2k) - (b+1)\gamma] \gamma^{n+2k-1}}{\bar{\gamma}^{n+2k+1}} \cdot \exp\left[-\frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}}\right]. \quad (4.23)$$

Изразот (4.21) може да се користи за да се добие средната веројатност на грешка, врз база на пристапот во [55]. Во согласност со [55, eq.(4)] средната веројатност на грешка е дадена со:

$$Pe = \int_0^\infty F_\Gamma\left(\frac{x^2}{d}\right) \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx, \quad (4.24)$$

каде d е константа одредена од употребената постапка на модулацијата и демодулација (на пример за BPSK со кохерентна демодулација $d = 2$). Заменувајќи го апроксимативниот израз за кумулативната дистрибутивна функција од (4.21) во (4.24), со користење на [38, eq.(3.461.2)] и [38, eq.(8.339.2)] добиваме апроксимација за средната веројатност на грешка за двете разгледувани системски конфигурации:

$$P_{ea} \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{d\bar{\gamma}}}{2\sqrt{\pi}\Gamma(m)} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m+k+n} 2^{n+2k} \Gamma(m-k)}{\Gamma(m-n)} \cdot \frac{\Gamma(n+2k+\frac{1}{2}) (2k+n-m+1)_{m-n-1} (b+1)^n b^k}{\Gamma(k+1) \Gamma(n+1) (d\bar{\gamma}+2b+2)^{n+2k+\frac{1}{2}}}. \quad (4.25)$$

Изразите (4.21), (4.22), (4.23), и (4.25) можат да се користат за $N \times 1 \times N$ систем со користење на замените: $m = N$ и $b = c$ и за $N \times N \times N$ систем со користење на замените: $m = N^2$ и $b = 1$.

4.2.2 Апроксимација на EP за голем однос сигнал-шум

Врз база на [56, eq.(13)] асимптотската апроксимација на средната веројатност на грешка за голем однос сигнал-шум може да се претстави во следнава форма:

$$P_{eas} = \frac{1}{2 \cdot d^m \cdot m!} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{d^m F_\Gamma(\gamma)}{d\gamma^m} \cdot \prod_{i=1}^m (2 \cdot i - 1), \quad (4.26)$$

каде m е продукт од бројот на предавателни и приемни антени на S - R и R - D делниците и d е константа која зависи од типот на модулацијата кој се користи во (4.24). Доколку во (4.26) замениме $F_\Gamma(\gamma) \approx F_{\Gamma_a}(\gamma)$, $(2m-1)!! = (2m)! / (2^m m!)$ и $f_{\Gamma_a}(\gamma) = dF_{\Gamma_a}(\gamma)/d\gamma$ се добива:

$$P_{eas} \approx \frac{\Gamma(2m+1)}{2^{m+1} \Gamma^2(m+1) d^m} \cdot \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{d^{m-1} f_{\Gamma_a}(\gamma)}{d\gamma^{m-1}}. \quad (4.27)$$

Доколку се земе во предвид дека $f_{\Gamma_a}^{(i)}(0) = 0$ за $i = 0, 1, \dots, m-2$ и теоремата за почетна вредност дадена во [57, eq.(19.1.2.1.9)] равенката (4.27) може да се поедностави во следнава форма:

$$P_{eas} \approx \frac{\Gamma(2m+1)}{2^{m+1} \Gamma^2(m+1) d^m} \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} s^m M_{\Gamma_a}(-s). \quad (4.28)$$

Доколку во изразот во лименсот од (4.28) го замениме $M_{\Gamma_a}(-s)$ од (4.22) и ги комбинираме изразите во форма на една дробка се добива:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} s^m M_{\Gamma_a}(-s) = \frac{b^m + 1}{\bar{\gamma}^m} . \quad (4.29)$$

Ако се замени (4.29) во (4.28) ќе добиеме дека асимптотската апроксимација на веројатноста за грешка за голем SNR е:

$$P_{eas} \approx \frac{\Gamma(2m+1) \cdot (b^m+1)}{2^{m+1} \cdot \Gamma^2(m+1) \cdot d^m \cdot \bar{\gamma}^m} . \quad (4.30)$$

Претходниот израз може да се користи за пресметка на асимптотската апроксимација на средната веројатност на грешка за $N \times 1 \times N$ систем ($m = N$ и $b = c$) и за $N \times N \times N$ систем ($m = N^2$ и $b = 1$).

4.2.3 Раздвојување на OSTBC кодовите од повисок ред

За потребите на нумеричката анализа која ќе биде спроведена во глава 4.2.4 потребно е анализата од глава 4.1 да се претстави со користење на линеарна алгебра. Во глава 4.2.4 ќе бидат користени 222 2×1 и 2×2 OSTBC кодови чие раздвојување е прикажано во главите 3.3.2 и 3.3.4 и 334 (3×1) и 434 (4×1) OSTBC кодови кои се раздвојуваат на следниов начин.

Раздвојување за 334 OSTBC код Векторот кој ги претставува симболите испратени во изворот X и каналната матрица (вектор) H се:

$$\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ x_3] \quad \mathbf{H} = [h_1 \ h_2 \ h_3] \quad (4.31)$$

Шумот во делницата од изворот до релето и помошната променлива за шумот се:

$$\mathbf{N} := [n_1 \ n_2 \ n_3 \ n_4] \quad \mathbf{N}_a = [n_1 \ n_2 \ n_3^* \ n_4^*] \quad (4.32)$$

Кодна матрица за 334 OSTBC кодот е:

$$\mathbf{C}_{334} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2^* & x_1^* & 0 \\ x_3^* & 0 & -x_1^* \\ 0 & x_3^* & -x_2^* \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Еквивалентната виртуелна канална матрица и нејзината транспонирана матрица се дадени со:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2^* & -h_3^* & 0 \\ h_2 & -h_1^* & 0 & -h_3^* \\ h_3 & 0 & h_1^* & h_2^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Omega}^T = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_2^* & -h_1^* & 0 \\ -h_3^* & 0 & h_1^* \\ 0 & -h_3^* & h_2^* \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Приемниот сигнал во релето е:

$$\mathbf{Y} = [x_1 h_1 + x_2 h_2 + x_3 h_3 + n_1, \quad -x_2^* h_1 + x_1^* h_2 + n_2, \quad x_3^* h_1 - x_1^* h_3 + n_3, \quad x_3^* h_2 - x_2^* h_3 + n_4,] \quad (4.35)$$

Модифицираната верзија од сигналот даден со (4.35) е:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_a &= [y_1, y_2^*, y_3^*, y_4^*] = \\ &= [x_1 h_1 + x_2 h_2 + x_3 h_3 + n_1, \quad -x_2^* h_1^* + x_1^* h_2^* + n_2^*, \quad x_3^* h_1^* - x_1^* h_3^* + n_3^*, \quad x_3^* h_2^* - x_2^* h_3^* + n_4^*] \end{aligned} \quad (4.36)$$

Модифицираната верзија од сигналот може да се добие и директно со користење на EVCM:

$$\mathbf{Y}_a = \mathbf{X} \cdot \mathbf{\Omega} + \mathbf{N}_a \quad (4.37)$$

Раздвоениот сигнал во една антена од релето е:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{X}} &= \mathbf{Y}_a \cdot \mathbf{\Omega}^H = \left[y_1 h_1^* + y_2^* h_2 - y_3^* h_3, \quad y_1 h_2^* - y_2^* h_1 - y_4^* h_3, \quad y_1 h_3^* + y_3^* h_1 + y_4^* h_2 \right] \\ &= \left[(|h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_3|^2) x_1 + h_1^* n_1 + h_2 n_2^* - h_3 n_3^*, \right. \\ &\left. (|h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_3|^2) x_2 + h_2^* n_1 - h_1 n_2^* - h_3 n_4^*, \quad (|h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_3|^2) x_3 + h_3^* n_1 + h_1 n_3^* + h_2 n_4^* \right] \end{aligned} \quad (4.38)$$

Раздвојување за 434 OSTBC Векторот кој ги претставува симболите испратени во изворот X и каналната матрица (вектор) H се:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Шумот во делницата од изворот до релето и помошната променлива за шумот се:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_a = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3^* & n_4^* \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Кодна матрица за 434 OSTBC кодот е:

$$\mathbf{C}_{434} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \frac{1}{2}x_3\sqrt{2} & \frac{1}{2}x_3\sqrt{2} \\ -x_2^* & x_1^* & \frac{1}{2}x_3\sqrt{2} & -\frac{1}{2}x_3\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}x_3^*\sqrt{2} & \frac{1}{2}x_3^*\sqrt{2} & -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_1^* + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_2^* & -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_2^* + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_1^* \\ \frac{1}{2}x_3^*\sqrt{2} & -\frac{1}{2}x_3^*\sqrt{2} & \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_2^* + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_1^* & -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_1^* - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_2^* \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Приемниот сигнал во релето е:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{C}_{434} \cdot \mathbf{H}^T = \\ &\left[x_1 h_1 + x_2 h_2 + \frac{1}{2}x_3\sqrt{2}h_3 + \frac{1}{2}x_3\sqrt{2}h_4 + n_1, \quad -x_2^* h_1 + x_1^* h_2 + \frac{1}{2}x_3\sqrt{2}h_3 - \frac{1}{2}x_3\sqrt{2}h_4 + n_2, \right. \\ &\frac{1}{2}x_3^*\sqrt{2}h_1 + \frac{1}{2}x_3^*\sqrt{2}h_2 + \frac{1}{2} \cdot (-x_1 - x_1^* + x_2 - x_2^*) h_3 + \frac{1}{2} \cdot (-x_2 - x_2^* + x_1 - x_1^*) h_4 + n_3, \\ &\left. \frac{1}{2}x_3^*\sqrt{2}h_1 - \frac{1}{2}x_3^*\sqrt{2}h_2 + \frac{1}{2} \cdot (x_2 + x_2^* + x_1 - x_1^*) h_3 + \frac{1}{2} \cdot (-x_1 - x_1^* - x_2 + x_2^*) h_4 + n_4 \right] \end{aligned} \quad (4.42)$$

Поединечните раздвоени симболи се добиваат [58, ch.(3.6)]:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= y_1 h_1^* + y_2^* h_2 + \frac{1}{2} (y_4 - y_3) (h_3^* - h_4^*) - \frac{1}{2} (y_3^* + y_4^*) (h_3 + h_4) = \\ &= -\frac{1}{2} h_3 n_4^* + h_2 n_2^* - \frac{1}{2} h_3 n_3^* + h_1^* n_1 - \frac{1}{2} h_4^* n_4 + \frac{1}{2} n_4 h_3^* - \frac{1}{2} n_3 h_3^* + \frac{1}{2} n_3 h_4^* - \frac{1}{2} n_3^* h_4 - \frac{1}{2} n_4^* h_4 \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2 &= y_1 h_2^* - y_2^* h_1 + \frac{1}{2} (y_4 + y_3) (h_3^* - h_4^*) + \frac{1}{2} (y_4^* - y_3^*) (h_3 + h_4) \\ &= (|h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_3|^2 + |h_4|^2) \cdot x_2 - h_1 n_2^* + h_2^* n_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot (h_3 n_4^* - h_3 n_3^* - h_4^* n_4 + n_4 h_3^* + n_3 h_3^* - n_3 h_4^* - n_3^* h_4 + n_4^* h_4) \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_3 &= \frac{1}{2} (y_1 + y_2) h_3^* \sqrt{2} + \frac{1}{2} (y_1 - y_2) h_4^* \sqrt{2} + \frac{1}{2} (h_1 + h_2) y_3^* \sqrt{2} + \frac{1}{2} (h_1 - h_2) y_4^* \sqrt{2} \\ &= (|h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_3|^2 + |h_4|^2) \cdot x_3 - \\ &- \frac{1}{2} \cdot \left(h_4^* \sqrt{2} n_2 + \sqrt{2} h_1 n_4^* + \sqrt{2} h_2 n_3^* + h_3^* \sqrt{2} n_1 + \sqrt{2} h_1 n_3^* - \sqrt{2} h_2 n_4^* + h_3^* \sqrt{2} n_2 + h_4^* \sqrt{2} n_1 \right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

4.2.4 Нумерички и симулациски резултати

Во оваа глава ќе биде илустрирана точноста на апроксимациите презентирани во главите 4.2.1 и 4.2.2. Прво ќе бидат потврдени апроксимациите за EP за различен број на антени N во споредба со: (a) точните вредности добиени со нумеричка интеграција на соодветни интегрални, и (b) точните вредности добиени со Монте Карло симулации. Во сликите прикажани во оваа нумеричка анализа ќе се користи кратенката „sim“ доколку кривата е добиена со користење на Монте-Карло симулација, кратенката „num“ доколку кривата е добиена со нумеричка интеграција на соодветната MGF функција, кратенката „asy“ доколку кривата е добиена со асимптотскиот израз (4.30) и кратенката „app“ доколку кривата е добиена со точниот апроксимативен израз (4.25).

На слика 4.2 се презентирани BER резултатите за $N \times 1 \times N$ систем кој користи до 7 антени во изворот и дестинацијата за $E_s = P_T/N$ т.е. $c = 1/N$. Кривите со полна линија ги претставуваат резултатите добиени со изразот за апроксимација на веројатноста на грешка (4.25) и кривите со испрекинати линии претставуваат резултати добиени од изразот за асимптотска апроксимација на веројатноста на грешка (4.30). Треба да се напомене дека соодветните криви за $N > 7$ можат лесно да се добијат. Слично, на слика 4.3 се дадени BER резултатите за $N \times N \times N$ систем со до 7 антени во изворот, релето и дестинацијата за $E_s = P_T/N$. Полната линија ги претставува резултатите добиени со користење на изразот за апроксимација на веројатноста на грешка (4.25), и точкастите линии ги претставуваат резултатите добиени со користење на изразот за асимптотска апроксимација на веројатноста за грешка (4.30). Сите резултати се добиваат многу лесно со правилен избор на точноста на пакетот за нумеричка анализа.

Во анализата ќе се фокусираме на неколку OSTBC шеми, како 222, 334, и 434, и ќе ги воспоставиме нивните соодветни точни и апроксимативни веројатности за грешка кога ќе се применат на разгледуваниот систем (слика 4.1). Согласно на [50] и [59] кодните матрици за овие шеми се дадени со:

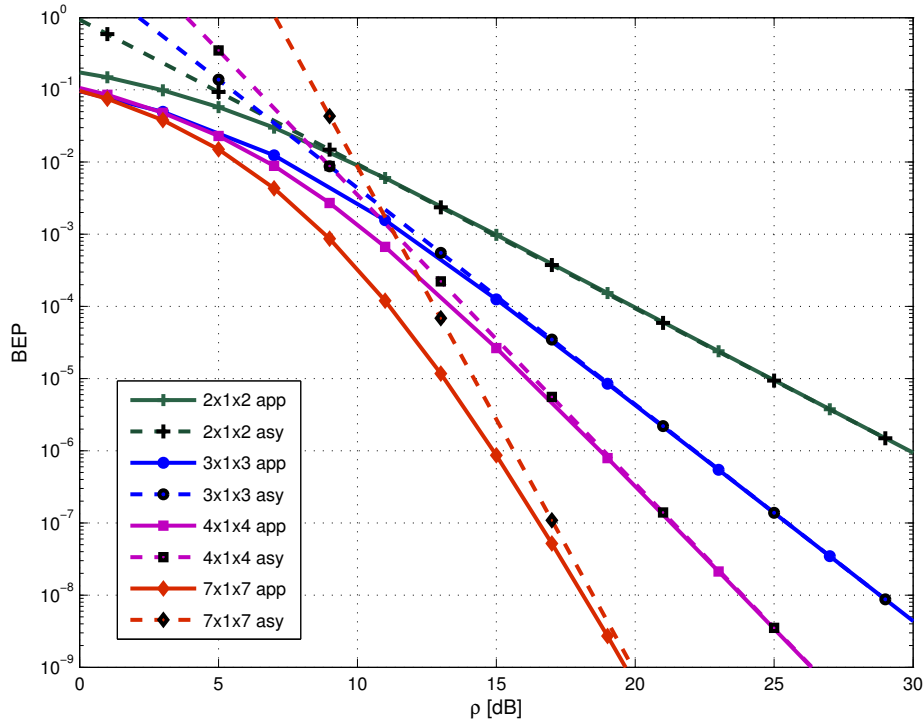
$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{222} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2^* & x_1^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{334} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2^* & x_1^* & 0 \\ x_3^* & 0 & -x_1^* \\ 0 & x_3^* & -x_2^* \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_{434} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3/\sqrt{2} & x_3/\sqrt{2} \\ -x_2^* & x_1^* & x_3/\sqrt{2} & -x_3/\sqrt{2} \\ x_3/\sqrt{2} & x_3/\sqrt{2} & \frac{(-x_1-x_1^*+x_2-x_2^*)}{2} & \frac{(-x_2-x_2^*+x_1-x_1^*)}{2} \\ x_3^*/\sqrt{2} & -x_3^*/\sqrt{2} & \frac{(x_2+x_2^*+x_1-x_1^*)}{2} & -\frac{(x_1+x_1^*+x_2-x_2^*)}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

За OSTB кодовите дадени во (4.46) средната моќност по симбол се пресметува како:

$$E_s = P_T \cdot c, \quad c = \frac{L}{KN}. \quad (4.47)$$

Примените симболи во една релејна антена за 222, 334 и 434 OSTBC кодови се раздвојуваат согласно на [50] [51] (Процесот на раздвојување е детално анализиран во главите 3.3.2, 3.3.3 и 4.2.3) :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{X}}_{222}^T &= [y_1 h_1^* + y_2^* h_2, \quad y_1 h_2^* - y_2^* h_1], \\ \tilde{\mathbf{X}}_{334}^T &= [y_1 h_1^* + y_2^* h_2 - y_3^* h_3, \quad y_1 h_2^* - y_2^* h_1 - y_4^* h_3, \quad y_1 h_3^* + y_3^* h_1 + y_4^* h_2], \\ \tilde{\mathbf{X}}_{434}^T &= \begin{bmatrix} y_1 h_1^* + y_2^* h_2 + \frac{(y_4 - y_3)(h_3^* - h_4^*)}{2} - \frac{(y_3^* + y_4^*)(h_3 + h_4)}{2} \\ y_1 h_2^* - y_2^* h_1 + \frac{(y_4 + y_3)(h_3^* - h_4^*)}{2} + \frac{(y_4^* - y_3^*)(h_3 + h_4)}{2} \\ \frac{(y_1 + y_2) h_3^*}{\sqrt{2}} + \frac{(y_1 - y_2) h_4^*}{\sqrt{2}} + \frac{(h_1 + h_2) y_3^*}{\sqrt{2}} + \frac{(h_1 - h_2) y_4^*}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.48)$$



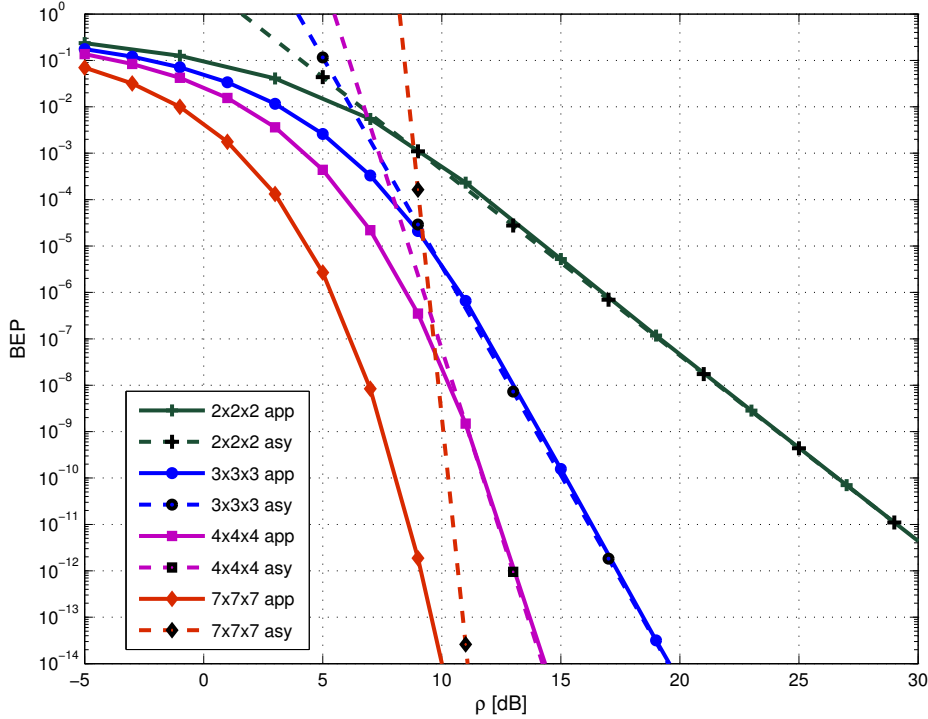
Слика 4.2: ВЕР за МИМО 2x1x2/3x1x3/4x1x4/7x1x7 АФ релејни канали.

На слика 4.4 е прикажана ВЕР за 2x1x2 систем со Аламути кодирање [17], 3x1x3 со 334 OSTBC и 4x1x4 со 434 OSTBC. На сликата се споредени резултатите добиени со Монте Карло симулации, резултатите добиени со апроксимациите (4.25) и (4.30) за $m = N$ и $b = c$ и точните резултати добиени со нумеричка интеграција на [35, eq.(9.15)] и користење на изразот за MGF добиен со пристапот прикажан во [42]. Споредбата покажува поклопување на резултатите добиени со апроксимацијата (4.25), точните резултати добиени со нумеричка интеграција и резултатите добиени со симулација.

На слика 4.5 е дадена ВЕР за 2x2x2, 3x3x3 и 4x4x4 системите кои користат OSTBC дадени со (4.46). На сликата се презентирани ВЕР за 2x2x2, 3x3x3 и 4x4x4 системите кои користат OSTBC даден со (4.46). На сликата се претставени споредбите за резултатите добиени со помош на симулација, резултатите добиени со користење на изразот за апроксимација на веројатноста за грешка (4.25), резултатите добиени со асимптотска апроксимација на веројатноста за грешка (4.30) и резултатите добиени со нумеричка интеграција на MGF дадена во [45, eq.(15)] со користење на [35, eq.(9.15)]. За споредбите е употребена MGF презентирана во [45] заради подобра пресметковна ефикасност. Повторно, споредбата покажува точно преклопување на резултатите добиени со апроксимацијата (4.25), нумеричката интеграција и симулацијата.

На слика 4.6 е прикажана споредбата на резултатите добиени со (4.25) и (4.30) со горните граници добиени од [44, eq.(15)] и [44, eq.(16)] за 2x1x2 и 4x1x4 системи кои користат 222 и 434 OSTBC кодови. Резултатите добиени со апроксимациите (4.25) и (4.30) многу поточно ги следат точните резултати во споредба со горните граници дадени со [44, eq.(15)] и [44, eq.(16)]. На пример за 2x1x2 систем и ВЕР од 10^{-4} резултатите добиени со (4.25) и (4.30) се поточни од [44, eq.(15)] и [44, eq.(16)] за приближно 5dB.

На слика 4.7 се претставени споредбите на апроксимациите (4.25) и (4.30) и горните граници добиени со [44, eq.(15)] и [44, eq.(16)] за 2x2x2 и 4x4x4 системи кои користат 222 и 434 OSTBC кодови. Резултатите добиени со апроксимациите (4.25) и (4.30) поточно



Слика 4.3: ВЕР за МИМО 2x2x2/3x3x3/4x4x4/7x7x7 АФ релеејни канали.

ги следат точните резултати во споредба со горните граници дадени со [44, eq.(15)] и [44, eq.(16)]. На пример, за 2x2x2 систем и ВЕР од 10^{-4} (4.25) и (4.30) се поточни од [44, eq.(15)] и [44, eq.(16)] за приближно 4dB.

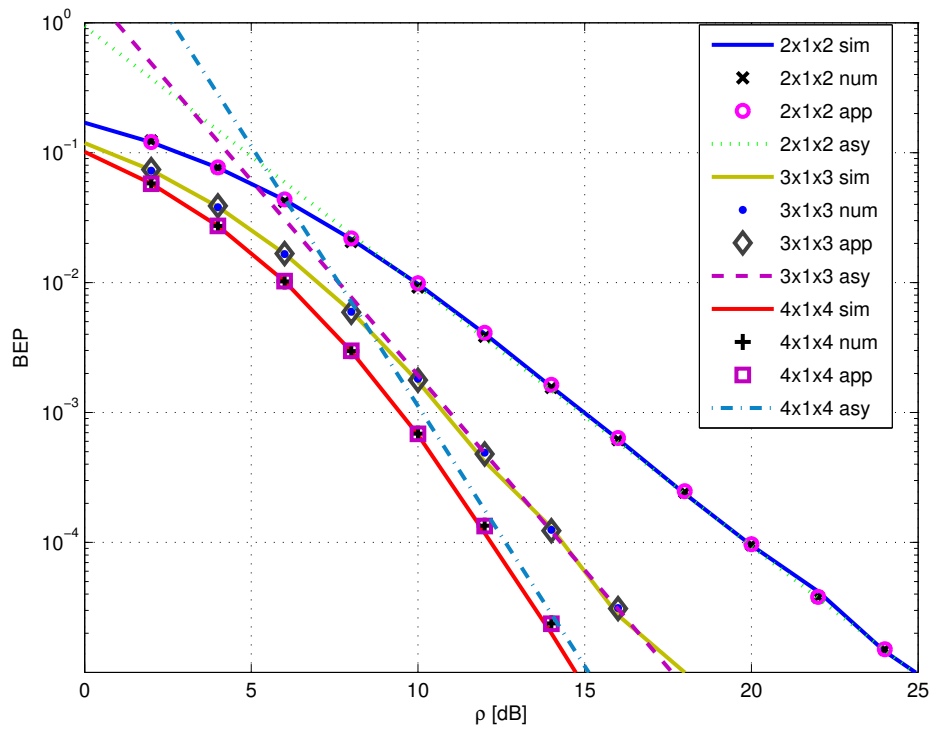
За упростување на математичката анализа во наредните глави во изразот за ВЕР (4.25) ќе земеме $k = 0$ со што се добива грубата апроксимација за средната веројатност на грешка за двете системски конфигурации:

$$P_{el} \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{d\bar{\gamma}}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{m-1} \frac{2^n \Gamma(n + \frac{1}{2}) (b+1)^n}{\Gamma(n+1) (d\bar{\gamma} + 2b + 2)^{n+\frac{1}{2}}}. \quad (4.49)$$

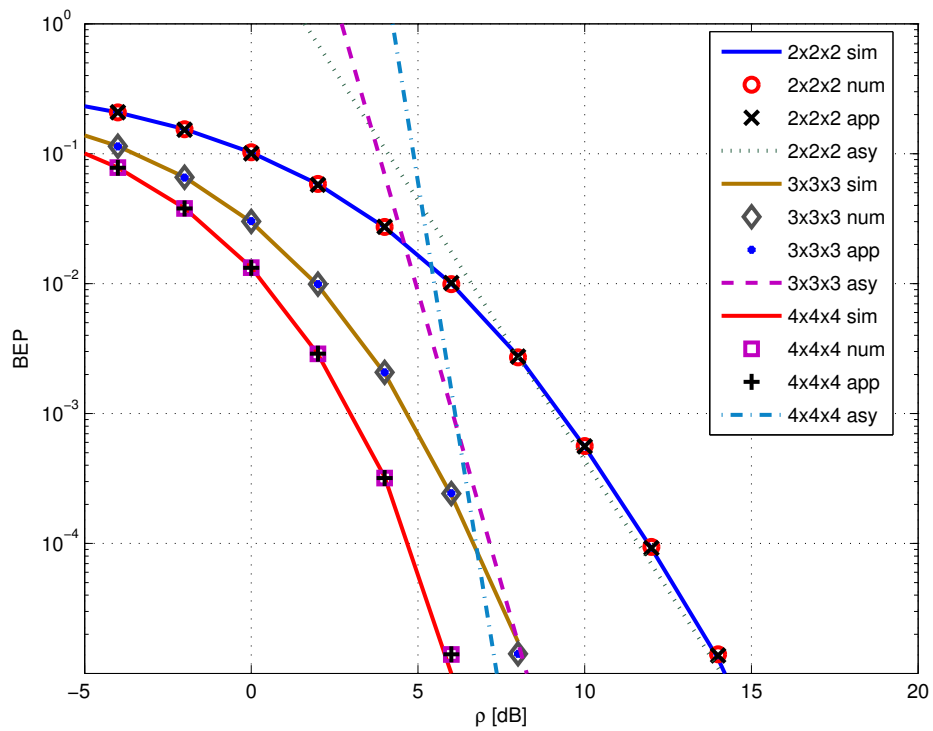
Изразот (4.49) може да се користи за $N \times 1 \times N$ систем со користење на замените: $m = N$ и $b = c$ и за $N \times N \times N$ систем со користење на замените: $m = N^2$ и $b = 1$.

Во продолжението на оваа глава ќе ја илустрираме точноста на грубата апроксимација за веројатност на грешка 4.49. Ќе ја валидираме нејзината точност за различен број на антени N со споредба со: (а) точните вредности добиени со нумеричка интеграција на соодветните MGF функции, и (б) точните вредности добиени со Монте Карло симулации. Како и претодно се фокусираме на неколку практични OSTBC шеми, 222, 334 и 434 во разгледуваниот систем од слика 4.1. Употребуваните кодни матрици се согласно (4.46) и примените симболи во дестинацијата се раздвојуваат согласно (4.48). Во сликите прикажани во оваа нумеричка анализа ќе се користи кратенката „sim“ доколку кривата е добиена со користење на Монте-Карло симулација, кратенката „num“ доколку кривата е добиена со нумеричка интеграција на соодветната MGF функција, кратенката „ap1“ доколку кривата е добиена со точниот апроксимативен израз (4.25) и кратенката „ap2“ доколку кривата е добиена со грубиот апроксимативен израз (4.49).

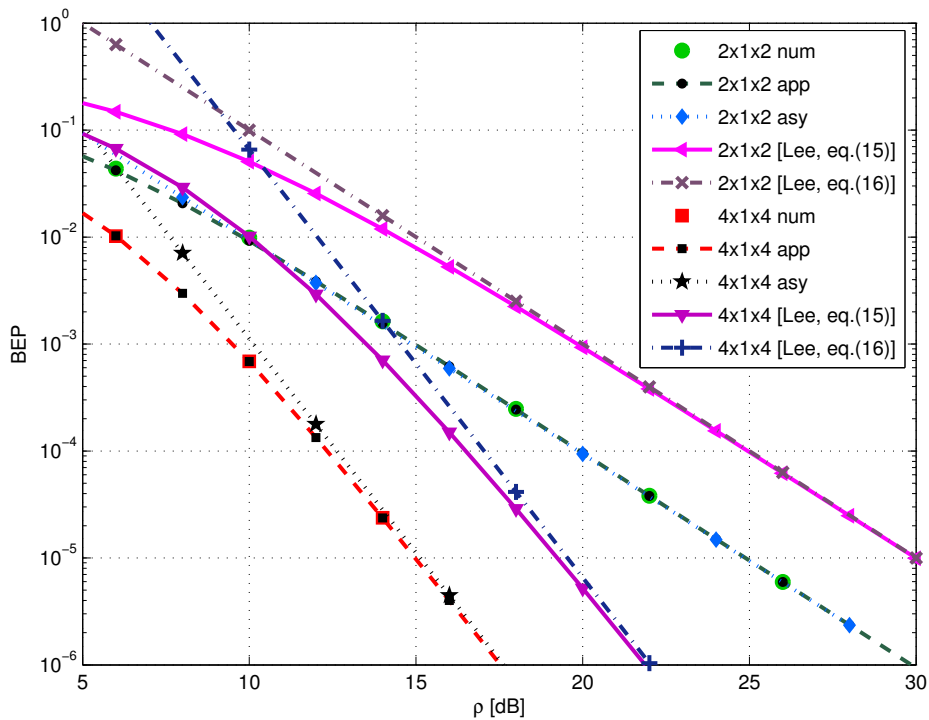
На слика 4.8 е дадена веројатноста на грешка за 2x1x2 систем со Аламути кодирање [17], 3x1x3 со 334 OSTBC и 4x1x4 систем со 434 OSTBC. За овие системи се споредуваат резултатите добиени со Монте Карло симулацијата, многу точните апроксимации добиени



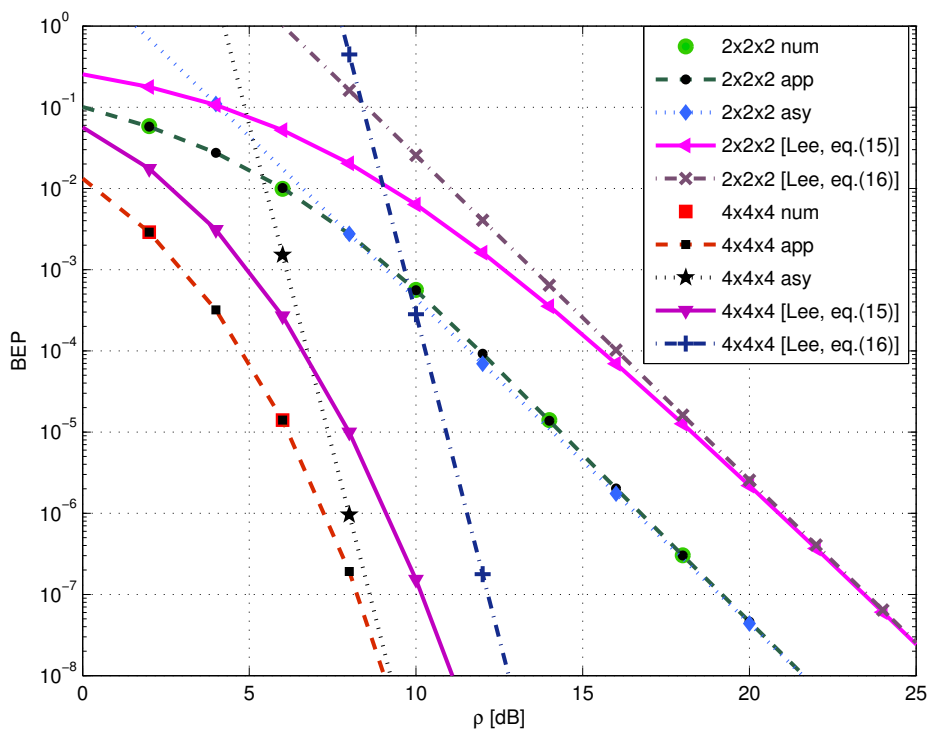
Слика 4.4: ВЕР за МИМО 2x1x2/3x1x3/4x1x4 АФ релејни канали со 222/334/434 ОСТВС.



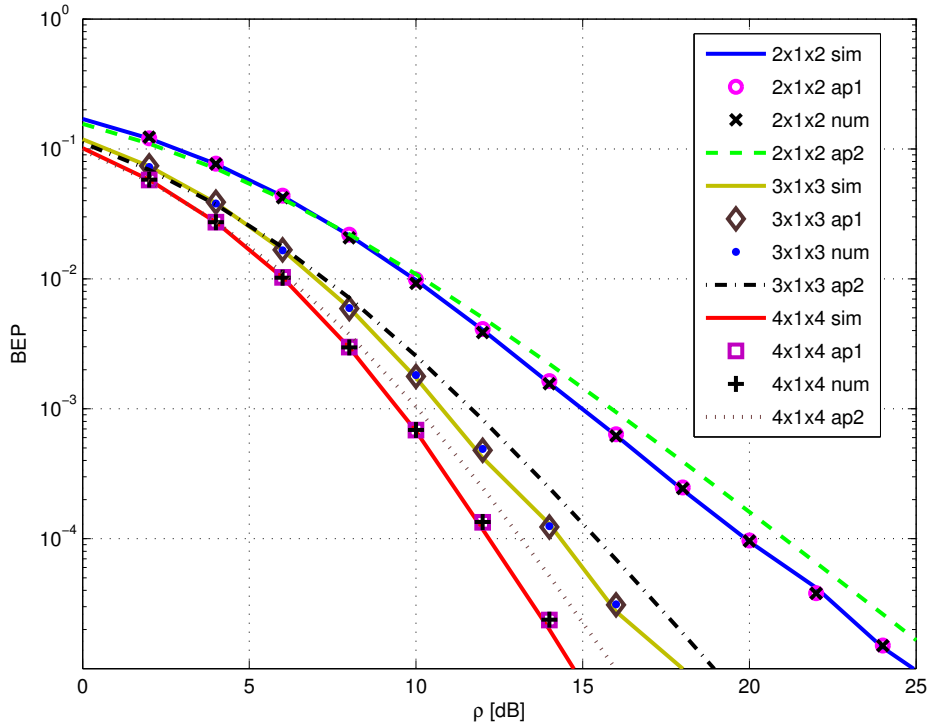
Слика 4.5: ВЕР за МИМО 2x2x2/3x3x3/4x4x4 АФ релејни канали со 222/334/434 ОСТВС.



Слика 4.6: Споредба на ВЕР апроксимациите за МИМО 2x1x2 и 4x1x4 АФ релејни канали со горните граници добиени во [44, eq.(15)] и [44, eq.(16)].



Слика 4.7: Споредба на ВЕР апроксимациите на МИМО 2x2x2 и 4x4x4 АФ релеен канал со горните граници добиени со [44, eq.(15)] и [44, eq.(16)].



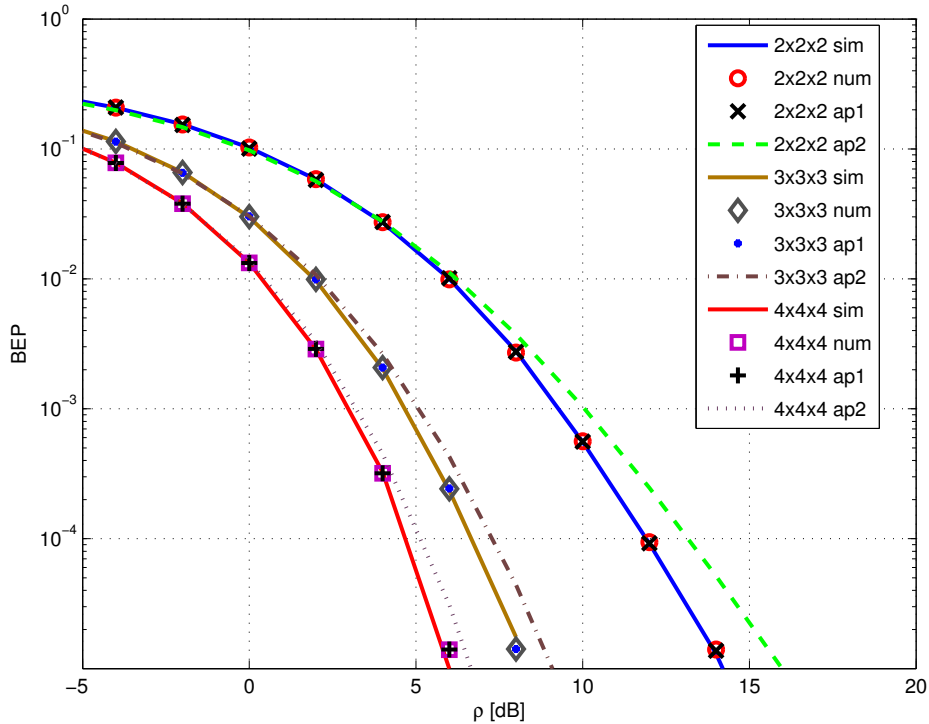
Слика 4.8: BER за дво-делнични МИМО 2x1x2/3x1x3/4x1x4 AF системи со BPSK и 222/334/434 OSTB кодирање.

со (4.25), грубата апроксимација претставена со (4.49) и точните резултати добиени со нумеричка интеграција на [35, eq.(9.15)] со користење на изразите за MGF добиени во [42]. Параметарот ρ кој се користи на хоризонталната оска претставува вкупен среден SNR. Споредбата покажува блиска усогласеност на резултатите добиени со прецизната апроксимација (4.25), точните резултати добиени со нумеричка интеграција и симулацијата како и добра усогласеност со грубата апроксимација (4.49).

На слика 4.9 е презентирана веројатноста за грешка за 2x2x2, 3x3x3 и 4x4x4 систем со користење на OSTBC дадена со (4.46). На сликата е дадена споредба на резултатите добиени со помош на симулација, резултатите добиени со користење на изразот за прецизна апроксимација (4.25), резултатите добиени со користење на изразот за груба апроксимација (4.49) и резултатите добиени со нумеричка интеграција на MGF-от даден во [45, eq.(15)] со користење на [35, eq.(9.15)]. Го избравме MGF-от презентирани во [45] заради подобра нумеричка ефикасност. Споредбата покажува блиска усогласеност на резултатите добиени со прецизната апроксимација (4.25), точните резултати добиени со нумеричка интеграција и симулација како и добра усогласеност со грубата апроксимација (4.49).

За двете системски конфигурации усогласеноста на точните резултати со резултатите добиени со грубата апроксимација е подобра за помали вредности на односот сигнал-шум и е полоша за поголеми вредности на односот сигнал-шум.

Со анализата на резултатите во 4.8 и 4.9 покажавме дека резултатите добиени со грубата апроксимација на BER добро се усогласени со точните вредности добиени со симулација, нумеричка интеграција и блиската апроксимација 4.25. Усогласеноста на резултатите е подобра за помали вредности на односот сигнал-шум.



Слика 4.9: BER за дво-делнични МИМО 2x2x2/3x3x3/4x4x4 AF системи со BPSK и 222/334/434 OSTBC кодирање.

4.3 Веројатност на испад

Во оваа глава ќе ги презентираме апроксимации за веројатноста за испад (OP) за целиот однос сигнал-шум кој е од практичен интерес за AF релејните канали со информации за каналот достапни во релето и дестинацијата, кои користат повеќе антени во јазлите и OSTBC пренос преку рамен Рејлиев фединг. За анализата на веројатноста за испад го користиме истиот релеен канал претставен на слика 4.1 и чиј модел е опишан во глава 4.2. Имено, ќе бидат дадени апроксимации на веројатноста на испад на дво-делничниот DCF релеен канал, кој се состои од извор, DCF полу-дуплексно реле и дестинација, при што сите јазли се екипирани со повеќе антени и користат OSTBC пренос во Рејлиев фединг. Во AF релето, влезниот сигнал се раздвојува, засилува и испраќа кон дестинацијата. Ние дојдовме до универзална апроксимација за веројатноста за испад за тие системи, која се покажува многу прецизна за сите SNR вредности кои се од практичен интерес. Исто така прецизната апроксимација ја упростивме со што добивме груба апроксимација на OP. Резултатите за веројатноста за испад добиени со прецизната и грубата апроксимација ќе се споредат со точните резултати на веројатноста на испад добиени со нумеричка инверзија на Лапласовата трансформација на функцијата за генерирање на моменти и со резултатите добиени со Монте Карло симулации. Споредбата покажува добро преклопување на резултатите [61].

Веројатноста за испад (OP) е дефинирана како веројатност дека моменталниот SNR ќе падне под одреден праг γ_{th} . Имајќи го во предвид изразот (4.21) веројатноста за испад може да се добие како:

$$P_{out} = P(\gamma < \gamma_{th}) = F_{\Gamma}(\gamma)|_{\gamma=\gamma_{th}} \approx F_{\Gamma_a}(\gamma)|_{\gamma=\gamma_{th}}. \quad (4.50)$$

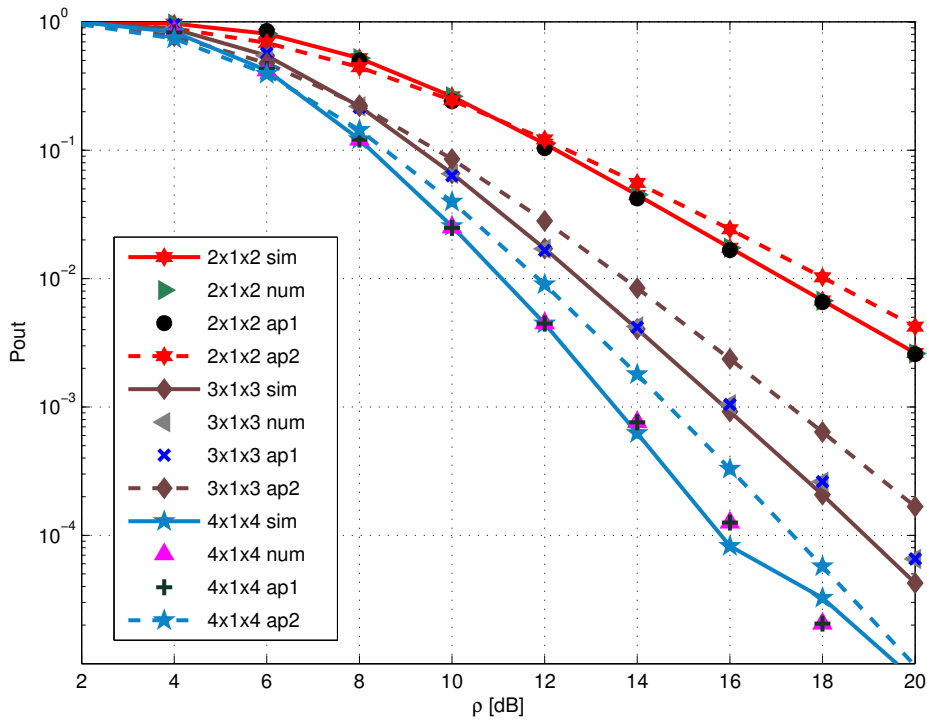
Со замена на (4.14) во (4.15) може да ги најдеме точните вредности на OP со помош на

нумеричка инверзија на Лапласовата трансформација и со користење на (4.50) може да добиеме точни апроксимации на веројатноста за испад за двете системски конфигурации ($N \times 1 \times N$ и $N \times N \times N$). Со цел да се симплифицира изразот (4.21) ги земаме во предвид само членовите каде $k = 0$. Оваа симплификација води кон груба апроксимација на веројатноста за испад:

$$P_{\text{out}} \approx 1 - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(b+1)^n}{n!} \cdot \left(\frac{\gamma_{th}}{\bar{\gamma}} \right)^n \cdot \exp\left(-\frac{(b+1)\gamma_{th}}{\bar{\gamma}} \right). \quad (4.51)$$

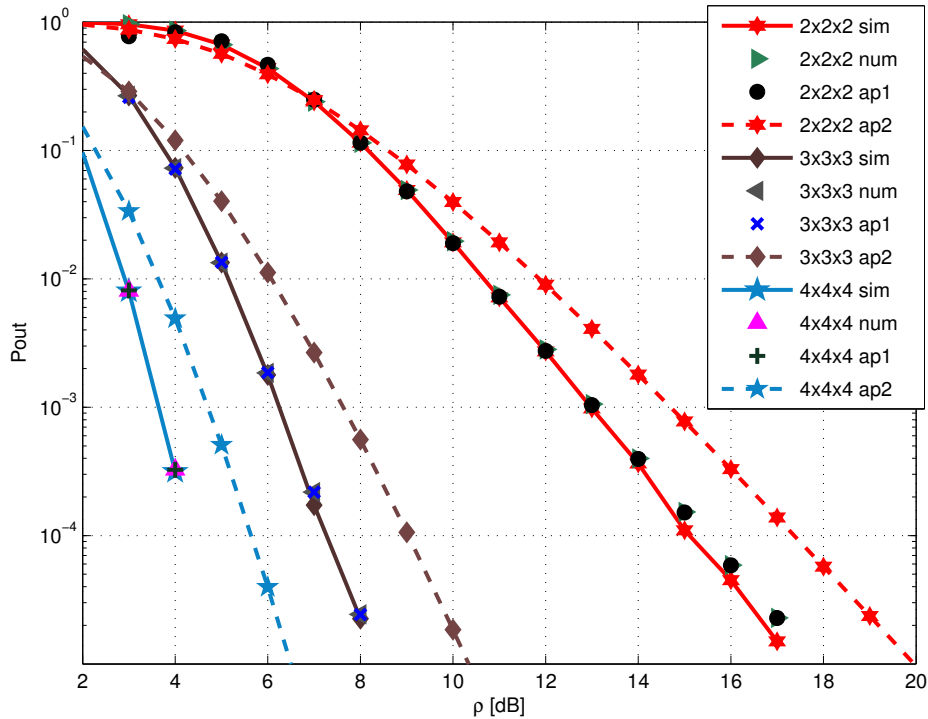
Претходните изрази може да се користат за пресметка на прецизната (4.50) и грубата (4.51) апроксимација на веројатноста за испад за $N \times 1 \times N$ систем ($m = N$ и $b = c$) и за $N \times N \times N$ system ($m = N^2$ и $b = 1$).

Во продолжението на оваа глава ќе ја илустрираме точноста на нашите апроксимации. На почеток ќе ги споредиме апроксимациите на веројатноста за испад за различен број на антени N со споредба на: (а) точните вредности добиени со нумеричка инверзија на Лапласовата трансформација на функцијата за генерирање на моменти, и (б) на вредностите добиени со Монте Карло симулации.



Слика 4.10: ОР за AF МИМО релеен канал со реле со една антена ($\gamma_{th} = 5dB$).

За инверзната Лапласова трансформација се користи Ојлеровата нумеричка техника дадена во ([64, eq.(12)], [64, eq.(13)]). Ќе се фокусираме на истите OSTBC шеми презентирани во главите 3.3.2, 3.3.4 и 4.2.4 (222, 334 и 434). Во сликите прикажани во оваа нумеричка анализа ќе се користи кратенката „sim“ доколку кривата е добиена со користење на Монте-Карло симулација, кратенката „num“ доколку кривата е добиена со нумеричка интеграција на соодветната MGF функција, кратенката „ap1“ доколку кривата е добиена со точниот апроксимативен израз (4.50) и кратенката „ap2“ доколку кривата е добиена со грубиот апроксимативен израз (4.51).



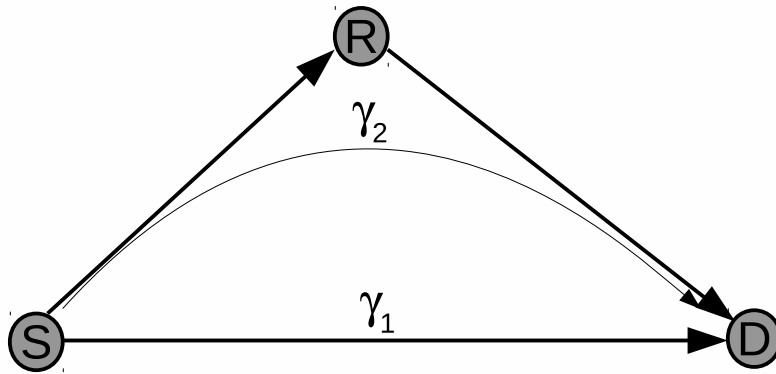
Слика 4.11: OP за AF МИМО релеен канал со реле со повеќе антени ($\gamma_{th} = 5dB$).

На слика 4.10 се презентирани резултатите за веројатноста за испад за $N \times 1 \times N$ систем со максимум 4 антени во изворот и дестинацијата. Кривите со полна линија ги претставуваат резултатите за веројатноста на испад добиени со Монте Карло симулации, триаголните маркери ги претставуваат точните OP резултати добиени со нумеричка инверзија на Лапласовата трансформација (4.15), кривите со испрекинати линии ги претставуваат резултатите добиени со грубата апроксимација (4.51) и останатите маркери (o, x и +) ги претставуваат резултатите добиени со изразите за точни апроксимации на веројатноста на испад (4.50). Треба да се напомене дека соодветните криви за $N > 4$ можат лесно да се добијат. Слично на слика 4.11 се претставени OP резултатите за $N \times N \times N$ систем со максимум 4 антени во изворот, релето, и дестинацијата. Кривите со полни линии ги претставуваат OP резултатите добиени со Монте Карло симулации, триаголните маркери претставуваат точни OP резултати кои се добиени со нумеричка инверзија на Лапласовата трансформација (4.15), кривите со испрекинати линии претставуваат резултати добиени со грубата апроксимација (4.51) и преостанатите маркери (o, x и +) ги претставуваат резултатите добиени со користење на изразот за прецизна апроксимација на веројатноста на испад (4.50). Двете споредби покажуваат преклопување на резултатите добиени со апроксимација (4.50), точните резултати добиени со нумеричка инверзија на Лапласовата трансформација и резултатите добиени со Монте Карло симулации.

Во оваа глава ја анализиравме веројатноста на испад на дво-делничен релеен канал со повеќе антени во изворот релето и дестинацијата кој користи OSTBC и засили-и-проследи постапка во релето. За тие системи изведовме генерализирани изрази во затворена форма за прецизна (4.50) и груба (4.51) апроксимација на веројатноста за испад. Покажавме дека резултатите добиени со нашите апроксимации блиску ги следат точните резултати и резултатите добиени со Монте Карло симулации.

4.4 МИМО релеен канал: Вклучување на директна патека во анализата

Во главите 4.2 и 4.3 беа анализирани перформансите на МИМО релејните канали кај кои нема директна патека од изворот до дестинацијата. Тоа е случај кога испратениот сигнал од изворот во дестинацијата е многу слаб или воопшто не постои. Во таков случај дестинацијата го реконструира испратениот сигнал само врз основ на испратениот сигнал во релето. Ваквите системи често се нарекуваат каскадни релејни канали. Во оваа глава анализата ќе ја прошириме со вклучување на директна патека од изворот до дестинацијата.



Слика 4.12: Релеен канал со директна патека до дестинацијата

Информациско-теоретската анализа во 2 покажа дека користењето на реле кое ја помага комуникацијата може да доведе до зголемување на капацитетот на системот. Доколку се разгледува изразот за засили-и-проследи 2.231 може да се види дека резултантниот однос сигнал-шум е сума од две случајни променливи: односот сигнал-шум на делницата од изворот до дестинацијата и еквивалентниот однос сигнал-шум на делницата која го вклучува и релето (види слика 4.12). Во оваа глава ќе ги разгледуваме перформансите на овој релеен канал за случај кога релето користи засили-и-проследи под претпоставка дека односот сигнал-шум во делницата од изворот до дестинацијата е статистички независен од еквивалентниот однос сигнал-шум на делницата која го вклучува релето.

4.4.1 Едноставен израз за PDF за МИМО RC без директна патека

Во оваа глава ќе го упростиме изразите за CDF (4.21) и PDF (4.23) за засили-и-проследи МИМО релеен канал без директна патека до дестинацијата, кој користи OSTBC пренос во Рејлиев фединг [62]. Ова упростување е неопходно за едноставна математичката анализа на перформансите на МИМО релејниот канал со директна патека до дестинацијата. Точноста на ова упростување претходно ја проверивме за системот без директна патека преку анализа на грубите апроксимации за EP во глава 4.2 и грубата апроксимација за OP во глава 4.3 кои се добиваат со користење на предложеното упростување.

Следејќи го пристапот за добивање на 4.49 и 4.51 за да се поедностави изразот (4.21) се земаат само членовите каде $k = 0$ што резултира во груба апроксимација на CDF:

$$F_{G_1}(\gamma) \approx 1 - \exp\left(-\frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}}\right) \cdot \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(b+1)^n}{n!} \cdot \left(\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right)^n. \quad (4.52)$$

Вториот член од (4.52) може да се изрази преку гама и горна некомплетна гама функција [38, eq.(8.350.2)] со користење на [38, eq.(8.352.2)]:

$$\exp\left(-\frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}}\right) \cdot \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(b+1)^n}{n!} \cdot \left(\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right)^n = \frac{\Gamma\left(m, \frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}}\right)}{\Gamma(m)} \quad (4.53)$$

Доколку го замениме (4.53) во (4.52) и користиме [39, eq.(6.5.3)] ќе го добиеме следниов израз за кумулативната дистрибутивна функција за каскадниот AF МИМО релеен канал:

$$F_{\Gamma_1}(\gamma) \approx 1 - \frac{\Gamma\left(m, \frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}}\right)}{\Gamma(m)} = \frac{\gamma\left(m, \frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}}\right)}{\Gamma(m)}, \quad (4.54)$$

каде $\gamma(\dots)$ е долна некомплетна гама функција [38, eq. (8.350.1)].

Тврдење 4.1.

CDF функцијата дадена во (4.54) е CDF на случајна променлива која ја следи гама функцијата на густина на веројатност со параметар на облик m и параметар на размер $\theta = \bar{\gamma}/(b+1)$, затоа моменталниот крај-крај SNR даден во (4.7) за каскадниот AF МИМО RC може грубо да се апроксимира со случајна променлива која ја следи гама функцијата на густина на веројатност:

$$f(\gamma) = \frac{1}{\theta^m \cdot \Gamma(m)} \gamma^{m-1} e^{-\frac{\gamma}{\theta}} \quad \text{каде } \theta = \frac{\bar{\gamma}}{b+1} \quad (4.55)$$

Доказ:

$$\begin{aligned} F(\gamma) &= Pr(x \leq \gamma) = \int_0^\gamma f(x) dx = 1 - \int_\gamma^\infty \frac{1}{\theta^m \Gamma(m)} \cdot x^{m-1} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \\ &= 1 - \int_\gamma^\infty \frac{1}{\theta^{m-1} \Gamma(m)} \cdot x^{m-1} e^{-\frac{x}{\theta}} \frac{1}{\theta} \cdot dx = 1 - \frac{1}{\Gamma(m)} \cdot \int_\gamma^\infty \left(\frac{x}{\theta}\right)^{m-1} e^{-\frac{x}{\theta}} d\left(\frac{x}{\theta}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{\Gamma(m)} \cdot \int_{\frac{\gamma}{\theta}}^\infty v^{m-1} e^{-v} \cdot dv = 1 - \frac{\Gamma\left(m, \frac{\gamma}{\theta}\right)}{\Gamma(m)} = 1 - \frac{\Gamma\left(m, \frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}}\right)}{\Gamma(m)} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Доколку во 4.55 се замени $\theta = \frac{\bar{\gamma}}{b+1}$ се добива:

$$f(\gamma) = \frac{(b+1)^m}{\bar{\gamma}^m \cdot \Gamma(m)} \gamma^{m-1} e^{-\frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}}} \quad (4.57)$$

4.4.2 PDF на односот сигнал-шум на AF МИМО RC со директна патека

За директната делница до дестинацијата ќе претпоставиме дека е под влијание на Рејлиев фединг во кој случај односот сигнал-шум ја следи гама функцијата на густина на веројатност:

$$f_{\Gamma_1} := \frac{1}{\bar{\gamma}^m \cdot \Gamma(m)} \gamma^{m-1} e^{-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}} \quad (4.58)$$

За делницата преку релето ќе земеме дека ја следи грубата апроксимација за односот сигнал-шум 4.57:

$$f_{\Gamma_2} := \frac{(b+1)^m}{\bar{\gamma}^m \cdot \Gamma(m)} \gamma^{m-1} e^{-\frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}}}. \quad (4.59)$$

Резултантната случајна променлива е сума од две случајни променливи кои следат Гама PDF-и со различен параметар на размер:

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad (4.60)$$

Во општ случај сумата на n случајни променливи кои следат гама функции на густина на веројатност со различни параметри на облик и размер е:

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad f_i(x_i) = \frac{x_i^{\alpha_i}}{\theta_i^{\alpha_i} \cdot \Gamma(\alpha_i)} e^{-\frac{x_i}{\theta_i}} \quad (4.61)$$

Согласно [63] густината на веројатност на случајната променлива Y дефинирана согласно (4.61) е:

$$g(y) = C \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_k \cdot y^{\rho+k-1}}{\Gamma(\rho+k) \cdot \theta_l^{\rho+k}} e^{-\frac{y}{\theta_l}} \quad (4.62)$$

каде:

$$\theta_l = \min_i(\theta_i) \quad \rho = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \quad C = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\theta_l}{\theta_i}\right)^{\alpha_i} \quad (4.63)$$

$$\delta_{k+1} = \frac{1}{k+1} \cdot \sum_{i=1}^{k+1} i \cdot \gamma_i \cdot \delta_{k+1-i}, \quad k = 0, 1, 2, \quad \delta_0 = 1; \quad \gamma_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(1 - \frac{\theta_l}{\theta_i}\right)^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.64)$$

Да го сведеме генерализираниот израз даден со (4.62), 4.63 и 4.64 за случајот со две случајни променливи даден со (4.58), 4.59 и 4.61. Првиот член од 4.63 се сведува на:

$$\theta_l = \min\left(\bar{\gamma}, \frac{\bar{\gamma}}{b+1}\right) = \frac{\bar{\gamma}}{b+1}, \quad (4.65)$$

а вториот и третиот член се:

$$\rho = 2 \cdot m \quad C = \left(\frac{\bar{\gamma}/(b+1)}{\bar{\gamma}}\right)^m \cdot \left(\frac{\bar{\gamma}/(b+1)}{\bar{\gamma}/(b+1)}\right)^m = (b+1)^{-m}. \quad (4.66)$$

Вториот член од (4.64) за $k = 1, 2, 3$ е:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= m \cdot \left(1 - \frac{\bar{\gamma}/(b+1)}{\bar{\gamma}}\right) = m \cdot \left(1 - \frac{1}{(b+1)}\right) = \left(\frac{b \cdot m}{b+1}\right) \\ \gamma_2 &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(1 - \frac{1}{(b+1)}\right)^2 = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^2, \quad \gamma_3 = \frac{1}{3} \cdot m \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^3 \end{aligned} \quad (4.67)$$

Доколку се земе во предвид (4.67) за првиот член од (4.64) за $k = 1, 2, 3$ се добива:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \gamma_1 = \frac{m \cdot b}{b+1}, \quad \delta_2 = \frac{1}{2} \cdot (\gamma_1 \cdot \delta_1 + 2 \cdot \gamma_2) = \frac{1}{2} \cdot (\gamma_1^2 + 2 \cdot \gamma_2) = \frac{1}{2} \cdot (\gamma_1^2 + 2 \cdot \gamma_2) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(m^2 \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^2 + m \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^2\right) = \frac{m \cdot (1+m)}{2} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^2, \\ \delta_3 &= \frac{1}{3} \cdot (\gamma_1 \cdot \delta_2 + 2 \cdot \gamma_2 \cdot \delta_1 + 3 \cdot \gamma_3) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{m \cdot b}{b+1} \cdot \frac{m \cdot (1+m)}{2} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^2 + 2 \cdot \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^2 \frac{m \cdot b}{b+1} + m \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^3\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{m^2 \cdot (1+m)}{2} \cdot \left(\frac{b}{b+1} \right)^3 + m^2 \cdot \left(\frac{b}{b+1} \right)^3 + m \cdot \left(\frac{b}{b+1} \right)^3 \right) = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{m^2 \cdot (1+m)}{2} + m^2 + m \right) \cdot \left(\frac{b}{b+1} \right)^3 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{m^2 + m^3 + 2m^2 + 2m}{2} \right) \cdot \left(\frac{b}{b+1} \right)^3 = \\
 &\quad \frac{m}{3} \cdot \left(\frac{m^2 + 3m + 2}{2} \right) \cdot \left(\frac{b}{b+1} \right)^3 = \frac{m}{3} \cdot \frac{(m+1) \cdot (m+2)}{2} \cdot \left(\frac{b}{b+1} \right)^3 \quad (4.68)
 \end{aligned}$$

Од (4.68) но и доколку се продолжи со развојот во (4.67) и (4.68) за $k > 3$ може да се заклучи дека во општ случај:

$$\delta_i = \frac{(m)_i}{i!} \cdot \left(\frac{b}{b+1} \right)^i \quad (4.69)$$

Доколку (4.65), (4.66) и (4.69) се заменат во (4.62) за Γ во (4.60) добиваме дека ја следи следнава функција на густина на веројатност:

$$\begin{aligned}
 f_{\Gamma}(\gamma) &= C \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_k \cdot \gamma^{\rho+k-1}}{\Gamma(\rho+k) \cdot \theta_l^{\rho+k}} e^{-\frac{\gamma}{\theta_l}} = \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1} \right)^k \cdot \frac{\gamma^{\rho+k-1}}{\Gamma(\rho+k) \cdot \theta_l^{\rho+k}} e^{-\frac{\gamma}{\theta_l}} = \\
 &= \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1} \right)^k \cdot \frac{\gamma^{2m+k-1}}{\Gamma(2m+k) \cdot \theta_l^{2m+k}} \cdot e^{-\frac{\gamma}{\theta_l}} \quad (4.70)
 \end{aligned}$$

Изразот (4.70) може да се претстави во следниов облик:

$$f_{\Gamma}(\gamma) = \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1} \right)^k \cdot f_{\Gamma}(\gamma; \theta_l, 2 \cdot m + k) \quad (4.71)$$

каде $f_{\Gamma}(\gamma; \theta_l, 2 \cdot m + k)$ е гама функција со параметар на облик $\theta_l = \bar{\gamma}/(b+1)$ и параметар на облик $\alpha = 2m + k$. Доколку (4.65) се замени во (4.70) се добива најопштиот облик на функцијата на густина на веројатност на случајната променлива Γ која го претставува моменталниот однос сигнал-шум на влезот на дестинацијата за системот прикажан на слика 4.12:

$$f_{\Gamma}(\gamma) = \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1} \right)^k \cdot \frac{\gamma^{2m+k-1} (b+1)^{2m+k}}{\Gamma(2m+k) \cdot \bar{\gamma}^{2m+k}} \cdot e^{-\frac{(b+1) \cdot \gamma}{\bar{\gamma}}} \quad (4.72)$$

4.4.3 ОР на АФ МИМО релеен канал со директна патека

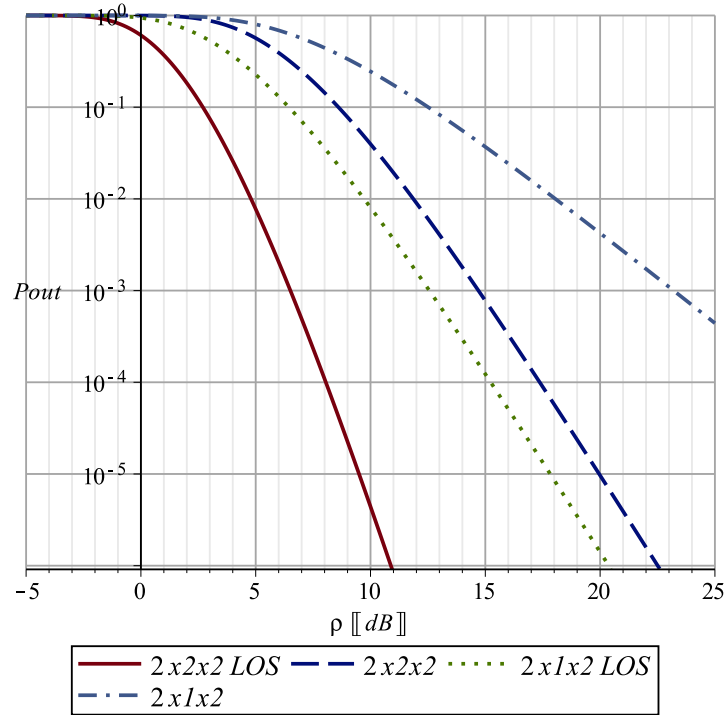
Доколку (4.70) се замени во (4.50) се добива веројатноста на испад на АФ МИМО релејните канали кога постои директна патека од изворот до дестинацијата:

$$\begin{aligned}
 P_{out} &= Pr(\gamma \leq \gamma_{th}) = F(\gamma)|_{\gamma=\gamma_{th}} = \int_0^{\gamma_{th}} f(\gamma) d\gamma = 1 - \int_{\gamma_{th}}^{\infty} f(\gamma) d\gamma = \\
 &= 1 - \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1} \right)^k \cdot \frac{1}{\Gamma(2m+k)} \cdot \int_{\gamma_{th}}^{\infty} \frac{\gamma^{2m+k-1}}{\theta_l^{2m+k}} e^{-\frac{\gamma}{\theta_l}} d\gamma = \quad (4.73)
 \end{aligned}$$

Интегралот во (4.73) е:

$$\int_{\gamma_{th}}^{\infty} \frac{\gamma^{2m+k-1}}{\theta_l^{2m+k}} e^{-\frac{\gamma}{\theta_l}} d\gamma = \int_{\gamma_{th}}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{\theta_l} \right)^{2m+k-1} e^{-\frac{\gamma}{\theta_l}} d\left(\frac{\gamma}{\theta_l} \right) =$$

$$\int_{\frac{\gamma_{th}}{\theta_l}}^{\infty} t^{2m+k-1} e^{-t} dt = \Gamma\left(2m+k, \frac{\gamma_{th}}{\theta_l}\right) \quad (4.74)$$



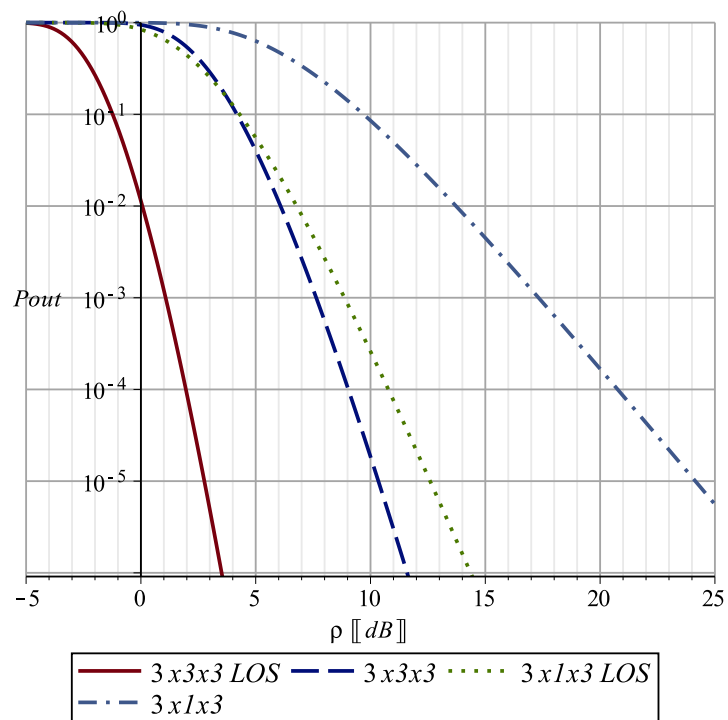
Слика 4.13: ОР за 2x2x2/2x1x2 со 222 OSTBC релеен канал со и без директна патека до дестинацијата за $\gamma_{th} = 5dB$

Доколку (4.74) се замени во (4.73) за веројатноста на испад се добива:

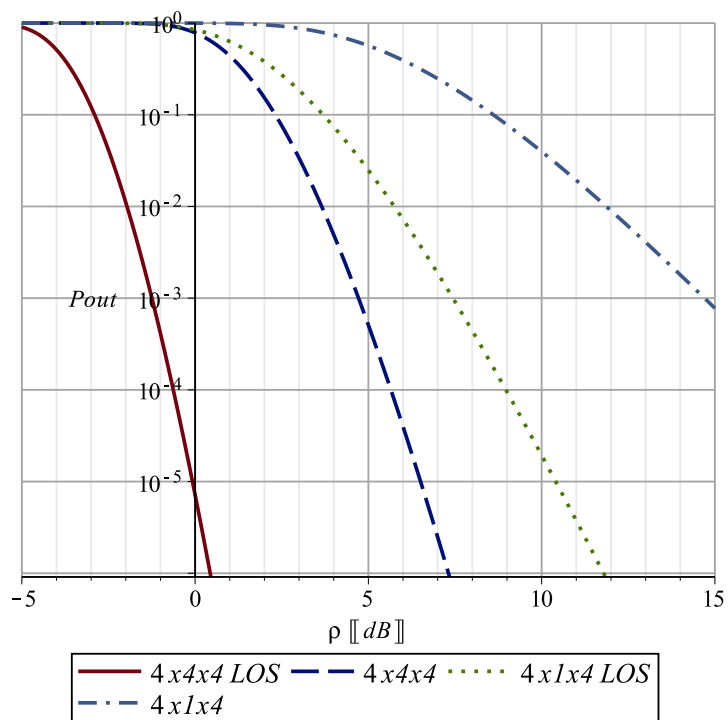
$$\begin{aligned} P_{out} &= 1 - \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \frac{\Gamma(2m+k, \gamma_{th}/\theta_l)}{\Gamma(2m+k)} = \\ &= 1 - \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \frac{\Gamma\left(2m+k, \frac{\gamma_{th}(b+1)}{\gamma}\right)}{\Gamma(2m+k)} \end{aligned} \quad (4.75)$$

На сликите 4.13, 4.14 и 4.15 е дадена веројатноста на испад на АФ МИМО релејните системите разгледувани во глава 4.3 во случај кога има директна патека до дестинацијата во споредба со веројатноста на испад на каскадните АФ МИМО релејни канали кај кои нема директна патека до дестинацијата во случај кога прагот е $\gamma_{th} = 5dB$. Имено, на овие слики се споредуваат изразите за веројатност на испад (4.51) и (4.75) кои се базираат на грубата апроксимација на функцијата на густина на веројатност на каскадниот МИМО релеен канал дадена со (4.57).

Од сликите 4.13, 4.14 и 4.15 може да се заклучи дека АФ МИМО релејните канали со директна патека имаат значително подобри перформанси во споредба со АФ МИМО релејните канали без директна патека, како и што можеше да се претпостави од информатичко теоретската анализа во глава (2). На пример, за 2x2x2 системот за $\rho = 10dB$ веројатноста на испад на системот без директна патека е $4 \cdot 10^{-2}$, а веројатноста на испад за истиот тој систем со директна патека изнесува $4 \cdot 10^{-6}$ што претставува подобрување на перформансите од четири редни големини. Слични подобрувања се забележуваат и кај $N \times 1 \times N$ системската конфигурација. Исто така, од сликите 4.13, 4.14



Слика 4.14: ОР за $3 \times 3 \times 3 / 3 \times 1 \times 3$ 334 OSTBC систем со и без директна патека до дестинацијата за $\gamma_{th} = 5dB$



Слика 4.15: ОР за $4 \times 4 \times 4 / 4 \times 1 \times 4$ со 434 OSTBC систем со и без директна патека до дестинацијата $\gamma_{th} = 5dB$

и 4.15 може да се забележи дека системите со директна патека имаат поголема добивка на диверзитет од системите без директна патека. Разликата во добивка од диверзитет се намалува со зголемување на бројот на антени.

5 Веројатност на испад во релеен канал со повеќе делници

Во кооперативните комуникации, веројатноста за испад (OP) е една од клучните метрики за перформансите на релејниот канал. Во оваа глава, ќе ја анализираме крај-крај веројатноста за испад на релејните канали во услови на Рејлиев, Накагами, Рајсов и Веибул фединг. Како и во претходните глави разгледуваме засили-и-проследи (AF) релеен канал но во овој случај релејниот канал е со повеќе делници и една антена по јазол. Анализата на овие системи ќе се спроведе за случаите на реле со фиксно (FG) и променливо засилување (VG) [64]. На релето со фиксно засилување му е потребно да го знае средниот однос сигнал-шум, додека на релето со променливо засилување потребно е да ја познава моменталната состојба на каналот (CSI) за секоја делница.

5.1 Модел на каналот

На слика 5.1 е претставен не-регенеративен релеен канал со повеќе делници, кој содржи извор T , дестинација D и $(N-1)$ AF релее. Секоја делница е предмет на независен Рејлиев, Накагами, Рајсов и Веибул фединг, за кои моменталниот SNR по делница (γ) е распределен согласно функциите на густина на веројатност (PDF) дадени во [35]:

$$p_{ray}(\gamma) = \frac{1}{\bar{\gamma}} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right) \quad (5.1)$$

$$p_{nak}(\gamma) = \frac{m^m \cdot \gamma^{m-1}}{\bar{\gamma}^m \cdot \Gamma(m)} \cdot \exp\left(-\frac{m \cdot \gamma}{\bar{\gamma}}\right) \quad (5.2)$$

$$p_{ric}(\gamma) = \frac{(1+K)}{\bar{\gamma}} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}} - K\right) \cdot I_0\left(2\sqrt{\frac{K \cdot (1+K)\gamma}{\bar{\gamma}}}\right) \quad (5.3)$$

$$p_{wei}(\gamma) = \frac{c}{2} \cdot \left(\frac{\Gamma(1+\frac{2}{c})}{\bar{\gamma}}\right)^{\frac{c}{2}} \cdot \gamma^{\frac{c}{2}-1} \cdot \exp\left(-\left(\frac{\gamma}{\bar{\gamma}} \Gamma\left(1+\frac{2}{c}\right)\right)^{\frac{c}{2}}\right) \quad (5.4)$$

соодветно, каде m во (5.2) го претставува Накагами фединг параметарот, $\bar{\gamma}$ е среден SNR по делница, K во (5.3) е рајсов фактор, c во (5.4) е Веибул параметар, $I_0(\cdot)$ во (5.3) е модифицирана Беселова функција од прв вид и нулти ред, и $\Gamma(\cdot)$ во (5.2) и (5.3) е Гама функција.

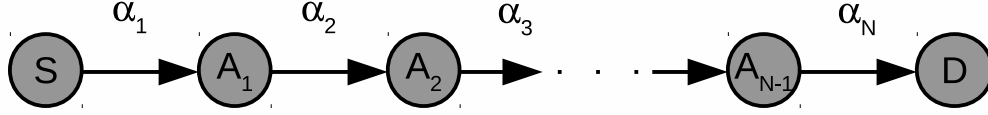
Во случај на AF, релето го засилува и потоа препраќа примениот сигнал од претходниот јазол, додека во случај на декодирај-и-проследи (DF), релето во целост го декодира примениот сигнал и потоа го испраќа. Релеите со променливо и фиксно засилување се моделирани согласно концептите презентирани во [53] и [6], соодветно. На слика 5.1 е претставен систем со N -делници, со нископропусниот-еквивалентен сигнал на влезот од n -то реле изразен како:

$$r_n(t) = A_{n-1} \cdot \alpha_n \cdot \sqrt{E_n} \cdot r_{n-1}(t) + w_n(t), \quad (5.5)$$

каде A_{n-1} е изасилување на $(n-1)$ -то реле, α_n е аплитудата на федингот на n -та делница, E_n е предавателната моќност на $(n-1)$ -то реле, r_{n-1} е сигналот на влезот од $(n-1)$ -то

реле, и $w_n(t)$ е додавачки бел гаусов шум (AWGN) со средна моќност N_{0n} . Имајќи го во предвид (5.5), моќноста на корисниот сигнал и на шумот во приемниког е:

$$\begin{aligned} P_S &= (A_1^2 A_2^2 \cdots A_{N-1}^2) \cdot (E_1 \alpha_1^2 E_2 \alpha_2^2 \cdots E_N \alpha_N^2) \\ P_N &= (A_1^2 A_2^2 \cdots A_{N-1}^2) \cdot (E_2 \alpha_2^2 E_3 \alpha_3^2 \cdots E_N \alpha_N^2) \cdot N_{01} \\ &+ (A_2^2 \cdots A_{N-1}^2) \cdot (E_3 \alpha_3^2 E_4 \alpha_4^2 \cdots E_N \alpha_N^2) \cdot N_{02} + \cdots + N_{0N}. \end{aligned} \quad (5.6)$$



Слика 5.1: Модел на релеен канал со N -делници

Со користење на (5.6), може да се покаже дека односот сигнал-шум (SNR) на влезот од дестинацијата од системот со N -делници е:

$$\gamma_{eq}^{-1} = \sum_{n=1}^N \left(\prod_{t=1}^{n-1} A_t^2 N_{0t} \prod_{t=1}^n \gamma_t \right)^{-1}. \quad (5.7)$$

Во случај на систем каде релите се со променливо засилување, засилувањето на n -то реле се избира да биде [53]:

$$A_n^2 = \frac{1}{\alpha_n^2} \quad (5.8)$$

каде α_n е фединг амплитуда во n -та делница. Во случај на реле со фиксно засилување засилувањето на n -то реле е фиксно и се избира да биде [6]:

$$A_n = \sqrt{\frac{\bar{\gamma}}{C}} \quad C = \bar{\gamma} \cdot (e^{1/\bar{\gamma}_n} E_1(1/\bar{\gamma}_n))^{-1} \quad (5.9)$$

каде $E_1(\cdot)$ е експоненцијален интеграл дефиниран со [39, eq. (5.1.1)], и $\bar{\gamma}_n$ е среден SNR за n -та делница. Веројатноста за испад е дефинирана како веројатност дека моменталниот SNR ќе падне под прагот γ_{th} :

$$P_{out} = P[\gamma_{eq} < \gamma_{th}]. \quad (5.10)$$

За да се добие веројатноста за испад во случај на релеен канал со променливо засилување на релите, го користевме пристапот базиран на фунцијата за генерирање на моменти (MGF), претставен во [53] и [35].

$$P_{out} = P(\gamma_{eq} < \gamma_{th}) = 1 - P\left(\frac{1}{\gamma_{eq}} < \frac{1}{\gamma_{th}}\right) = 1 - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{M_{1/\gamma_{eq}}(-s)}{s}\right) \Big|_{1/\gamma_{th}} \quad (5.11)$$

каде $M_{1/\gamma_{eq}}$ е MGF од инверзната вредност од крај-крај моменталниот однос сигнал-шум - γ_{eq} . За инверзија на Лапласовата трансформација ја користевме Ојлеровата нумеричка техника [35, Appendix 9B]:

$$P\left(\frac{1}{\gamma_{eq}} < \frac{1}{\gamma_{th}}\right) = \frac{2^{-k} e^{\frac{A}{2}}}{1/\gamma_{th}} \cdot \sum_{k=0}^K \binom{K}{k} \sum_{n=0}^{N+k} \frac{(-1)^n}{\alpha_N} \cdot \text{Re} \left(\frac{M_{1/\gamma} \left(\frac{-A+2\pi j n}{2/\gamma_{th}} \right)}{\frac{A+2\pi j n}{2/\gamma_{th}}} \right) + E(A, K, N), \quad (5.12)$$

$$E(A, K, N) = \frac{e^{-A}}{1 - e^{-A}} + \frac{2^{-k} e^{\frac{A}{2}}}{1/\gamma_{th}} \sum_{k=0}^K (-1)^{N+k+1} \binom{K}{k} \operatorname{Re} \left(\frac{M_{1/\gamma} \left(-\frac{A+2\pi j(N+k+1)}{2/\gamma_{th}} \right)}{\frac{A+2\pi j(N+k+1)}{2/\gamma_{th}}} \right), \quad (5.13)$$

каде $\alpha_n = 1$ за $n = 1, 2, \dots, N$ и $\alpha_n = 2$ за $n = 0$. Земаме $A = 10 \cdot \ln(10)$ со цел да имаме грешки на дискретизација помала од 10^{-10} .

Во случај на Накагами и Рејлиев ($m_n = 1$) фединг, за n -та делница се користи изразот во затворена форма за инверзната вредност на односот сигнал-шум ($1/\gamma_n$) [52, eq.(10)]:

$$M_{1/\gamma_n}(-s) = \frac{2}{\Gamma(m)} \cdot \left(\frac{m_n \cdot s}{\bar{\gamma}_n} \right) \cdot K_{m_n} \left(2 \cdot \sqrt{\frac{m_n s}{\bar{\gamma}_n}} \right). \quad (5.14)$$

Под претпоставка дека делниците се предмет на независен фединг и се користи променливо засилување во релето (5.8), MGF-от на $1/\gamma_{eq}$ е производ на MGF-те на $1/\gamma_n$, $n = 1, 2, \dots, N$ [53].

Во случај на Рајсов фединг, не е можно да се најде $M_{1/\gamma_{eq}}$ во затворена форма и затоа се користи нумеричка интеграција. За Веибул фединг, функцијата на густина на веројатност (5.4) може да се претстави во следнава форма:

$$p_{\gamma_{wei}}(\gamma) = b A^{-b} \gamma^{b-1} \exp \left(- \left(\frac{\gamma}{A} \right)^b \right)$$

каде A и b се:

$$b = \frac{c}{2}, \quad A = \frac{\bar{\gamma}}{\Gamma \left(1 + \frac{2}{c} \right)}.$$

потоа, се пресметува MGF-от за Веибул за оние вредности на аргументот s кои се потребни во Ојлеровата нумеричка техника за инверзија на Лапласовата трансформација:

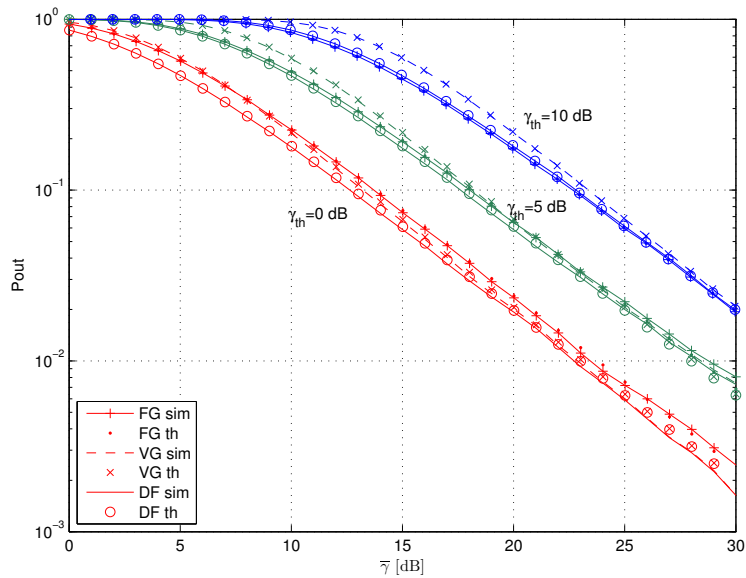
$$M_{1/\gamma_n}(-s) = \int_0^{\infty} b \cdot A^{-b} \cdot \gamma_n^{b-1} e^{-\frac{s}{\gamma_n} - \left(\frac{\gamma_n}{A} \right)^b} d\gamma_n \quad (5.15)$$

5.2 Нумерички и симулациски резултати

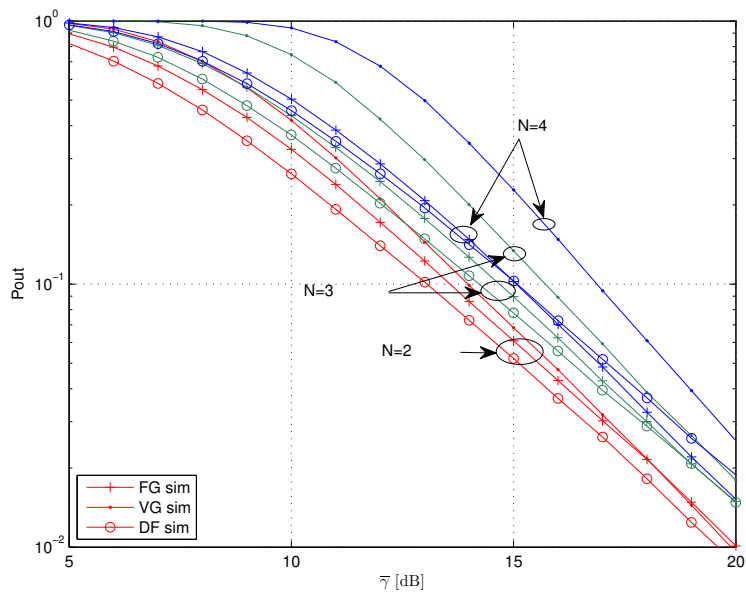
Во оваа глава, ќе се прикажат нумеричките резултати кои го покажуваат идеалното поклопување на резултатите добиени со нумеричка интеграција и соодветните резултати добиени со Монте Карло симулации. За систем со две делници ($N = 2$) во кој релето користи фиксно засилување во случај на Рејлиев фединг наместо (5.11) се користи затворената форма на ОР [6, eq.(9)]:

$$P_{out} = 1 - 2 \cdot \sqrt{\frac{C \cdot \gamma_{th}}{\bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma}_2}} \exp \left(- \frac{\gamma_{th}}{\bar{\gamma}_1} \right) \cdot K_1 \left(2 \sqrt{\frac{C \cdot \gamma_{th}}{\bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma}_2}} \right). \quad (5.16)$$

каде $K_1(\cdot)$ е модифицирана Беселова функција од втор вид и прв ред.



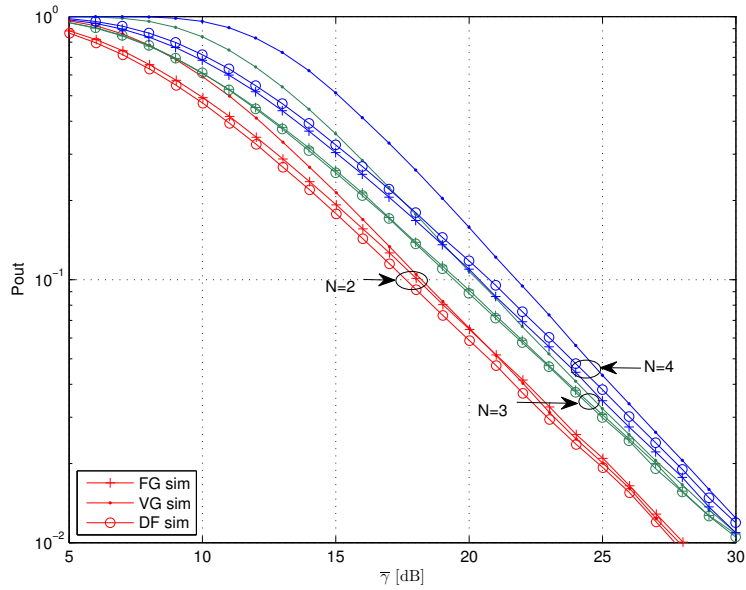
Слика 5.2: ОР перформанси на дво-делничен систем во Рејлиев фединг со $\gamma_{th} = 0, 5, \text{ и } 10 \text{ dB}$



Слика 5.4: ОР за релеен канал за $N=2, 3 \text{ и } 4$ во Веибул фединг кога $\gamma_{th} = 5 \text{ dB}$

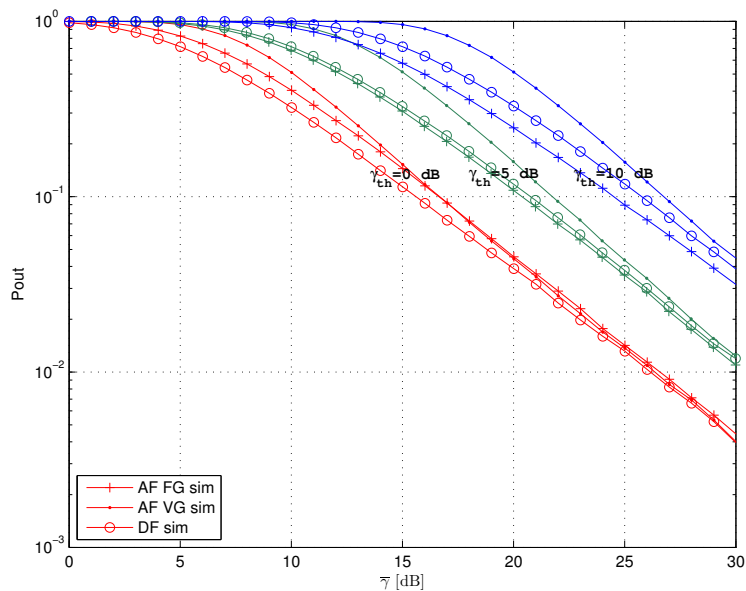
На слика 5.2 е претставена веројатноста на испад за систем со две делници и фиксно засилување во Рејлиев фединг (5.16). За анализираниот систем е земено $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2$, а γ_{th} е поставен на 0, 5 и 10 dB.

На слика 5.3 се презентирани кривите на веројатноста на испад на AF систем со фиксно засилување, AF систем со променливо засилување и DF систем со повеќе делници во Рејлиев фединг. Системите кои се споредуваат се со $N = 2, 3 \text{ и } 4$, и $\gamma_{th} = 5 \text{ dB}$. Од сликата може да се забележи дека за среден до голем SNR, релејниот канал со две делници и со променливо засилување има подобри перформанси (помала веројатност за испад) од соодветниот систем со фиксно засилување, а за мал до среден SNR, системот со фиксно засилување има подобри перформанси од системот со променливо засилување.

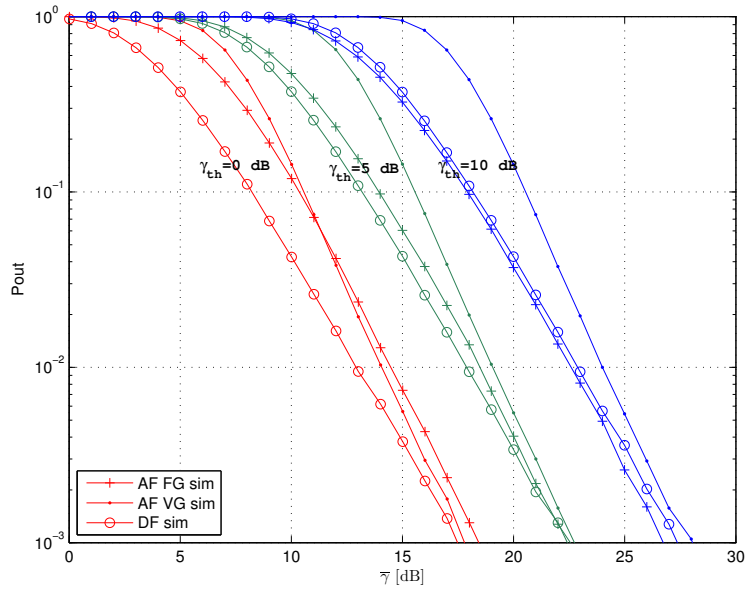


Слика 5.3: ОР за повеќе-делничен систем за $N = 2, 3$ и 4 делници во Рејлиев фединг кога $\gamma_{th} = 5 \text{ dB}$

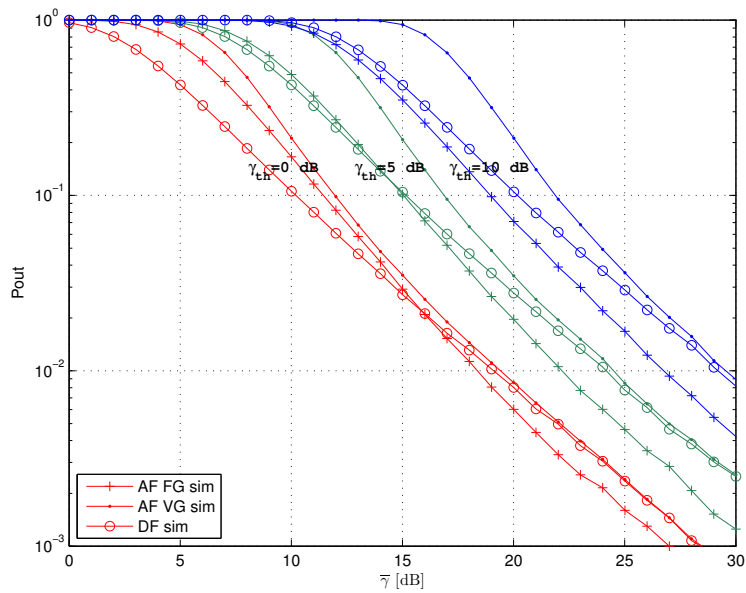
Сепак, како бројот на делници се зголемува, системите со фиксно засилување покажуваат подобри перформанси од од соодветните системи со променливо засилување за целиот SNR опсег од практичен интерес. За другите типови на фединг околина добивме слични резултати. На пример резултатите за Веибул фединг се прикажани на слика 5.4. Треба да се напомене дека во нашата анализа ефектот на заситување на релите со фиксно засилување не е земен во предвид.



Слика 5.5: ОР за 4-делничен систем во Рејлиев фединг за $\gamma_{th} = 0, 5,$ и 10 dB

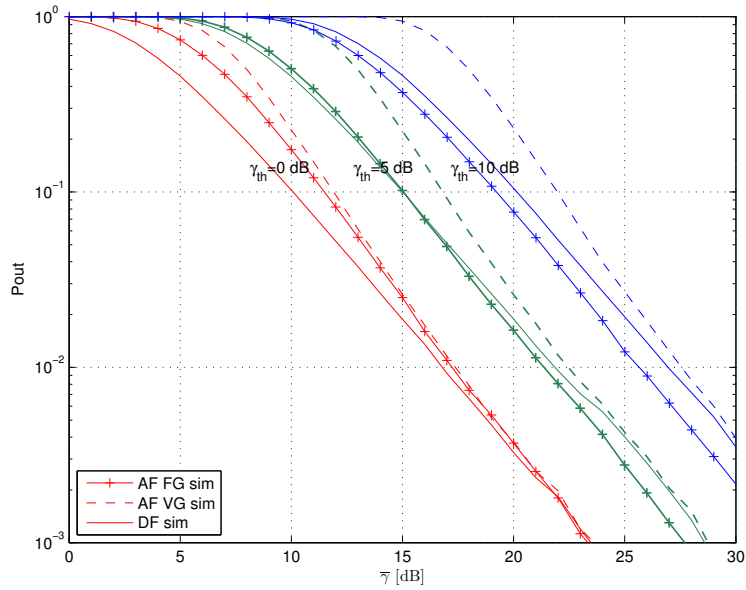


Слика 5.6: ОР за 4 делничен систем во Накагами фединг каде $\gamma_{th} = 0, 5, 10 \text{ dB}$, и $m = 2.3$



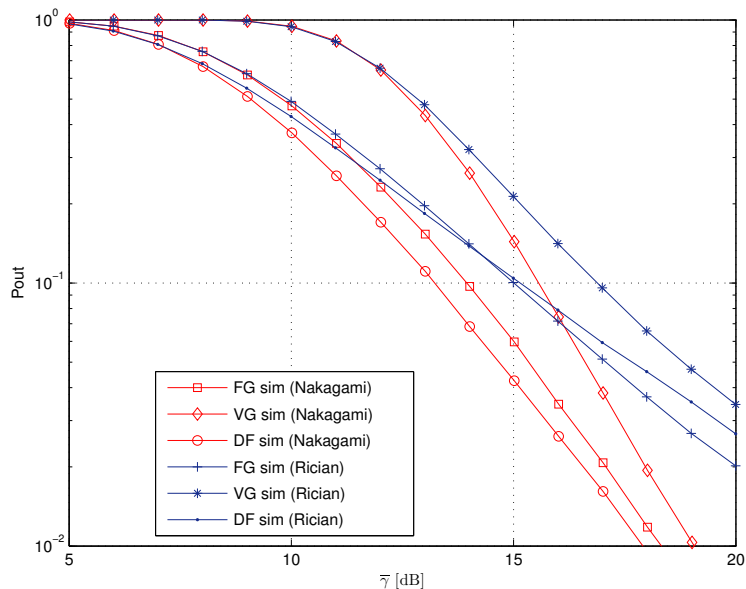
Слика 5.7: ОР за 4 делничен ситем во Рајсов фединг каде $\gamma_{th} = 0, 5, 10 \text{ dB}$ и $K = 3$

Исто така, анализираваме релеен канал со 4 делници и прагови на односот сигнал-шум γ_{th} of 0, 5 и 10 dB во различни фединг околин. На слика 5.5 се претставени резултатите за четири-делничен систем во случај кога сите делници се под влијание на Рејлиев фединг, додека на слика 5.6 се прикажани резултатите за Накагами фединг. На слика 5.7 и 5.8 се презентирани резултатите за Рајсов и Веибул фединг соодветно.



Слика 5.8: ОР за 4 делничен систем во Веибул фединг ($\gamma_{th} = 0, 5, 10 \text{ dB}$)

За нумеричката анализа, ги сетиравме PDF параметрите на следниве вредности: $m = 2.285$, $K = 3$ и $b = 1.5$. Во случај на $\gamma_{th} = 0$ (освен за Рајсов фединг), резултатите повторно покажуваат дека за среден до голем SNR, системите со променливо засилување имаат занемарливо подобри перформанси од системите со фиксно засилување. Сепак, за $\gamma_{th} > 0$, се забележува дека системите со фиксно засилување покажуваат подобри перформанси за сите видови на фединг. Разликата во перформанси помеѓу двата системи се зголемува во корист на системите со фиксно засилување со зголемување на γ_{th} .



Слика 5.9: ОР за 4 делничен систем во Накагами и Рајсов фединг ($\gamma_{th} = 5 \text{ dB}$)

За релеен канал со 4 делници во Рајсов фединг, системите со фиксно засилување имаат подобри перформанси од системите со променливо засилување во целиот опсег на SNR без оглед на прагот γ_{th} . Треба да се истакне дека релеите со фиксно засилување ги

постигнуваат нивните најдобри можни перформанси бидејќи ефектот на чувствителност на сатурација не е земен во предвид. Освен тоа, во сите случаи може да се забележи дека како бројот на делници се зголемува системите со фиксно засилување дури покажуваат занемарливо подобри перформанси и од DF системите заради неоптималната алокација на снаги во DF системите [65].

На слика 5.9 се прикажани ОР перформансите на 4-делничен ситем во Накагами фединг со фединг параметар $m = 2.2857$ и Рајсов фединг со соодветен Рајсов фактор $K = 3$, пресметани согласно изразот (5.17). Со таков избор на параметрите треба да се очекуваат слични фединг ефекти.

$$K = \frac{\sqrt{m^2 - m}}{m - \sqrt{m^2 - m}} \quad (5.17)$$

Имајќи ја во предвид слика 5.9 очигледно е дека апроксимаците се релативно успешни бидејќи ОР перформансите за двата система се слични, особено за мали до средни вердности на средниот SNR. Како средниот SNR се зголемува, системот во Накагами фединг има помала веројатност на испад во споредба со истиот систем во Рајсов фединг.

6 МИМО релеен канал од информациско-теоретски аспект

Во оваа глава ќе го анализираме капацитетот за МИМО релејните канали кои користат OSTBC. Ќе бидат анализирани перформансите на капацитетот на овие системи од аспект на анализа на ергодичниот капацитет и веројатноста на испад.

Во услови на брз фединг должината на блокот се протега на голем број на кохерентни временски интервали (види (1.15)) така што каналот е ергодичен со добро дефиниран Шенонов капацитет кој често се нарекува *ергодичен капацитет*. Сепак ваквото кодирање кај кое блокот се протега низ повеќе кохерентни временски интервали резултира во преголемо доцнење. Ергодичниот капацитет на точка-точка каналот со една антена по јазол е средна вредност по ансамбл на моменталниот капацитет по распределбата на односот сигнал-шум. Тоа е капацитет на каналот кога распределбата на аплитудите на федингот во каналот $|h| = \alpha$ има независна реализација (т.е. моменталната амплитудата на федингот на каналот не зависи од претходните вредности на аплитудата на федингот на каналот). Согласно (1.6) ергодичниот капацитет за точка-точка канал со една антена по јазол е :

$$C = E [\log_2 (1 + \gamma)] \quad \text{bit/Hz/s} \quad (6.1)$$

каде γ е моменталниот однос сигнал-шум, а операторот $E [\dots]$ означува средна вредност по случајната променлива γ .

6.1 Точка-точка МИМО канал

Во телекомуникациите од особена важност е да се дизајнираат методи за пренос кои го искористуваат капацитетот на каналот што е можно повеќе. Ако влезот и излезот на безжичниот канал без меморија го претставиме со случајните променливи X и Y соодветно, каналниот капацитет е [9]:

$$C = \max_{p(x)} \{I(\mathbf{X}; \mathbf{Y})\} \quad (6.2)$$

Вообичаено е да се претстават влезно-излезните релации на теснопојасниот МИМО линк со комплексна векторска нотација во основен опсег:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N} \quad (6.3)$$

каде \mathbf{X} е $N_T \times 1$ вектор на символите во изворот, \mathbf{Y} е $N_R \times 1$ векторот на символите во дестинацијата, \mathbf{H} е $N_R \times N_T$ каналната матрица, и \mathbf{N} е $N_R \times 1$ вектор кој го претставува додавачкиот бел Гаусов шум (AWGN) во даден момент од времето. Се претпоставува дека каналната матрица е случајна и дека дестинацијата ги има информациите за каналот (CSI). Исто така се претпоставува дека каналот е без меморија, т.е., за секоја употреба на каналот се „влече“ независен примерок од \mathbf{H} . Ова значи дека капацитетот може да се пресмета како максимум од здружената информација како што е дефинирано со (6.2). Резултатите се исто така валидни кога \mathbf{H} се генерира од ергодичен процес, затоа што се додека дестинацијата го разгледува процесот \mathbf{H} , само статистиката од прв ред е потребна за да се одреди капацитетот на каналот [66].

Општ елемент од каналната матрица се обележува со h_{ij} . Тој го претставува комплексниот коефициент на каналот помеѓу i -та антена од изворот и j -та антена од дестинацијата. Ако се земе дека МИМО каналот се состои од N_T антени во изворот и N_R антени во дестинацијата, каналната матрица е:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1N_T} \\ h_{21} & \dots & h_{2N_T} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{N_R1} & \dots & h_{N_R N_T} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$$h_{ij} = \alpha + j\beta = |h_{ij}| e^{j\phi_{ij}} = \sqrt{a^2 + b^2} e^{j \cdot \arctan(\frac{b}{a})} \quad (6.5)$$

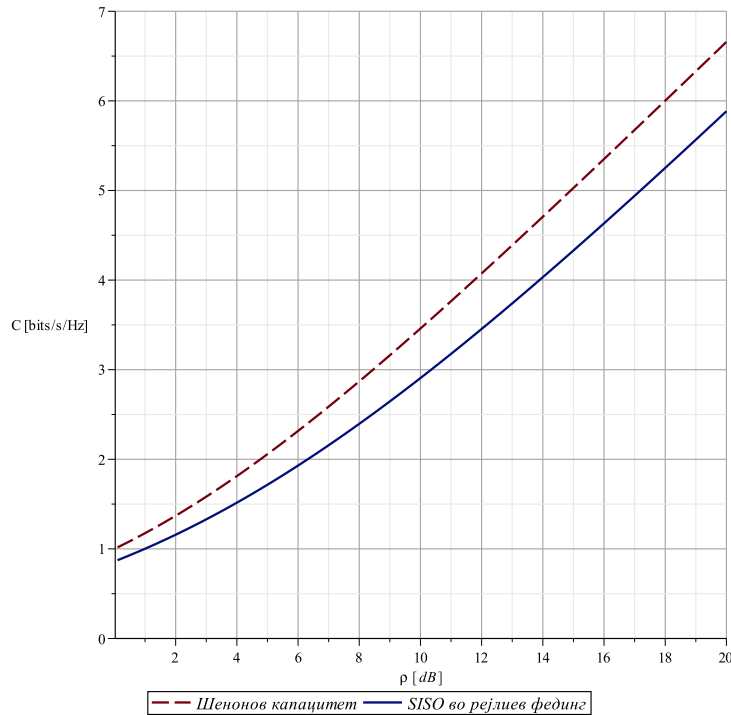
Во средина со многу расејување без директна линија на видливост, каналните коефициенти $|h_{ij}|$ се обично распределени согласно Рејлиевата функција на густина на веројатност (1.21).

6.1.1 Капацитет на точка-точка канал со една антена по јазол

Ергодичниот (средниот) капацитет на случаен канал со една антена во изворот и една во дестинацијата ($N_T = N_R = 1$) (анг. SISO - Single Input - Single Output) со ограничување на средната моќност P_T е [9]:

$$C_H = E_H \left\{ \max_{p(x): P \leq P_T} I(X; Y) \right\} \quad (6.6)$$

каде P е средната можност на единечен канален коден збор испратен преку каналот и E_H означува усреднување по распределбата на каналните коефициенти.



Слика 6.1: Ергодичен капацитет на SISO рејлиев фединг канал во споредба со Шеноновиот капацитет

Во споредба со дефиницијата (6.2) капацитетот на каналот за SISO е дефиниран како максимум од здружената информација помеѓу влезот и излезот по сите статистички распределби на влезот кој го задоволува ограничувањето на средна моќност. Доколку секој симбол во изворот се обележи со s , ограничувањето на средната моќност е:

$$E_s = E [|x|^2] \leq P_T \quad (6.7)$$

Со користење на (6.6), ергодичниот капацитет на SISO систем ($N_T = N_R = 1$) со случаен коефициент на каналот h_{11} е:

$$C = E_H \left\{ \log_2 (1 + \rho \cdot |h_{11}|^2) \right\} \quad (6.8)$$

каде $\rho = \bar{\gamma} = \frac{E_s}{N_0} = \frac{P_T}{N_0}$ е средниот однос сигнал-шум. Доколку $|h_{11}|$ ја следи Рејлиевата распределба (1.22), $|h_{11}|^2$ ја следи експоненцијалната распределба (1.22). Доколку (1.22) се замени во (6.8) се добива [67]:

$$C = \int_0^\infty \frac{1}{\bar{\gamma}} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right) \cdot \log_2(1 + \gamma) d\gamma = \frac{e^{\frac{1}{\bar{\gamma}}} \cdot E_1\left(\frac{1}{\bar{\gamma}}\right)}{\ln(2)} \quad (6.9)$$

каде $E_1(\dots)$ е експоненцијален интеграл дефиниран со [39, eq.(5.1.4)].

На сликата 6.1 е прикажана споредба на Шеноновиот капацитет¹ и капацитетот на Рејлиев фединг канал согласно (6.9).

6.1.2 Капацитет на точка-точка МИМО канал

Ергодичниот капацитет на МИМО канал со ограничување на моќност P_T е даден со [9, eq.(9.104)]:

$$C = E_H \left\{ \max_{p(x): tr(\mathbf{K}_x) \leq P_T} I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \right\} \quad (6.10)$$

Каде $\mathbf{K}_x = E \{ \mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^H \}$ матрица на коваријанси на векторот на симболи испратени во изворот \mathbf{X} , а операторот $tr(\dots)$ означува сума на елементите во дијагоналата на \mathbf{K}_x . Вкупната предавателна моќност е ограничена на P_T , независно од бројот на предавателни антени. Доколку расположивата моќност P_T е рамномерно распределена помеѓу предавателните антени во изворот и доколку шумот во антените не е корелиран моменталниот капацитет на МИМО каналот е (види глава 8.6):

$$C = \log_2 \left[\det \left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{P_T}{N_T \cdot N_0} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^H \right) \right] \quad (6.11)$$

Во тој случај ергодичниот (средниот) капацитет на МИМО каналот е ([67], [68]):

$$C = E_H \left\{ \log_2 \left[\det \left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{\rho}{N_T} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^H \right) \right] \right\} \quad (6.12)$$

каде $\rho = P_T/N_0$ е средниот однос сигнал-шум. Од законот за големи броеви [15, ch.(1.1)], членот $\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^H/N_T \rightarrow \mathbf{I}_{N_R}$ ако N_T е многу големо и N_R е фиксно, на тој начин капацитетот во случај на големо N_T е:

$$C = \log_2 [\det(\mathbf{I}_{N_R} + \rho \cdot \mathbf{I}_{N_R})] \quad (6.13)$$

¹ $\log_2(1 + \bar{\gamma})$

Капацитетот на МИМО каналот може да се анализа со дијагонализација на продуктот на матрици $\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^H$ во (6.11) со помош на декомпозиција на сопствени вредности (анг. eigen values) или со декомпозиција на сингуларни вредности (види глава 8.6) :

$$C = \sum_{i=1}^r \log_2 \left(1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \sigma_i^2 \right) = \sum_{i=1}^r \log_2 \left(1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \lambda_i \right) \quad (6.14)$$

каде σ_i^2 се квадратите на сингуларните вредности, λ_i се сопствените вредности и $r = \text{rank}(\mathbf{H}) \leq \min(N_T, N_R)$ е рангот на каналната матрица \mathbf{H} .

Максималниот капацитет на МИМО каналот се достигнува во нереалистична ситуација кога секој од N_T испратени сигнали се прима во N_R антени во дестинацијата без интерференција. Тој случај може да се опише како секој од испратените сигнали да е примен од различно множество од приемни антени, со што се добива вкупно $N_T \cdot N_R$ еквивалентни приемни антени.

За случајот на SIMO канал ($N_T = 1, N_R > N_T$) каналната матрица е вектор-редица: $\mathbf{H} = [h_1, h_2, \dots, h_{N_T}]$, а матрицата $\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^H = \sum_{j=1}^{N_T} |h_j|^2 = \|\mathbf{H}\|_F^2$ е скалар. Имајќи го тоа во предвид и доколку изразот за МИМО (6.11) се упрости со користење на (8.91) ќе се добие изразот за капацитет на SIMO:

$$C = \log_2 \left(1 + \frac{E_s}{N_0} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2 \right) = \log_2 (1 + \bar{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2) \quad (6.15)$$

Во средина со многу расејување без директна линија на видливост, обично амплитудата на федингот е распределена согласно Рејлиевата, моќноста на федингот согласно експоненцијалната, а квадратот на Фробениусовата норма $\|\mathbf{H}\|_F^2$ (сумата на моќностите) ја следи гама функцијата на густина на веројатност со параметар на размер $\theta=1$ (4.11). За ваков случај, доколку имаме МИМО канал, т.е. во изворот има N_T антени и оптимално комбинирање на сигналите од N_R -те антени во дестинацијата горната граница на ергодичниот капацитет e^2 :

$$C \leq E_H \left\{ N_T \cdot \log_2 \left[1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2 \right] \right\} \quad (6.16)$$

Ако во (6.16) се замени (4.11) се добива изразот за ергодичниот капацитет во затворена форма [69]:

$$C \leq \frac{N_T}{\Gamma(m) \ln(2)} \cdot G_{3,2}^{1,3} \left(\frac{\rho}{N_T} \Big|_{1,0}^{1-m,1,1} \right) \quad (6.17)$$

Каде $G_{3,2}^{1,3}(\dots)$ е Меијер Г функција [38, eq.(9.301)]. За голем однос сигнал-шум изразот (6.16) може да се апроксимира:

$$C \leq E_H \left\{ N_T \cdot \log_2 \left[\frac{\rho}{N_T} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2 \right] \right\} = \frac{N_T}{\ln(2)} \cdot \left(\ln \left(\frac{\rho}{N_T} \right) + \Psi(m) \right) \quad (6.18)$$

каде Ψ е дигама функција [39, eq.(6.3.1)].

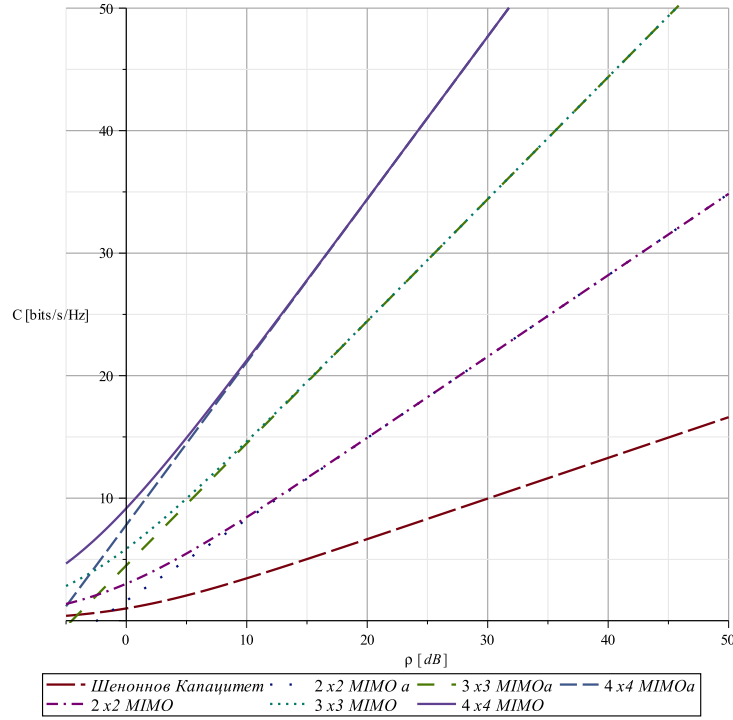
На слика 6.2, е даден Шеноновиот капацитет во споредба со горната граница (6.17) со $N_T = N_R = 2$, $N_T = N_R = 3$ и $N_T = N_R = 4$. На истата слика е дадена и апроксимацијата на горната граница на ергодичниот капацитет за голем среден SNR (ρ) согласно (6.18). Покрај тоа што оваа горна граница за МИМО каналот претставува специјален случај, со слика 6.2 јасно се покажува потенцијалот на МИМО технологијата.

²Под претпоставка дека нема интерференција помеѓу примените N_T сигнали во дестинацијата.

Кога каналот е познат во изворот, максималниот капацитет на МИМО каналот може да се постигне со користење на принципот на полнење со вода [9, ch.(9.4)] на предавателната матрица на коваријанси. Во тој случај капацитетот е:

$$C = E_H \left\{ \sum_{i=1}^r \log_2 \left(1 + \epsilon_i \cdot \frac{\rho}{N_T} \cdot \sigma_i^2 \right) \right\} = E_H \left\{ \sum_{i=1}^r \log_2 \left(1 + \epsilon_i \cdot \frac{\rho}{N_T} \cdot \lambda_i \right) \right\} \quad (6.19)$$

каде ϵ_i е скалар, која кажува колкав дел од расположивата предавателна моќност се користи во i -от под-канал со ограничување на моќност $\sum_{i=1}^{N_T} \epsilon_i \leq 1$.



Слика 6.2: Ергодичен капацитет за 2x2, 4x4 и 6x6 МИМО канал

Во случај кога сигналите кои пристигнуваат во дестинацијата се корелирани се намалува рангот на каналната матрица т.е. бројот на не-нулти сингуларни вредности во (6.19) со што се намалува капацитетот на МИМО каналот.

6.1.3 Капацитет на точка-точка МИМО со OSTBC

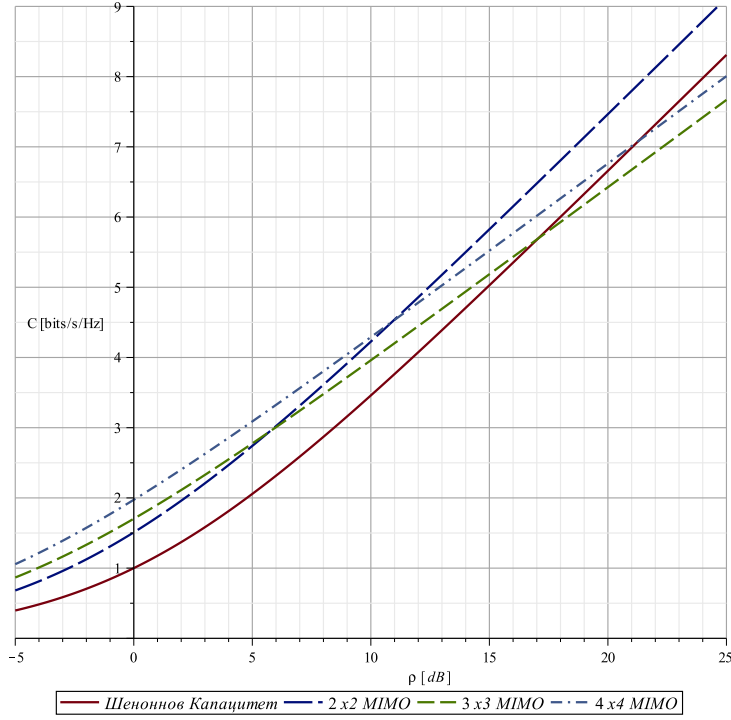
Во глава 3.2 е покажано дека е можно да се генерира ист степен на диверзитет со систем со повеќе влезови и еден излез (анг. MISO - Multiple-Input Single-Output) (види 3.2) како степенот на диверзитет во системот со еден влез и повеќе излези (анг. SIMO - Single-Input Multiple-Output) .

Во општ случај, ефективниот канал кој се добива како резултат на просторно-временско блоковско кодирање на комплексни симболи (пред детекцијата) е даден со (4.2). Моменталниот SNR пред детекција на симболите е:

$$\gamma = \frac{\|\mathbf{H}\|_F^4 \cdot \frac{P_T \cdot L}{N_T \cdot K}}{\|\mathbf{H}\|_F^2 N_0} = \frac{P_T \cdot L}{N_0 \cdot N_T \cdot K} \|\mathbf{H}\|_F^2 = \frac{\rho \cdot L}{N_T \cdot K} \|\mathbf{H}\|_F^2 = \bar{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2 \quad (6.20)$$

Каде $\bar{\gamma}$ е средниот SNR по симбол за произволен OSTBC код (4.47):

$$\bar{\gamma} = \rho \cdot c = \rho \cdot \frac{L}{N_T \cdot K} \quad (6.21)$$



Слика 6.3: Ергодичен капацитет на точка-точка 2x2, 3x3, 4x4 МИМО канал со користење на 222, 334, 434 OSTBC во споредба со Шеноновиот капацитет

каде $\rho = P_T/N_0$ е вкупниот SNR по временски интервал, L е бројот на временски интервали во кој се пренесува OSTBC блокот, N_T е бројот на предавателни антени во изворот и K е бројот на ненулни симболи кои се пренесуваат по антена за период од L временски интервали. Со ова покажавме дека за секој испратен симбол, ефективниот канал е сразмерен AWGN канал со $\text{SNR } \bar{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2 = \frac{\rho \cdot L}{N_T \cdot K} \|\mathbf{H}\|_F^2$.

Ако се претпостави дека OSTBC кодот испраќа K симболи за L временски интервали, максималниот достиглив капацитет на OSTBC условен на каналот \mathbf{H} се достигнува со некорелиран влез, што се добива ако се замени (6.20) во детерминантата од (6.11):

$$\det(\mathbf{I}_{N_R} + \bar{\gamma} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^H) = 1 + \frac{\rho \cdot L}{N_T \cdot K} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2 \quad (6.22)$$

односно изразот за капацитетот на МИМО каналот со користење на OSTBC се сведува на [66]:

$$C_{\text{ostbc}} = E_H \left\{ \frac{K}{L} \cdot \log_2 \left(1 + \frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2 \right) \right\} = E_H \left\{ \frac{K}{L} \cdot \log_2 (1 + \gamma) \right\} \quad \text{бити/у. на к.} \quad (6.23)$$

каде $\frac{K}{L}$ пред изразот ја означува брзината на OSTBC кодот. На пример, со Аламути OSTBC (види глава 3.3.3), два симболи ($K = 2$) се пренесуваат во два временски интервали ($L = 2$) и затоа Аламути OSTBC кодот е со единечна брзина.

Ако во (6.23) се замени (4.11) се добива изразот за ергодичниот капацитет во затворена форма [69]:

$$C_{\text{ostbc}} = \frac{K}{L \cdot \Gamma(m) \ln(2)} \cdot G_{3,2}^{1,3} \left(\frac{K \cdot \rho}{L \cdot N_T} \Big|_{1,0}^{1-m,1,1} \right) \quad (6.24)$$

Каде $G_{3,2}^{1,3}(\dots)$ е Мејер Г функција [38, eq.(9.301)]. За голем однос сигнал-шум изразот

(6.16) може да се апроксимира:

$$C_{\text{ostbc}} \approx E_H \left\{ \frac{K}{L} \cdot \log_2 \left[\frac{K \cdot \rho}{L \cdot N_T} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2 \right] \right\} \quad (6.25)$$

Ако во (6.25) се замени (4.11) се добива апроксимацијата на на ергодичниот капацитет за МИМО канал со OSTBC за голем однос сигнал-шум:

$$C_{\text{ostbc}} = \frac{K \cdot N_T}{L \cdot \ln(2)} \cdot \left(\ln \left(\frac{K \cdot \rho}{L \cdot N_T} \right) + \Psi(m) \right) \quad (6.26)$$

каде Ψ е дигама функција [39, eq.(6.3.1)].

На слика 6.3 е даден Шеноновиот капацитет во споредба со ергодичниот капацитет за МИМО со OSTBC (6.24) со $N_T = N_R = 2$, $N_T = N_R = 3$ и $N_T = N_R = 4$. Може да се забележи дека во случај на 2x2 МИМО со 222 OSTBC зголемувањето на бројот на антени значително го зголемува капацитетот на каналот. Имено, може да се забележи 50% зголемување за мал однос сигнал-шум и 15% за голем однос сигнал-шум. За системите со 3x3 и 4x4 со оглед на тоа што се работи за 334 и 434 OSTBC кодирање, односно кодовите се со 3/4 брзина на пренесување, има зголемување на капацитетот за мал до среден однос сигнал-шум, а за однос сигнал-шум поголем 17dB односно 21dB капацитетот е помал од шеноновиот капацитет што се должи на 3/4 брзината на пренесување на кодот.

6.1.4 Веројатност на капацитетен испад

Во претходната глава, го користевме ергодичниот капацитет како мерка за спектралната ефикасност на МИМО каналот. Капацитетот во случај на ергодичност на каналот беше дефиниран во (6.6) и (6.10) дефинирани како средна вредност од максималната вредност на здружената информација помеѓу испратениот сигнал во изворот и примениот сигнал во дестинацијата, каде максимизацијата се прави по сите можни статистички распределби на сигналот во изворот.

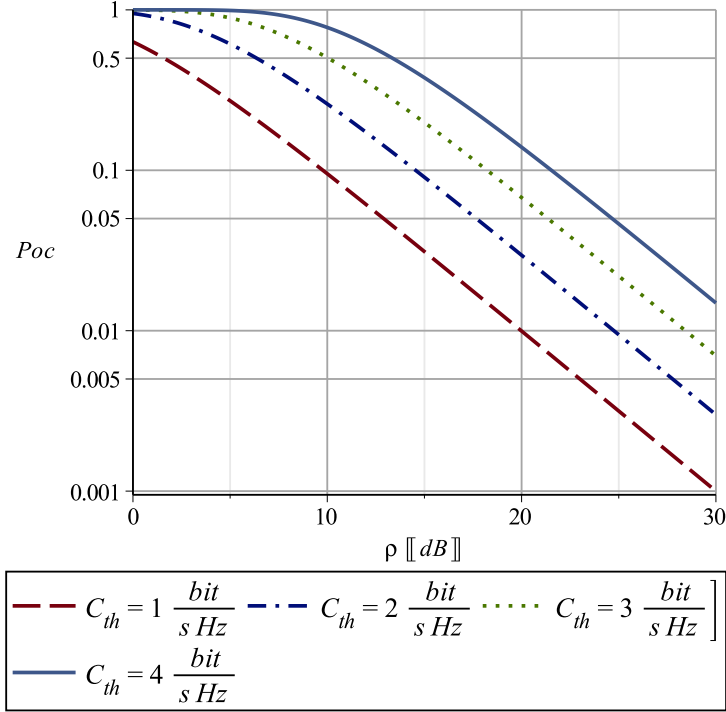
Во денешните телекомуникациски решенија повеќето безжични услуги имаат минимални барања во поглед на потребните податочни брзини на пренесување, под кои сервисот е неупотреблив. Затоа во оваа глава ќе разгледуваме каква е веројатноста произволните достигливи брзини на пренесување паднат под одредена граница, која се нарекува податочна брзина за одржување на услугата (анг. SSR - Service Sustainability Rate). Со други зборови, ќе ја разгледуваме веројатноста на капацитетен испад. Со веројатноста на капацитетен испад, капацитетот на каналот се придружува на веројатноста на испад. Капацитетот се третира како случајна променлива која зависи од моменталниот одзив на каналот и останува константен за време на преносот на кодиран блок на информација со конечна должина. Ако капацитетот на каналот падне под границата на капацитетниот испад, тогаш мала е веројатноста дека испратениот блок на информација ќе биде декодиран без грешки во дестинацијата, без разлика на употребениот метод на кодирање. Веројатноста дека моменталниот капацитет е помал од капацитетот на испад - C_{th} изнесува q , т.е.:

$$P_{oc} = Pr [C \leq C_{th}] = q = \int_0^{C_{th}} f_c(C) dC \quad (6.27)$$

Во овој случај (6.27) претставува горна граница заради фактот дека постои конечна веројатност q дека капацитетот на каналот е помал од границата на капацитетниот испад. Веројатноста на капацитетен испад може да се изрази во форма на долна граница, што ќе

претставува случај каде постои конечна веројатност $(1 - q)$ дека капацитетот на каналот ќе биде поголем од C_{th} , т.е.:

$$Pr [C > C_{th}] = 1 - q = \int_{C_{th}}^{\infty} f_c(C) dC. \quad (6.28)$$



Слика 6.4: Веројатност на капацитетен испад за SISO за Рејлиева распределба на амплитудите на сигналот за фиксно C_{th}

Веројатност на капацитетен испад на SISO: Согласно (6.8) моменталниот капацитет за SISO е:

$$C = \log_2 \left(1 + \frac{E_s}{N_0} |h|^2 \right) = \log_2 (1 + \bar{\gamma} \cdot |h|^2) = \log_2 (1 + \gamma) \quad (6.29)$$

Затоа, да претпоставиме дека $\alpha = |h|$ е случајна променлива распределена по Рејлиева функција на густина на веројатност (1.21) каде $\Omega = E[\alpha^2]$. PDF-от на моменталниот однос сигнал-шум во каналот $\gamma = \frac{E_s}{N_0} \cdot \alpha^2 = \bar{\gamma} \cdot \alpha^2$ е даден со (1.22) каде $E[\gamma] = \bar{\gamma}$.

Да претпоставиме дека X и Y се континуални случајни променливи со функционална зависност $Y = g(X)$. Да претпоставиме дека g е еден-на-еден функција, и двете g и нејзината инверзна функција, g^{-1} , се континуални и непрекинати. Тогаш со функционална трансформација на случајните променливи може да се добие функцијата на густина на веројатност за случајната променлива Y :

$$f_Y = f_X (g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|. \quad (6.30)$$

$$C = g(\gamma) = \log_2 (1 + \gamma), \quad \gamma = g^{-1}(C) = 2^C - 1. \quad (6.31)$$

Ако извршиме функционална трансформација на случајните променливи согласно(6.30) и (6.31) се добива :

$$f_C(C) = f(\gamma) \cdot \frac{d\gamma}{dC} \Big|_{\gamma=2^C-1} = \frac{1}{\bar{\gamma}} \cdot \exp \left(\frac{1 - 2^C}{\bar{\gamma}} \right) \cdot 2^C \cdot \ln(2) \quad (6.32)$$

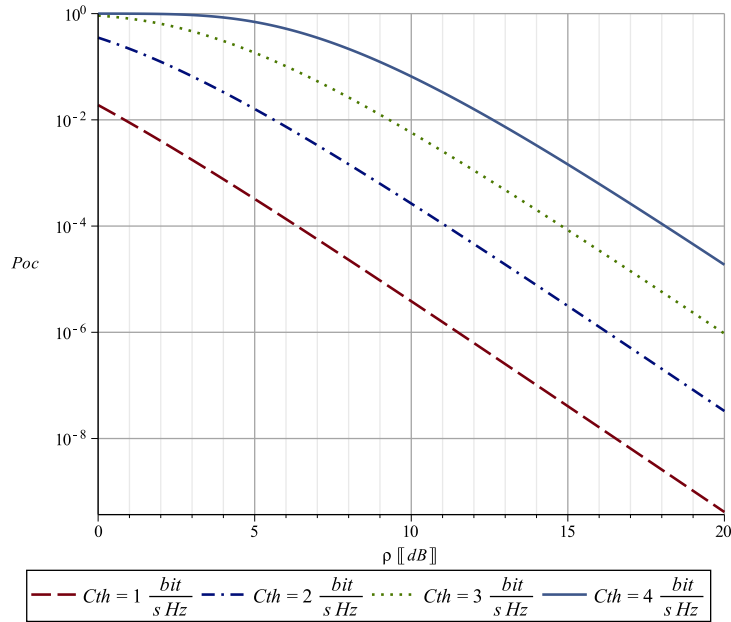
Ако го замениме (6.32) во (6.27) ќе се добие веројатноста на капацитетен испад на SISO каналот за рејлиев фединг:

$$P_{oc} = \int_0^{C_{th}} \frac{1}{\bar{\gamma}} \cdot \exp\left(\frac{1-2^C}{\bar{\gamma}}\right) \cdot 2^C \cdot \ln(2) dC = 1 - e^{-\frac{-1+2^{C_{th}}}{\bar{\gamma}}}. \quad (6.33)$$

На слика 6.4 е прикажана ОС за SISO добиен со (6.33) во зависност од средниот однос сигнал-шум во рејлиев канал за различни вредности на прагот $C_{th} = 1 \text{ bit/s/Hz}$, $C_{th} = 2 \text{ bit/s/Hz}$, $C_{th} = 3 \text{ bit/s/Hz}$ и $C_{th} = 4 \text{ bit/s/Hz}$.

Веројатност на капацитетен испад на SIMO: За случајот на SIMO канал ($N_T = 1, N_R > N_T$) каналната матрица е вектор-редица: $\mathbf{H} = [h_1, h_2, \dots, h_{N_T}]$, а матрицата $\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^H = \sum_{j=1}^{N_T} |h_j|^2 = \|\mathbf{H}\|_F^2$ е скалар. Имајќи го тоа во предвид (6.11) се сведува на:

$$C = \log_2 \left(1 + \frac{E_s}{N_0} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2 \right) = \log_2 (1 + \bar{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2). \quad (6.34)$$



Слика 6.5: Веројатност на капацитетен испад за SIMO со $N_R = m = 4$ во рејлиев фединг за фиксно C_{th}

Да претпоставиме дека модулот од секој елемент од каналниот векторот \mathbf{H} , $|h|$ е дистрибуиран согласно рејлиевата распределба. Тогаш квадратот на фробениусовата норма е $\|\mathbf{H}\|_F^2$ ја следи гама функцијата на густина на веројатност (4.11). Во овој случај изразот (6.34) е:

$$C = \log_2 (1 + \bar{\gamma} \cdot x) \quad (6.35)$$

каде x е случајна променлива која ја опишува фробениусовата норма $\|\mathbf{H}\|_F^2$. Ако од (6.35) го изразиме x се добива:

$$x = \frac{2^C - 1}{\bar{\gamma}} \quad dx = \frac{1}{\bar{\gamma}} \cdot \ln(2) \cdot 2^C dC \quad x_{th} = \frac{2^{C_{th}} - 1}{\bar{\gamma}}. \quad (6.36)$$

Ако извршиме функционалната трансформација согласно (6.36) се добива функцијата на

густина на веројатност на капацитетот:

$$f_C = f_X(x) \cdot \frac{dx}{dC} \Big|_{x=\frac{2^C-1}{\bar{\gamma}}} = \frac{\left(\frac{2^C-1}{\bar{\gamma}}\right)^{m-1}}{\Gamma(m)} \cdot e^{-\frac{2^C-1}{\bar{\gamma}}} \cdot \frac{1}{\bar{\gamma}} \cdot \ln(2) \cdot 2^C \quad (6.37)$$

Доколку (6.37) се замени во (6.27) се добива :

$$P_{oc} = 1 - \frac{1}{\Gamma(m)} \cdot \int_{x_{th}}^{\infty} x^{m-1} \cdot e^{-x} \cdot dx = 1 - \frac{\Gamma\left(m, \frac{2^{C_{th}}-1}{\bar{\gamma}}\right)}{\Gamma(m)} \quad (6.38)$$

На слика 6.5 е прикажана ОС за SIMO во рејлиев фединг со користење на (6.38) во зависност од средниот однос сигнал-шум за различни вредности на прагот $C_{th} = 1 \text{ bit/s/Hz}$, $C_{th} = 2 \text{ bit/s/Hz}$, $C_{th} = 3 \text{ bit/s/Hz}$ и $C_{th} = 4 \text{ bit/s/Hz}$.

Веројатност на капацитетен испад за МИМО: Согласно 8.95 капацитетот на МИМО каналот е:

$$C = \sum_{i=1}^r \log_2 \left(1 + \frac{P_T}{N_T \cdot N_0} \cdot \lambda_i \right) \quad (6.39)$$

Доколку претпоставиме дека сопствените вредности се i.i.d. случајни променливи и доколку бројот на предавателни антени во изворот е еднаков на бројот на приемни антени во дестинацијата ($N_T = N_R$), максимално достигливиот капацитет може да се изрази како:

$$C = N_T \log_2 \left(1 + \frac{P_T}{N_T N_0} \cdot \lambda \right) \quad (6.40)$$

Доколку од (6.40) ја изразиме сопствената вредност:

$$\lambda = \frac{\left(2^{\frac{C}{N_T}} - 1\right)}{P_T / (N_T N_0)} \quad (6.41)$$

Со користење на функционална трансформација на случајните променливи се добива PDF-от на капацитетот :

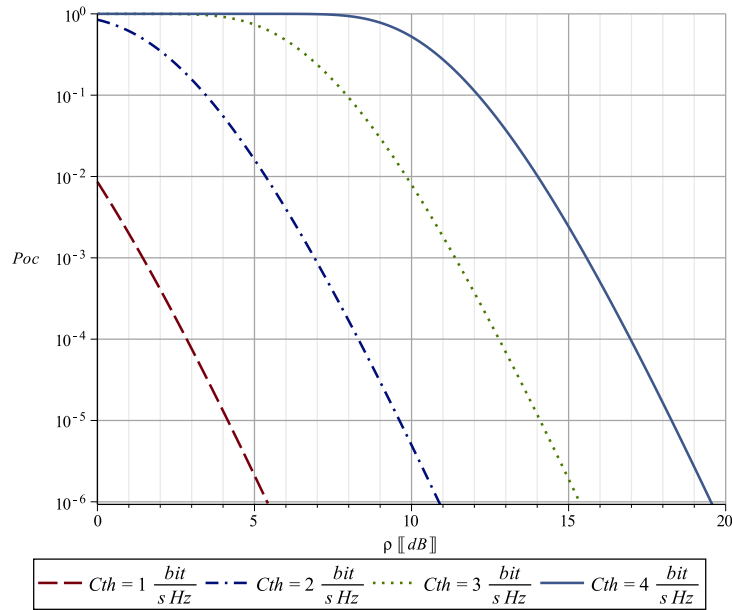
$$f_C(C) = f_\lambda \left(\frac{\left(2^{\frac{C}{N_T}} - 1\right)}{P_T / (N_T N_0)} \right) \cdot \ln(2) \cdot \frac{N_0}{P_T} \cdot 2^{C/N_T} \quad (6.42)$$

Доколку се знае PDF-от на сопствената вредност може да се пресмета и PDF-от на капацитетот, а со користење на (6.27) може да се добие и ОС.

Веројатност на капацитетен испад на МИМО со OSTBC: Согласно (6.23) моменталниот капацитет на МИМО со OSTBC е:

$$C = \frac{K}{L} \cdot \log_2 [1 + \bar{\gamma} \cdot \|H\|_F^2] = \frac{K}{L} \cdot \log_2 \left[1 + \frac{\rho \cdot L}{N_T \cdot K} \cdot \|H\|_F^2 \right] \quad (6.43)$$

Каде $\bar{\gamma} = \rho \cdot c = \rho \cdot \frac{L}{N_T \cdot K}$ е средниот SNR по симбол за произволен OSTBC код (4.47), $\rho = P_T/N_0$ е вкупниот SNR по симболен интервал, L е бројот на временски интервали во кој се пренесува OSTBC блокот, N_T е бројот на предавателни антени во изворот и



Слика 6.6: Веројатност на испад на капац. за 3x3 МИМО со 334 OSTBC за фиксно C_{th}

K е бројот на ненулни симболи кои се пренесуваат по антена за период од L временски интервали. Изразот (6.43) може да се претстави во следнава форма:

$$C = \frac{K}{L} \cdot \log_2(1 + \gamma). \quad (6.44)$$

Со оглед на тоа што моменталниот однос сигнал-шум е: $\gamma = \bar{\gamma} \cdot \|H\|_F^2$ и квадратот на фробениусовата норма $\|H\|_F^2$ го следи (4.11) со параметар на размер $\theta=1$ и параметар на облик α , ако се изврши функционална трансформација на случајните променливи:

$$\gamma = \bar{\gamma} \cdot x \quad f_{\Gamma}(\gamma) = \frac{f(x)}{\bar{\gamma}} \Big|_{x=\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}} = \frac{\gamma^{\alpha-1}}{\bar{\gamma}^{\alpha} \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}} \quad (6.45)$$

се добива дека моменталниот однос сигнал-шум γ ја следи гама функција за густина на веројатност (4.10) со параметар на размер $\theta = \bar{\gamma}$. Ако го изразиме γ од (6.44) се добива:

$$\gamma = 2^{\frac{LC}{K}} - 1 \quad d\gamma = \left(e^{\frac{LC}{K} \cdot \ln(2)} \right)' dC = \frac{L}{K} \cdot \ln(2) \cdot 2^{\frac{LC}{K}} \quad (6.46)$$

Доколку со користење на (6.46) извршиме функционална трансформација на случајните променливи, PDF-от на капацитетот е:

$$f_C(C) = \frac{\left(2^{\frac{LC}{K}} - 1 \right)^{\alpha-1}}{\theta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{\left(2^{\frac{LC}{K}} - 1 \right)}{\theta}} \cdot \frac{L}{K} \cdot \ln(2) \cdot 2^{\frac{LC}{K}} \quad (6.47)$$

Доколку (6.47) се замени во (6.27) се добива :

$$P_{oc} = 1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma \left(\alpha, \frac{2^{\frac{LC_{th}}{K}} - 1}{\theta} \right) \quad (6.48)$$

Доколку во (6.48) земеме дека параметарот на облик $\alpha = N_R \cdot N_T$ и параметарот на размер е $\theta = \bar{\gamma} = \frac{L \cdot \rho}{N_T K}$ ќе ја добиеме веројатноста на капацитетен испад за МИМО OSTBC канал

во рејлиев фединг:

$$P_{oc} = 1 - \frac{1}{\Gamma(n_R \cdot n_T)} \cdot \Gamma\left(n_R \cdot n_T, \frac{2^{\frac{L \cdot C_{th}}{K}} - 1}{\rho \cdot L} \cdot N_T \cdot K\right) \quad (6.49)$$

На слика 6.6 е прикажана ОС за 3x3 МИМО со 334 OSTBC добиени со (6.49) во зависност од средниот однос сигнал-шум за различни вредности на прагот $C_{th} = 1 \text{ bit/s/Hz}$, $C_{th} = 2 \text{ bit/s/Hz}$, $C_{th} = 3 \text{ bit/s/Hz}$ и $C_{th} = 4 \text{ bit/s/Hz}$.

6.2 Ергодичен капацитет

Во главите 3, 4 и 5 беа разгледувани ОР и ЕР перформансите на МИМО релејните канали со и без директна патека до дестинацијата, а во оваа глава ќе го анализираме капацитетот на овие релејни канали. Исто така во главите 3, 4 и 5 се разгледувани МИМО системи кои користат OSTBC кодирање и затоа во понатамошното излагање ќе се користат изразите за МИМО со OSTBC кодирање без тоа посебно да се нагласува.

6.2.1 Каскаден АФ МИМО релеен канал

Во оваа глава ќе го анализираме капацитетот на каскадниот МИМО релеен канал. Согласно изразот (2.253) капацитетот на АФ релејниот канал без директната компонента е:

$$C = \frac{1}{2} \log(1 + \gamma) = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{\gamma_{32} \cdot \gamma_{21}}{\gamma_{32} + \gamma_{21} + 1}\right) \quad (6.50)$$

Тврдење 6.1.

Дропката во логаритамот од (6.50) го претставува крај-крај односот сигнал-шум на каскадниот АФ МИМО релеен канал.

Доказ: Доколку во изразот (4.7) се замени $\bar{\gamma} = E_s/N_0$ се добива:

$$\gamma = \bar{\gamma} \cdot \frac{A^2 \|\mathbf{G}\|_F^2 \|\mathbf{H}\|_F^4}{A^2 \|\mathbf{G}\|_F^2 \|\mathbf{H}\|_F^2 + 1} \quad (6.51)$$

Изразот 6.51 може да се претстави во следнава форма:

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\bar{\gamma}} \cdot \frac{A^2 \|\mathbf{G}\|_F^2 \|\mathbf{H}\|_F^2 + 1}{A^2 \|\mathbf{G}\|_F^2 \|\mathbf{H}\|_F^4} = \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2} + \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot A^2 \cdot \|\mathbf{G}\|_F^2 \|\mathbf{H}\|_F^4} \quad (6.52)$$

Доколку земеме $E_R = E_I = E_S$ во изразот (4.3) се добива:

$$A^2 = \frac{E_s}{E_s \|\mathbf{H}\|_F^4 + \|\mathbf{H}\|_F^2 N_0} = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma} \|\mathbf{H}\|_F^4 + \|\mathbf{H}\|_F^2} \quad (6.53)$$

Доколку (6.53) се замени во (6.52) се добива:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} &= \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2} + \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma} \|\mathbf{H}\|_F^4 + \|\mathbf{H}\|_F^2} \cdot \|\mathbf{G}\|_F^2 \cdot \|\mathbf{H}\|_F^4} = \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2} + \frac{\bar{\gamma} \|\mathbf{H}\|_F^4 + \|\mathbf{H}\|_F^2}{\bar{\gamma}^2 \cdot \|\mathbf{G}\|_F^2 \cdot \|\mathbf{H}\|_F^4} = \\ &= \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2} + \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot \|\mathbf{G}\|_F^2} + \frac{1}{\bar{\gamma}^2 \cdot \|\mathbf{G}\|_F^2 \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2} = \frac{1}{\gamma_{21}} + \frac{1}{\gamma_{32}} + \frac{1}{\gamma_{21} \cdot \gamma_{32}} \end{aligned} \quad (6.54)$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma_{21}} + \frac{1}{\gamma_{32}} + \frac{1}{\gamma_{21} \cdot \gamma_{32}} \quad \gamma = \frac{1}{\frac{1}{\gamma_{21}} + \frac{1}{\gamma_{32}} + \frac{1}{\gamma_{21} \cdot \gamma_{32}}} = \frac{\gamma_{21} \cdot \gamma_{32}}{\gamma_{21} + \gamma_{32} + 1} \quad (6.55)$$

Со што се докажува тврдењето 6.1.

Од друга страна доколку во (6.52) се замени апроксимативниот израз за факторот на засилување на релето (4.4) за $b = 1$ се добива:

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \bar{\gamma} \cdot \frac{A^2 \|\mathbf{G}\|_F^2 \|\mathbf{H}\|_F^4}{A^2 \|\mathbf{G}\|_F^2 \|\mathbf{H}\|_F^2 + 1} & \frac{1}{\gamma} &= \frac{1}{\bar{\gamma}} \cdot \frac{A^2 \|\mathbf{G}\|_F^2 \|\mathbf{H}\|_F^2 + 1}{A^2 \|\mathbf{G}\|_F^2 \|\mathbf{H}\|_F^4} = \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2} + \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot A^2 \cdot \|\mathbf{G}\|_F^2 \|\mathbf{H}\|_F^4} = \\
 &= \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2} + \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{b} \|\mathbf{H}\|_F^2}\right)^2 \cdot \|\mathbf{G}\|_F^2 \|\mathbf{H}\|_F^4} = \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2} + \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot \frac{1}{b \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2} \cdot \|\mathbf{G}\|_F^2 \|\mathbf{H}\|_F^4} = \\
 &= \frac{1}{\bar{\gamma} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2} + \frac{b}{\bar{\gamma} \cdot \|\mathbf{G}\|_F^2} = \frac{1}{\gamma_{31}} + \frac{b}{\gamma_{32}} \Rightarrow \\
 \frac{1}{\gamma} &= \frac{1}{\gamma_{31}} + \frac{b}{\gamma_{32}} & \gamma &= \frac{1}{\frac{1}{\gamma_{31}} + \frac{1}{\gamma_{32}}} = \frac{\gamma_{31} \gamma_{32}}{\gamma_{31} + \gamma_{32}} \tag{6.56}
 \end{aligned}$$

Изразот (6.56) може да се претстави преку фробенуосовите норми на делницата од изворот до релето ($\|\mathbf{H}\|_F^2$) и делницата од релето до дестинацијата ($\|\mathbf{G}\|_F^2$):

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \frac{1}{\frac{1}{\gamma_{31}} + \frac{1}{\gamma_{32}}} = \frac{\gamma_{31} \gamma_{32}}{\gamma_{31} + \gamma_{32}} = \\
 &= \frac{\left(\frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T}\right)^2 \|\mathbf{H}\|_F^2 \cdot \|\mathbf{G}\|_F^2}{\frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T} (\|\mathbf{H}\|_F^2 + \|\mathbf{G}\|_F^2)} = \frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T} \cdot \frac{\|\mathbf{H}\|_F^2 \cdot \|\mathbf{G}\|_F^2}{\|\mathbf{H}\|_F^2 + \|\mathbf{G}\|_F^2} \tag{6.57}
 \end{aligned}$$

МИМО релејниот канал со OSTBC и засили-и-проследи реле може да го претставиме со еквивалентен точка-точка МИМО систем чиј ергодичен капацитет е даден со:

$$C_{AF} = E_H \left\{ \frac{K}{L} \cdot \log_2 (1 + \gamma) \right\} = E_H \left\{ \frac{K}{L} \cdot \log_2 \left(1 + \frac{\gamma_{32} \cdot \gamma_{21}}{\gamma_{32} + \gamma_{21} + 1} \right) \right\} \approx \tag{6.58}$$

$$\approx E_H \left\{ \frac{K}{L} \cdot \log_2 \left(1 + \frac{\gamma_{32} \cdot \gamma_{21}}{\gamma_{32} + \gamma_{21}} \right) \right\} = E_H \left\{ \frac{K}{L} \cdot \log_2 \left(1 + \frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T} \cdot \frac{\|\mathbf{H}\|_F^2 \cdot \|\mathbf{G}\|_F^2}{\|\mathbf{H}\|_F^2 + \|\mathbf{G}\|_F^2} \right) \right\} \tag{6.59}$$

Од изразот (6.59) е јасно дека капацитетот на МИМО релејниот канал со OSTBC кој во релето користи метода на засили-и-проследи не може да биде поголем од капацитетот на точка-точка МИМО каналот со OSTBC:

$$C_{AF} \leq \frac{K}{L} \cdot \log_2 \left(1 + \frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T} \cdot \|\mathbf{H}\|_F^2 \right) \tag{6.60}$$

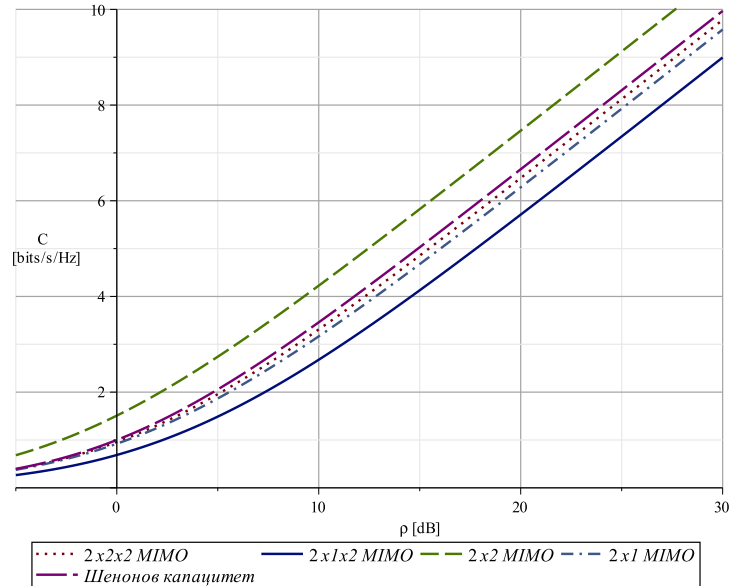
затоа што $\frac{\|\mathbf{H}\|_F^2 \cdot \|\mathbf{G}\|_F^2}{\|\mathbf{H}\|_F^2 + \|\mathbf{G}\|_F^2} < \|\mathbf{H}\|_F^2$.

Од друга страна за МИМО релејниот канал со засили-и-проследи реле може да ја користиме едноставната апроксимација (4.55) согласно која моменталниот крај-крај сигнал-шум на AF МИМО релејниот канал ја следи гама функцијата на густина на веројатност со параметар на размер $\theta = \frac{\bar{\gamma}}{b+1}$ и параметар на облик m :

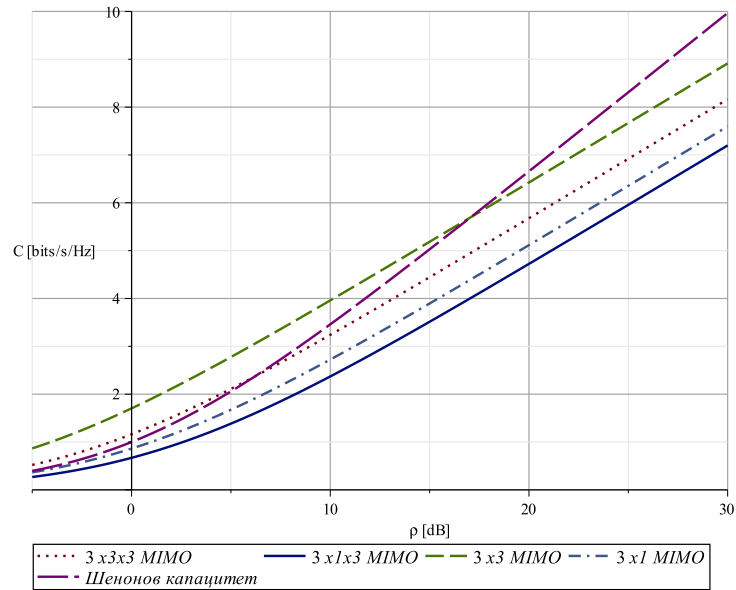
$$f(\gamma) = \frac{(b+1)^m}{\bar{\gamma}^m \cdot \Gamma(m)} \gamma^{m-1} e^{-\frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}}}. \tag{6.61}$$

Каде $\bar{\gamma}$ е средниот SNR по симбол за произволен OSTBC код 4.47:

$$\bar{\gamma} = \rho \cdot c = \rho \cdot \frac{L}{N_T \cdot K} \tag{6.62}$$



Слика 6.7: Шенонов капацитет во споредба со ергодичниот капацитет на $2 \times 2 / 2 \times 1$ точка-точка МИМО и $2 \times 2 \times 2 / 2 \times 1 \times 2$ AF МИМО RC со 222 OSTBC

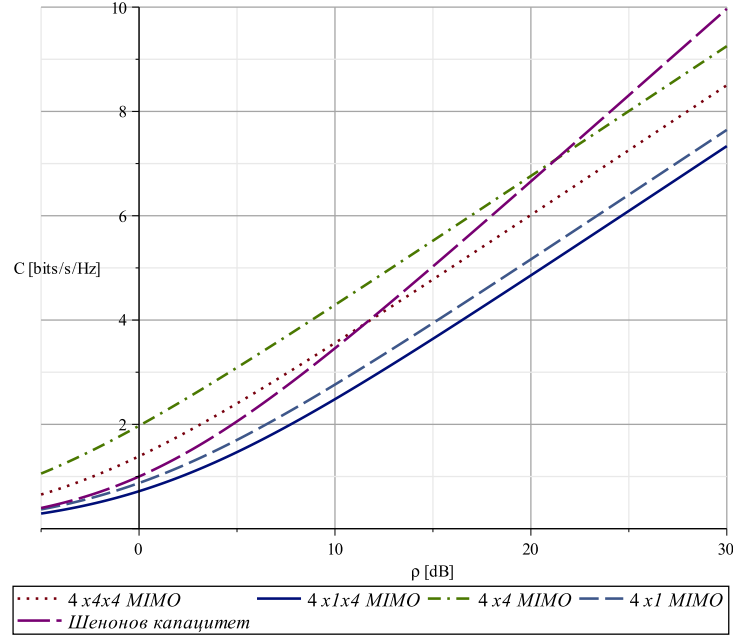


Слика 6.8: Шенонов капацитет во споредба со ергодичниот капацитет на $3 \times 3 / 3 \times 1$ точка-точка МИМО и $3 \times 3 \times 3 / 3 \times 1 \times 3$ AF МИМО RC со 334 OSTBC

каде $\rho = P_T/N_0$ е вкупниот SNR по временски интервал, L е бројот на временски интервали во кој се пренесува OSTBC блокот, N_T е бројот на предавателни антени во изворот и K е бројот на симболи различни од нула кои се пренесуваат по антена за период од L временски интервали. Изразот 6.61 може да се користат за $N \times 1 \times N$ систем со користење на замените: $m = N_T$ и $b = c$ и за $N \times N \times N$ систем со користење на замените: $m = N_T \cdot N_R = N^2$ и $b = 1$.

Доколку (6.61) се замени во (6.58) се добива апроксимацијата на ергодичниот капацитет на каскаден МИМО релеен канал со засили-и-проследи:

$$C_{AF} \approx \frac{K}{L \cdot \Gamma(m) \cdot \ln(2)} \cdot G_{3,2}^{1,3} \left(\frac{L \cdot \rho}{K \cdot N_T \cdot (b+1)} \Big|_{1,0}^{1-m,1,1} \right) \quad (6.63)$$



Слика 6.9: Шенонов капацитет во споредба со ергодичниот капацитет на 4x4/4x1 точка-точка МИМО и 4x4x4/4x1x4 МИМО релеен канал со 434 OSTBC

Изразот 6.63 може да се користат за $N \times 1 \times N$ систем со користење на замените: $m = N_T$ и $b = c$ и за $N \times N \times N$ систем со користење на замените: $m = N_T \cdot N_R = N^2$ и $b = 1$.

На сликите 6.7, 6.8 и 6.9 е дадена споредбата на апроксимација на капацитетот на МИМО релеен канал со засили-и-проследи (6.63) со Шеноновиот капацитет и горната граница дадена со (6.60) за двете разгледувани конфигурации на системот користен во глава (4) ($N \times 1 \times N$ и $N \times N \times N$) кога тој користи 222, 334 и 434 OSTBC.

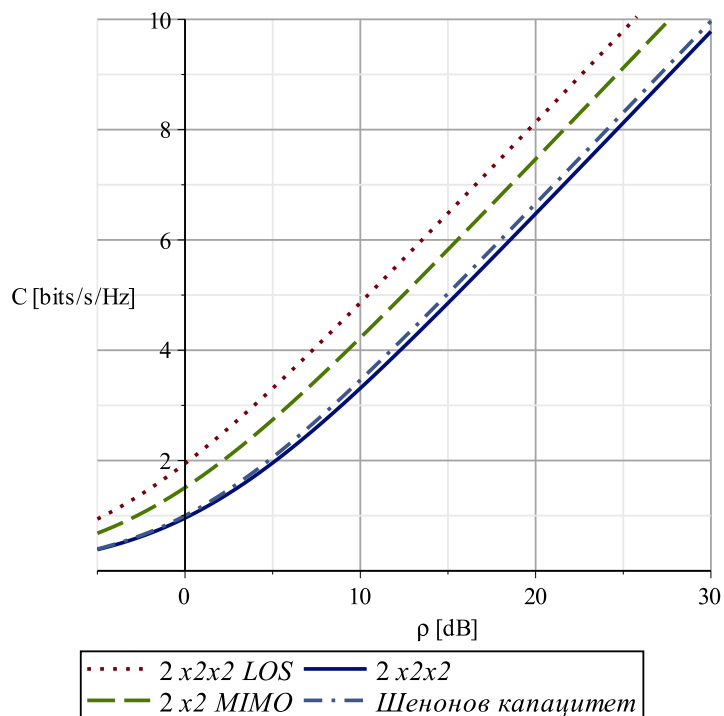
Од сликите 6.7, 6.8 и 6.9 може да се види дека апроксимацијата (6.63) не ја надминува горната граница (6.60), и дека истата се приближува до горната граница на достигливиот капацитет со зголемување на бројот на антени. Од сликите исто така може да се забележи дека ергодичниот капацитет за $N \times 1 \times N$ системот е занемарливо помал од капацитетот на соодветниот $N \times 1$ точка-точка канал и дека разликата се зголемува со зголемување на односот сигнал-шум и намалување на бројот на антени.

6.2.2 AF МИМО релеен канал со директна патека

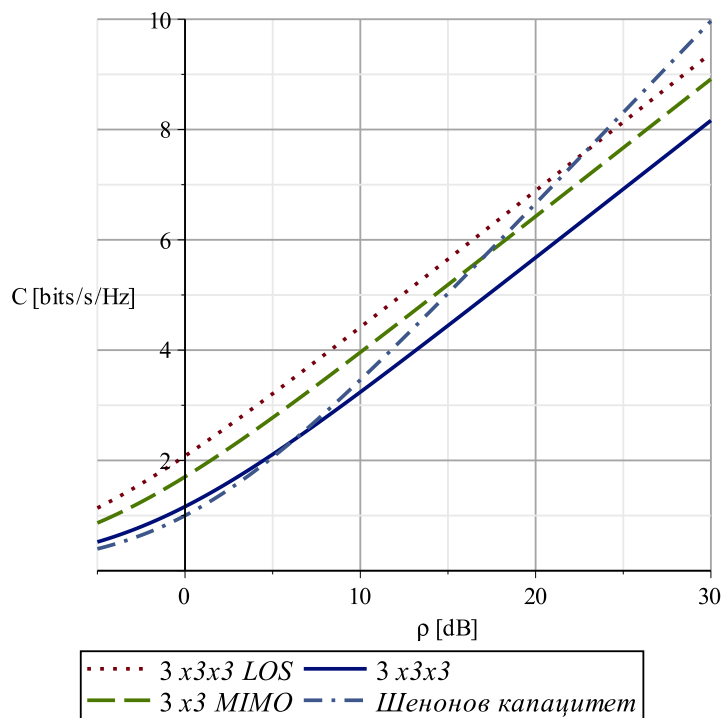
Доколку изразот за функцијата на густината на веројатност (4.72) за системот со директна патека до дестинацијата се замени во изразот за ергодичен капацитет на МИМО со OSTBC (6.58) се добива:

$$C_{AF} = \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{m}{k}}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \int_0^{\infty} \frac{\gamma^{2m+k-1} (b+1)^{2m+k}}{\Gamma(2m+k) \cdot \bar{\gamma}^{2m+k}} \cdot e^{-\frac{(b+1) \cdot \gamma}{\bar{\gamma}}} \cdot \frac{K}{L} \cdot \log_2(1+\gamma) d\gamma \quad (6.64)$$

Без да се загуби општоста на нумеричката анализа на МИМО релејните канали со директна патека ќе ја опфати само $N \times N \times N$ системската конфигурација ($m = N_T \cdot N_R = N^2$ и $b = 1$). Сепак, изразот (6.64) може да се користи за пресметка на ергодичниот капацитет на $N \times 1 \times N$ системската конфигурација доколку се избере: $m = N_T$ и $b = c = L / (N \cdot K)$. Доколку се спореди ергодичниот капацитет на МИМО каналот со директна патека (6.64) со ергодичниот капацитет на каскадниот МИМО RC даден со (6.63) се добиваат резултатите прикажани на сликите: 6.10, 6.11 и 6.12.

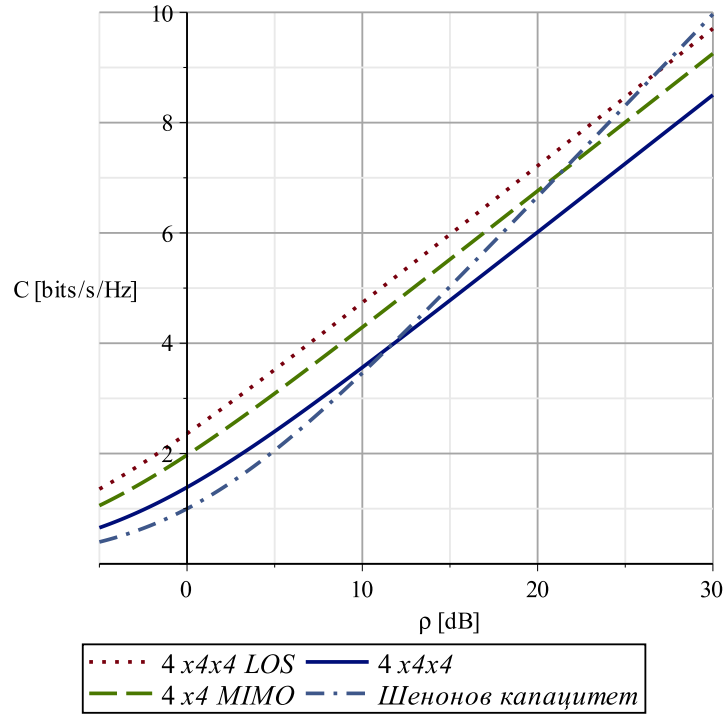


Слика 6.10: Ергодичен капацитет за $2 \times 2 \times 2$ МИМО релеен канал со и без директна патека



Слика 6.11: Ергодичен капацитет за $3 \times 3 \times 3$ МИМО релеен канал со и без директна патека

Од сликите 6.10, 6.11 и 6.12 може да се забележи дека ергодичниот капацитет на $N \times N \times N$ МИМО релејните канали со директна патека го надминува ергодичниот капацитет на соодветните каскадни релејни МИМО системи. Освен тоа тие покажуваат поголем капацитет и од точка-точка МИМО системите со соодветен број на антени. МИМО релејните канали со директна патека го надминуваат шеноновиот капацитет за практични



Слика 6.12: Ергодичен капацитет за 4x4x4 МИМО релеен канал со и без директна патека

вредности на односот сигнал-шум. Системот кој користи по две антени во јазлите го надминува Шеноновиот капацитет за сите вредности на односот сигнал-шум, а другите системи имаат помал капацитет од Шеноновиот капацитет само за случај на големи вредности на односот сигнал-шум. Со зголемување на бројот на антени се поместува пресечната точка во десно, односно капацитетот на МИМО релејните канали со повеќе антени паѓа под Шеноновиот капацитет за поголеми вредности на односот сигнал-шум во споредба со МИМО релејните канали кои имаат помалку антени по јазол и иста брзина на кодот.

6.3 Веројатност на капацитетен испад

6.3.1 Каскаден АФ МИМО релеен канал

За пресметка на капацитетот на испад на МИМО релејниот канал кој користи засили-и-проследи, релејниот канал ќе го третираме како точка-точка канал чиј крај-крај однос сигнал-шум е распределен согласно гама функцијата на густина на веројатност параметар на облик $\alpha = m$ и параметар на размер $\theta = \frac{\bar{\gamma}}{b+1}$ (4.55):

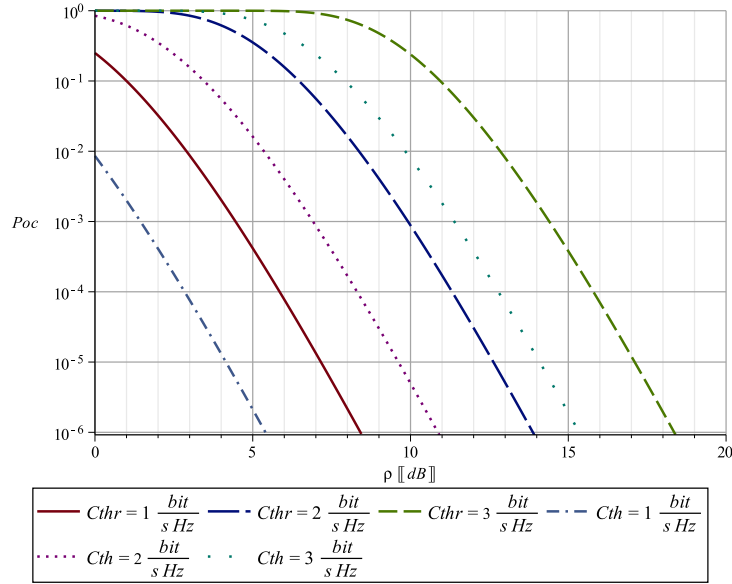
$$f_{\Gamma}(\gamma) = \frac{\gamma^{\alpha-1}}{\theta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{\gamma}{\theta}} = \frac{(b+1)^m}{\bar{\gamma}^m \cdot \Gamma(m)} \gamma^{m-1} e^{-\frac{(b+1)\gamma}{\bar{\gamma}}} \quad \gamma > 0, m, \bar{\gamma} > 0 \quad (6.65)$$

Моменталниот капацитет е (6.43):

$$C = \frac{K}{L} \cdot \log_2(1 + \gamma) \quad (6.66)$$

Ако го изразиме γ од (6.66) се добива:

$$\gamma = 2^{\frac{LC}{K}} - 1 \quad d\gamma = \left(e^{\frac{LC}{K} \cdot \ln(2)} \right)' dC = \frac{L}{K} \cdot \ln(2) \cdot 2^{\frac{LC}{K}} \quad (6.67)$$



Слика 6.13: Споредба на веројатностите на капацитетен испад за 3x3 и 3x3x3 МИМО со 334 OSTBC за фиксно C_{th}

Доколку со користење на (6.67) извршиме функционална трансформација на случајните променливи, функцијата за густина на веројатност на капацитетот е:

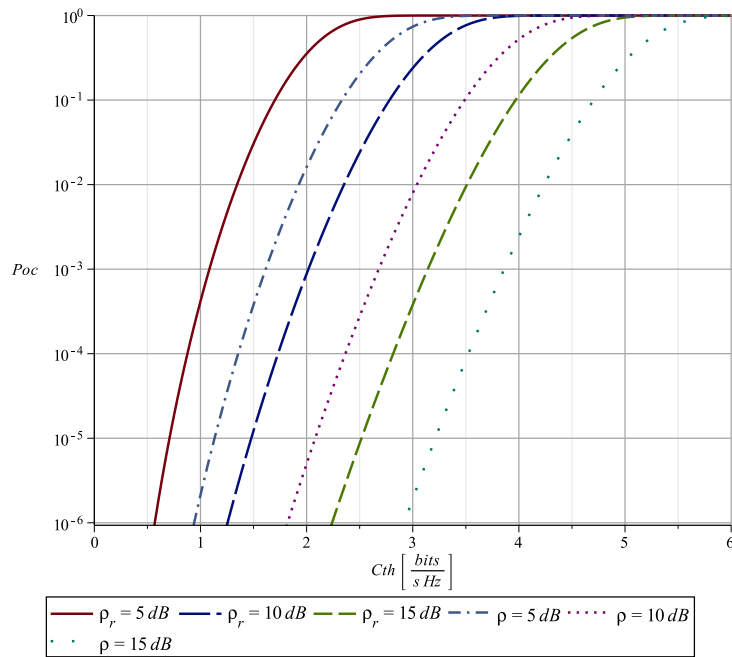
$$\begin{aligned}
 f_C(C) &= f_\Gamma\left(2^{\frac{LC}{K}} - 1\right) \cdot \frac{d\gamma}{dC} = \frac{\gamma^{\alpha-1}}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{\gamma}{\theta}} \Big|_{\gamma=2^{\frac{LC}{K}} - 1} \cdot \frac{L}{K} \cdot \ln(2) \cdot 2^{\frac{LC}{K}} = \\
 &= \frac{\left(2^{\frac{LC}{K}} - 1\right)^{\alpha-1}}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{\left(2^{\frac{LC}{K}} - 1\right)}{\theta}} \cdot \frac{L}{K} \cdot \ln(2) \cdot 2^{\frac{LC}{K}} \quad (6.68)
 \end{aligned}$$

Доколку (6.68) се замени во (6.27) се добива:

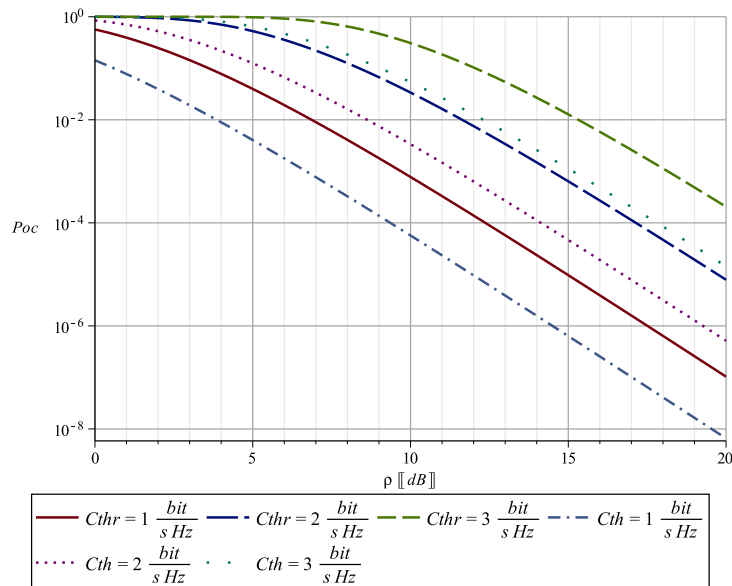
$$\begin{aligned}
 P_{oc} &= 1 - \int_{C_{th}}^{\infty} \frac{\left(2^{\frac{LC}{K}} - 1\right)^{\alpha-1}}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{\gamma}{\theta}} \cdot \frac{L}{K} \cdot \ln(2) \cdot 2^{\frac{LC}{K}} dC = \\
 &= 1 - \int_{C_{th}}^{\infty} \frac{\left(\frac{2^{\frac{LC}{K}} - 1}{\theta}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\left(\frac{2^{\frac{LC}{K}} - 1}{\theta}\right)} \cdot d\left(\frac{2^{\frac{LC}{K}} - 1}{\theta}\right) = \left| t_{th} = \frac{2^{\frac{LC_{th}}{K}} - 1}{\theta} \right| = \\
 &= 1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{th}}^{\infty} t^{\alpha-1} \cdot e^{-t} \cdot dt = 1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha, t_{th}) = \\
 &= 1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma\left(\alpha, \frac{2^{\frac{LC_{th}}{K}} - 1}{\theta}\right) = 1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma\left(\alpha, \frac{2^{\frac{LC_{th}}{K}} - 1}{\theta}\right) \quad (6.69)
 \end{aligned}$$

Доколку во (6.69) земеме дека параметарот на облик на гама функцијата е $\alpha = m$ и параметарот на размер е $\theta = \frac{\bar{\gamma}}{(b+1)} = \frac{L \cdot \rho}{N_T K \cdot (b+1)}$ ќе ја добиеме веројатноста на капацитетен испад за МИМО OSTBC RC со засили-и-проследи во рејлиев фединг:

$$P_{oc} = Pr(C \leq C_{th}) = 1 - \frac{1}{\Gamma(m)} \cdot \Gamma\left(m, \frac{\left(2^{\frac{L \cdot C_{th}}{K}} - 1\right)}{\rho \cdot L} \cdot N_T \cdot K \cdot (b+1)\right) \quad (6.70)$$

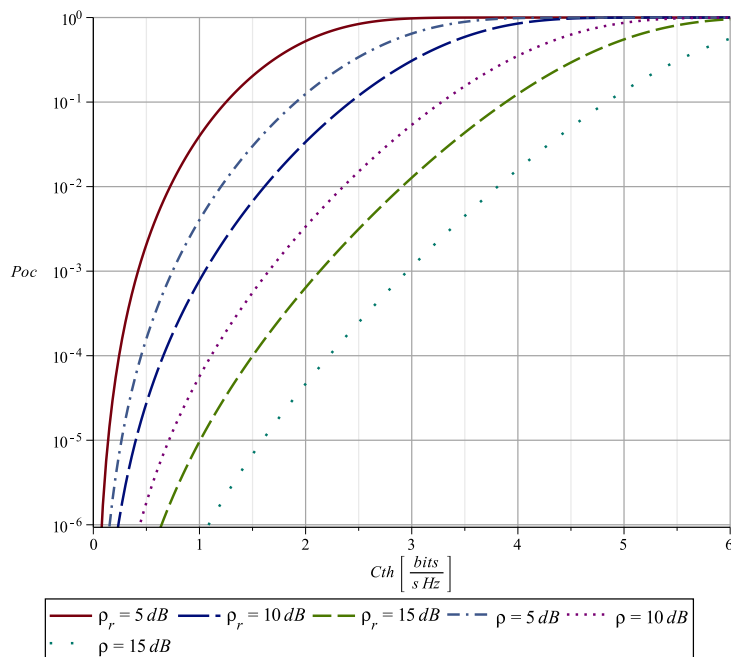


Слика 6.14: Споредба на веројатностите на капацитетен испад за 3x3 и 3x3x3 МИМО со 334 OSTBC за фиксно ρ



Слика 6.15: Споредба на веројатностите на капацитетен испад за 2x2 и 2x2x2 МИМО со 222 OSTBC за фиксно C_{th}

Без да се загуби општоста, нумеричката анализа на МИМО релејните канали со директна патека ќе ја опфати само $N \times N \times N$ системската конфигурација ($m = N_T \cdot N_R = N^2$ и $b = 1$). Сепак, изразот (6.70) може да се користи за пресметка на веројатноста за испад на $N \times 1 \times N$ системската конфигурација доколку се избере: $m = N_T$ и $b = c = L / (N \cdot K)$. На сликите 6.13 и 6.14 е дадена споредба на веројатностите на капацитетен испад за 3x3 и 3x3x3 МИМО со 334 OSTBC за различни вредности на границата на капацитетниот испад - C_{th} и вкупниот среден однос сигнал-шум - ρ . Кривите опишани со полни или



Слика 6.16: Споредба на веројатностите на капацитетен испад за 2x2 и 2x2x2 МИМО со 222 OSTBC за фиксно ρ

испрекинати линии се однесуваат на релејниот канал³, а кривите опишани со точки се однесуваат на точка-точка каналот. Може да се забележи дека релејниот канал покажува полоши перформанси во поглед на капацитетен испад во споредба со точка-точка каналот. Разликата во перформанси се зголемува со намалување на границата на капацитетниот испад - C_{th} односно со зголемување на вкупниот среден однос сигнал-шум - ρ . Со користење на (1.10) се добива дека релејниот 3x3x3 МИМО систем има ист диверзитет со 3x3 точка-точка МИМО каналот.

На сликите 6.15 и 6.16 е дадена споредба на веројатностите на капацитетен испад за 2x2 и 2x2x2 МИМО со 222 OSTBC за различни вредности на границата на капацитетниот испад - C_{th} и вкупниот среден однос сигнал-шум - ρ . Може да се забележи дека релејниот канал покажува исто така полоши перформанси во поглед на капацитетен испад во споредба со точка-точка каналот. Исто така, разликата во перформанси се зголемува со намалување на границата на капацитетниот испад - C_{th} односно со зголемување на вкупниот однос сигнал-шум - ρ . За мал однос сигнал-шум се забележува дека перформансите на релејниот канал се приближуваат на перформансите на точка-точка каналот. Со користење на (1.10) се добива дека релејниот 2x2x2 МИМО систем има иста добивка на диверзитет како 2x2 точка-точка МИМО каналот.

Ако се споредат 2x2x2 и 3x3x3 системот, и покрај тоа што 3x3x3 системот користи нецела брзина на кодот тој покажува значително подобри перформанси од 2x2x2 системот. На пример за $C_{th} = 1 \text{ b/s/Hz}$ и $\rho = 5 \text{ dB}$ веројатноста дека моменталниот капацитет ќе биде помал од прагот C_{th} за 2x2x2 системот изнесува 0,039, а за 3x3x3 изнесува $4 \cdot 10^{-4}$ што значи дека во овој случај 3x3x3 системот покажува подобри перформанси за скоро две редни големини. Освен тоа со користење на (1.10) се покажува дека добивката на диверзитет на 3x3x3 системот е $d = 9$ што е повеќе од двојно поголема од добивката на диверзитет на 2x2x2 релјниот систем ($d = 4$).

³Нивниот вкупен среден однос сигнал-шум е дополнително обележан со индекс „r“

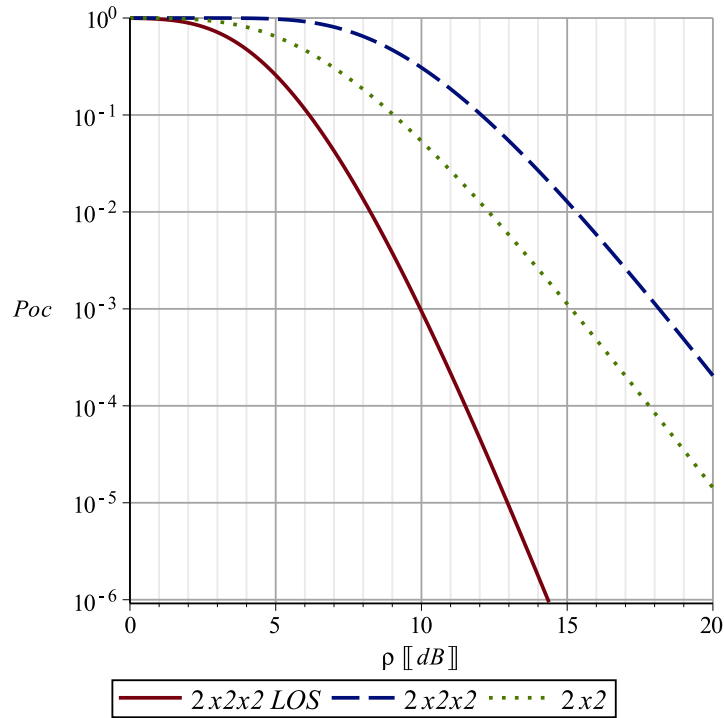
6.3.2 АФ МИМО релеен канал со директна патека

За пресметка на капацитетот на испад на МИМО релејниот канал со директна патека до дестинацијата (види слика 4.12) каде релето користи засили-и-проследи ќе земеме дека крај-крај односот сигнал-шум е распределен согласно функцијата на густина на веројатност дадена со 4.72 :

$$f(\gamma) = \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \frac{\gamma^{2m+k-1}}{\Gamma(2m+k) \cdot \theta_l^{2m+k}} \cdot e^{-\frac{\gamma}{\theta_l}} \quad (6.71)$$

Каде параметарот на облик е даден со $\theta_l = \frac{\bar{\gamma}}{b+1}$. Моменталниот капацитет е (6.43):

$$C = \frac{K}{L} \cdot \log_2(1 + \gamma) \quad (6.72)$$



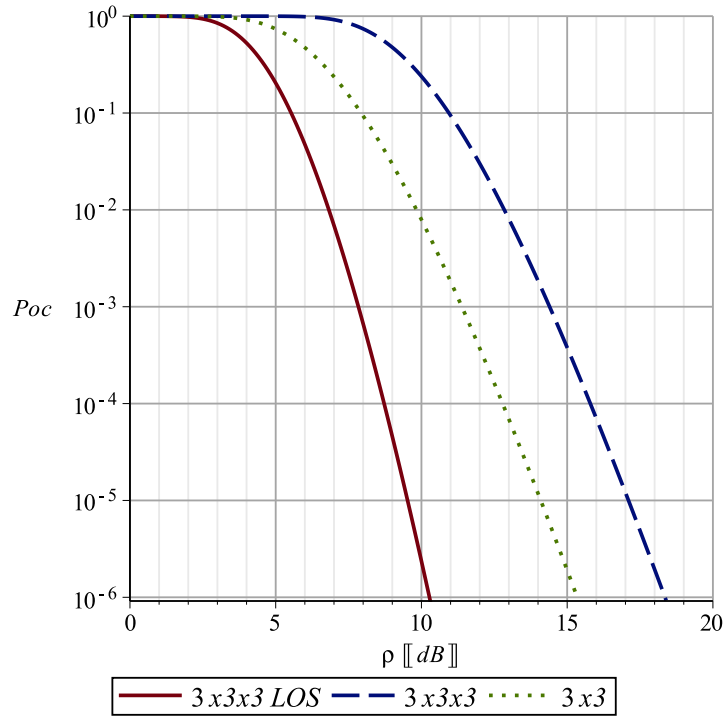
Слика 6.17: Веројатност за капацитетен испад за 2x2x2 МИМО релеен канал со и без директна патека за $C_{th} = 3 \text{ bit/s/Hz}$

Ако го изразиме γ од (6.72) се добива:

$$\gamma = 2^{\frac{LC}{K}} - 1 \quad d\gamma = \left(e^{\frac{LC}{K} \cdot \ln(2)} \right)' dC = \frac{L}{K} \cdot \ln(2) \cdot 2^{\frac{LC}{K}} \quad (6.73)$$

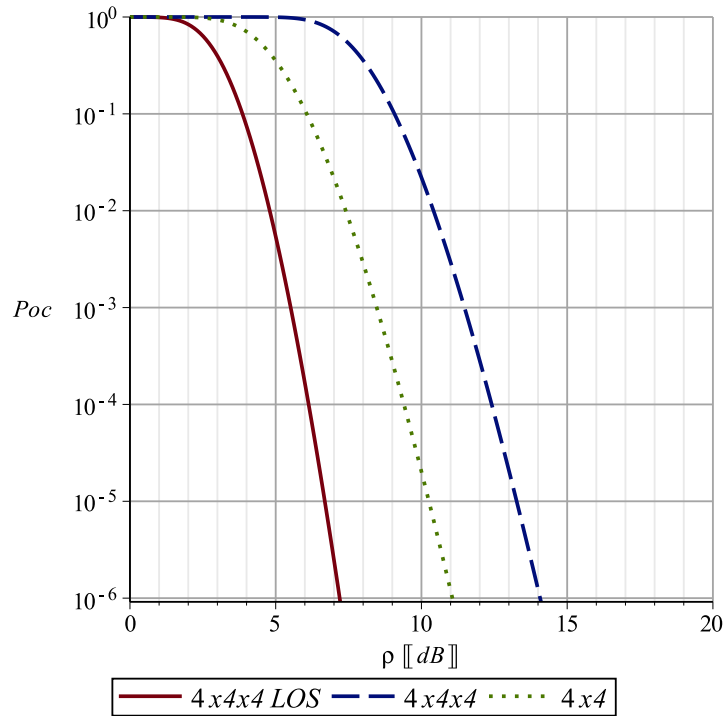
Доколку со користење на (6.73) извршиме функционална трансформација на случајните променливи, функцијата за густина на веројатност на капацитетот е:

$$\begin{aligned} f_C(C) &= f_\Gamma \left(2^{\frac{LC}{K}} - 1 \right) \cdot \frac{d\gamma}{dC} = \\ &= \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \frac{\gamma^{2m+k-1}}{\Gamma(2m+k) \cdot \theta_l^{2m+k}} \cdot e^{-\frac{\gamma}{\theta_l}} \Bigg|_{\gamma=2^{\frac{LC}{K}}-1} \cdot \frac{L}{K} \cdot \ln(2) \cdot 2^{\frac{LC}{K}} = \end{aligned}$$



Слика 6.18: Веројатност за капацитетен испад за 3x3x3 МИМО релеен канал со и без директна патека за $C_{th} = 3\text{bit}/\text{s}/\text{Hz}$

$$= \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{m}{k}}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \frac{\left(2^{\frac{LC}{K}} - 1\right)^{2m+k-1}}{\Gamma(2m+k) \cdot \theta_l^{2m+k}} \cdot e^{-\frac{\gamma}{\theta_l}} \cdot \frac{L}{K} \cdot \ln(2) \cdot 2^{\frac{LC}{K}} \quad (6.74)$$



Слика 6.19: Веројатност за капацитетен испад за 4x4x4 МИМО релеен канал со и без директна патека за $C_{th} = 3\text{bit}/\text{s}/\text{Hz}$

Доколку во изразот (6.27) се замени (6.74) и заради едноставност параметарот за облик го означиме $\alpha = 2m + k$, за веројатноста на испад на системот се добива:

$$\begin{aligned}
 P_{oc} &= 1 - \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \int_{C_{th}}^{\infty} \frac{\left(2\frac{LC}{K} - 1\right)^{\alpha-1}}{\theta_l^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{LC}{\theta_l} - 1} \cdot \frac{L}{K} \cdot \ln(2) \cdot 2\frac{LC}{K} dC = \\
 &= 1 - \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \int_{C_{th}}^{\infty} \frac{\left(\frac{2\frac{LC}{K} - 1}{\theta_l}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\left(\frac{2\frac{LC}{K} - 1}{\theta_l}\right)} \cdot d\left(\frac{2\frac{LC}{K} - 1}{\theta_l}\right) = \\
 &= \left| t_{th} = \frac{2\frac{LC_{th}}{K} - 1}{\theta_l} \right| = 1 - \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{th}}^{\infty} t^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{t}{\theta_l}} \cdot dt = \\
 &= 1 - \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha, t_{th}) = \\
 &= 1 - \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma\left(\alpha, \frac{2\frac{LC_{th}}{K} - 1}{\theta_l}\right) = \\
 &= 1 - \frac{1}{(b+1)^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k}{k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^k \cdot \frac{1}{\Gamma(2m+k)} \Gamma\left(2m+k, \frac{2\frac{LC_{th}}{K} - 1}{\bar{\gamma}} \cdot (b+1)\right) \quad (6.75)
 \end{aligned}$$

Без да се загуби општоста нумеричката анализа на релејните АФ МИМО системи со директна патека ќе ја опфати само $N \times N \times N$ системската конфигурација ($m = N_T \cdot N_R = N^2$ и $b = 1$). Сепак, изразот 6.75 може да се користи за пресметка на веројатноста на испад на $N \times 1 \times N$ системската конфигурација доколку се избере: $m = N_T$ и $b = c = L / (N \cdot K)$.

На сликите 6.17, 6.18 и 6.19 е прикажана споредба на веројатноста на капацитетен испад за $2 \times 2 \times 2$, $3 \times 3 \times 3$ и $4 \times 4 \times 4$ АФ МИМО релејните канали со директна патека (6.75), каскадните АФ МИМО релејни канали 6.70 и соодветните точка-точка МИМО системи 6.49.

На сликите 6.17, 6.18 и 6.19 може да се забележи дека МИМО релејниот канал со директна патека има значително подобри перформанси на капацитетен испад од каскадниот МИМО релеен канал и од соодветниот точка-точка МИМО систем. Освен тоа МИМО релејниот систем со директна патека покажува и поголема добивка од диверзитет.

7 Заклучок

Во докторската дисертација се анализирани перформансите на неколку видови кооперативни релејни системи во фединг канали со примена на теоријата на комуникации и теоријата на информации. Конкретно:

- Спроведена е информациско-теоретска анализа на кооперативните системи со 3 јазли. Со примена на сопствен оригинален приод, изведени се познатите изрази за долната граница на капацитет за Гаусов релеен канал со декодирај-и-проследи реле, Гаусов релеен канал со компримирај-и-проследи реле, Гаусов релеен канал со фреквентна распределба во дестинацијата и Гаусов релеен канал со засили-и-проследи реле. Иако крајните изрази се познати во литературата, во оваа дисертација тие се постапно изведени на начин кој подоцна едноставно се пресликува во соодветна комуникациско-теоретската анализа.
- За МИМО релејните канали, извршена е анализа на перформансите на релеен систем со две делници со две антени по јазол кој користи ортогонално просторно-временско кодирање и има целосни информации за каналот во релето и дестинацијата во услови на Рејлиев фединг при што во релето е користена засили-и-проследи постапка. За ваков систем, изведени се аналитички изрази за веројатноста за испад, кои се потврдени преку нумерички анализи и симулации. Освен тоа за овој систем направена е споредба на веројатноста за битска грешка со веројатноста за битска грешка на системот кој користи фиксно засилување.
- Изведени се аналитички апроксимации на веројатностите за грешка и испад за засили-и-проследи МИМО релеен канал со повеќе антени по јазол кој користи ортогонално просторно-временско кодирање и има целосни информации за каналот во релето и дестинацијата во услови на Рејлиев фединг. Со помош на нумеричка интеграција на момент-генерирачка функција и симулации покажано е дека добиените апроксимации на веројатноста за грешка и испад се многу точни. Моделот на каналот е проширен со воведување на директна патека до дестинацијата и за тој случај се изведени апроксимативни изрази за веројатноста на испад во затворена форма. Резултатите од апроксимациите за проширениот модел се споредени со резултатите добиени за системите без директна патека.
- Анализирани се релејните канали со повеќе делници за кои беа одредени веројатностите за испад во случај на засили-и-проследи релејна постапка со променливо и фиксно засилување за Рејлиев, Накагами, Рајсов и Вејбул фединг.
- Изведени се изрази во затворена форма за ергодичниот капацитет и капацитетниот испад за засили-и-проследи МИМО релеен канал кој користи ортогонално просторно-временско кодирање со и без директна патека до дестинацијата во услови на Рејлиев фединг. Со користење на овие изрази се споредени нивните перформанси со перформансите на соодветните точка-точка МИМО канали.

Капацитетот на релејниот канал во општ случај не е познат и затоа, во првиот дел од дисертацијата се анализирани границите на капацитетот за декодирај-и-проследи, засили-и-проследи и компримирај-и-проследи релејните постапки. Особено внимание е посветено

на анализа на границите на капацитетот за овие релејни постапки за Гаусов дуплексен и полудуплексен релеен канал.

Во продолжение се анализирани веројатноста за испад и веројатноста за грешка на три типа на засили-и-проследи МИМО релејни канали ($2 \times 1 \times 1$, $2 \times 2 \times 1$ и $2 \times 2 \times 2$) со засили-и-проследи релеи со променливо засилување во Рејлиев фединг. Перформансите на релејните канали со две делници и две антени се споредени со перформансите на релејните канали со две делници и една антена во јазлите и точка-точка каналите со две антени. Додека предноста од користење на $2 \times 1 \times 1$ системот е занемарлива, перформансите за $2 \times 2 \times 1$ и $2 \times 2 \times 2$ системите се подобри од $1 \times 1 \times 1$ системот за 16dB и 25dB при веројатност на испад од 10^{-3} . Во оваа глава се претставени два пристапи за теоретска анализа на веројатноста на испад. Првиот пристап е со користење на нумеричка интеграција на момент-генерирачка функција и вториот со израз во затворена форма. Двата пристапи даваат идентични резултати.

Исто така, споредена е битската веројатност на грешка за разгледуваните системски конфигурации со битската веројатност на грешка на релејниот канал кој користи по една антена во јазлите и променливо засилување во релето и соодветните конфигурации на регенеративните декодирај-и-проследи релејни канали. Добивката во перформанси на релејниот канал со повеќе од една антена по јазол во споредба со засили-и-проследи релејниот канал кој користи по една антена во јазлите варира од 16 до 23 dB на битска веројатност за грешка од 10^{-4} зависно од бројот на антени користени во дестинацијата. Сепак, за $2 \times 1 \times 1$ засили-и-проследи релејниот канал добивката е само 3dB на битска веројатност за грешка од 10^{-4} . Битската веројатност за грешка на разгледуваните релејните канали со две антени е незначително помала од битската веројатност за грешка на соодветните декодирај-и-проследи релејни канали (0-2dB). Разликата во перформанси се зголемува со зголемување на бројот на антени во релето и дестинацијата. Имајќи ги во предвид супериорните перформанси во споредба со релејните канали со една антена во јазлите, помалата сложеност и незначително послабите перформанси во споредба со соодветните декодирај-и-проследи релејни канали, покажано е дека користењето на засили-и-проследи релеен канал со две антени во изворот, релето и дестинацијата може да биде многу корисно во идните безжични комуникациски системи.

Исто така, анализирана е веројатноста за појава на грешка на засили-и-проследи релеен канал со две делници и повеќе антени по јазол кој користи ортогонално просторно-временско кодирање. За тие системи изведени се генерализирани изрази во затворена форма за многу прецизна апроксимација на веројатноста на грешка. Освен тоа, изведени се генерализирани асимптотски изрази за веројатноста на грешка за голем однос сигнал-шум. Покажано е дека резултатите добиени со апроксимациите многу точно ги следат точните резултати добиени со симулација и нумеричка интеграција на соодветните интегрални за произволен однос сигнал-шум. Исто така добиените резултати се споредени со слични резултати добиени во литературата со што се потврдува големата точност на апроксимациите.

За разгледуваните засили-и-проследи МИМО релејни канали најден е многу едноставен израз во затворена форма за груба апроксимација на веројатноста за грешка. Покажано е дека резултатите добиени со овој израз добро се усогласени со точните вредности добиени со симулација, нумеричка интеграција и прецизните апроксимации. Усогласеноста на резултатите добиени со прецизната и грубата апроксимација е подобра за помали вредности на односот сигнал-шум.

Исто така е анализирана веројатноста на испад на засили-и-проследи МИМО релеен канал со две делници. За овој тип на канал се изведени генерализирани изрази во затворена форма за прецизна и груба апроксимација на веројатноста за испад. Покажано е дека резултатите добиени со овие апроксимации блиску ги следат точните резултати.

Со користење на истиот пристап за добивање на грубите апроксимации за веројатноста на грешка и испад, изведен е едноставен израз во затворена форма за функцијата на густината на веројатноста на крај-крај односот сигнал-шум за засили-и-проследи МИМО релејниот канал со директна патека до дестинацијата. Со користење на овој израз се анализирани перформансите на засили-и-проследи МИМО релејниот канал со директна патека и се споредени со перформансите на каскадниот систем т.е. системот без директна патека до дестинацијата. Засили-и-проследи МИМО релејните канали со директна патека имаат значително подобри перформанси во споредба со засили-и-проследи МИМО релејните канали без директна патека (неколку редни големини), како што можеше да се очекува од спроведената информациско-теоретската анализа. Исто така, системите со директна патека имаат поголема добивка од диверзитет во споредба со системите без директна патека. Разликата во добивка од диверзитет се намалува со зголемување на бројот на антени.

Во продолжението е анализирана веројатноста за испад на релеен канал со повеќе делници кој користи релеи со фиксно и променливо засилување. Анализата е спроведена со комбинација на аналитички, нумерички и симулациски методи. Заради комплексноста на изразот за крај-крај односот-сигнал шум, веројатноста за испад за системот со повеќе делници во Рејлиев, Накагами, Рајсов и Веибул фединг може да се определи само со комбинирање на аналитичките резултати со нумерички интеграциски техники, освен во случај на систем со две делници. Покрај нивната помала комплексност, системите со повеќе делници кои користат релеи со фиксно засилување типично имаат подобри перформанси во споредба со системите со променливо засилување. Разликата во перформанси помеѓу овие два система значително се зголемува со зголемување на бројот на делници, за сите разгледувани видови на фединг и без оглед на изборот на средниот однос сигнал-шум по делница. Зголемувањето на прагот на односот сигнал-шум дополнително ја зголемува разликата во перформанси.

Покрај тоа што ортогоналното просторно-временско кодирање ја зголемува добивката од диверзитет, неговата употреба прави компромис помеѓу капацитетот и комплексноста за кодирање и декодирање. Употребата на повеќе антени во изворот и дестинацијата се покажува дека многу ја зголемува спектралната ефикасност на безжичните системи. Имајќи го ова во предвид, изведени се изрази во затворена форма за ергодичниот капацитет и веројатноста на капацитетен испад за засили-и-проследи МИМО релеен канал во Рејлиев фединг. Се покажува дека ергодичниот капацитет на засили-и-проследи МИМО релејниот канал се приближува до ергодичниот капацитет на точка-точка МИМО каналот со зголемување на бројот на антени. Засили-и-проследи МИМО релејниот канал има полоши перформанси на капацитетен испад во споредба на точка-точка МИМО каналите. Разликата на перформанси е незначителна за мал однос сигнал-шум но таа се зголемува со зголемување на односот сигнал-шум. Споредбата на засили-и-проследи МИМО релејните канали со различен број на антени во изворот, релето и дестинацијата покажува дека зголемувањето на бројот на антени резултира во зголемување на ергодичниот капацитет, подобрување на перформансите на капацитетен испад и зголемувањето на добивката од диверзитет.

Освен тоа, анализиран е ергодичниот капацитет на засили-и-проследи МИМО релејните канали со директна патека и истиот е спореден со ергодичниот капацитет на каскадните засили-и-проследи МИМО релејни канали. Засили-и-проследи МИМО релејните канали со директна патека го надминуваат ергодичниот капацитет на соодветните МИМО релејни канали без директна патека. Освен тоа, тие покажуваат поголем капацитет од точка-точка МИМО каналот со соодветен број на антени. Исто така, засили-и-проследи МИМО релејните канали со директна патека го надминуваат Шеноновиот капацитет за вредности на односот сигнал-шум кои се од практичен интерес.

8 Додатоци

8.1 Релеен канал на Сато

Пресметка на оптимальна функција на густина на веројатност за релејниот канал на Сато (види слика 2.69):

$$\begin{array}{c}
 p(y_3|x_1x_2) \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 y_3|x_1x_2 & y_{30} & y_{31} & y_{32} \\
 \hline
 00 & 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 10 & 0 & 0.5 & 0.5 \\
 \hline
 20 & 0 & 0.5 & 0.5 \\
 \hline
 01 & 0.5 & 0.5 & 0 \\
 \hline
 11 & 0.5 & 0.5 & 0 \\
 \hline
 21 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 p(y_3, x_1, x_2) \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 y_3|x_1x_2 & y_{30} & y_{31} & y_{32} & p(x_1x_2) \\
 \hline
 00 & a & 0 & 0 & a \\
 \hline
 10 & 0 & 0.5b & 0.5b & b \\
 \hline
 20 & 0 & 0.5b & 0.5b & b \\
 \hline
 01 & 0.5b & 0.5b & 0 & b \\
 \hline
 11 & 0.5b & 0.5b & 0 & b \\
 \hline
 21 & 0 & 0 & a & a \\
 \hline
 p(y_3) & a+b & 2b & a+b & \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (8.1)$$

$$I(X_1, X_2; Y_3) = H(Y_3) - H(Y_3|X_1X_2) = -2(a+b) \cdot \log_2(a+b) - (2b) \cdot \log_2(2b) - 4b \quad (8.2)$$

$$\begin{aligned}
 2a + 4b &= 1 \rightarrow a = \frac{1 - 4 \cdot b}{2} \\
 &-2 \left(\frac{1 - 4 \cdot b}{2} + b \right) \cdot \log_2 \left(\frac{1 - 4 \cdot b}{2} + b \right) - (2b) \cdot \log_2(2b) - 4b = \\
 &= -2 \left(\frac{1 - 4 \cdot b + 2b}{2} \right) \cdot \log_2 \left(\frac{1 - 4 \cdot b + 2b}{2} \right) - (2b) \cdot \log_2(2b) - 4b = \\
 &= -2 \left(\frac{1 - 2 \cdot b}{2} \right) \cdot \log_2 \left(\frac{1 - 2 \cdot b}{2} \right) - (2b) \cdot \log_2(2b) - 4b \\
 I(X_1, X_2; Y_3) &= -(1 - 2 \cdot b) \cdot \log_2 \left(\frac{1 - 2 \cdot b}{2} \right) - (2b) \cdot \log_2(2b) - 4b \quad (8.3)
 \end{aligned}$$

$$I(X_1; Y_2|X_2) = \log_2(3) = 1.58496$$

Со пресметка на извод од (8.3) се добива:

$$\frac{d}{dp} (I(X_1X_2; Y_3)) = 0 \rightarrow b = \frac{1}{8}; \quad a = \frac{1 - 4 \cdot 1/8}{2} = \frac{7}{18}$$

Со оглед на тоа што се работи за деградиран DMRC капацитетот на каналот е (2.69):

$$C = \max_{p(x_1, x_2)} \{ \min \{ I(X_1X_2; Y_3), I(X_1; Y_2|X_2) \} \} = 1.1699 \text{ bits}$$

$$p(y_3, x_1, x_2)$$

$y_3 x_1x_2$	y_{30}	y_{31}	y_{32}	$p(x_1x_2)$
00	7/18	0	0	7/18
10	0	1/36	1/36	1/18
20	0	1/36	1/36	1/18
01	1/36	1/36	0	1/18
11	1/36	1/36	0	1/18
21	0	0	7/18	7/18
$p(y_3)$	4/9	1/9	4/9	

(8.4)

8.2 Капацитет на CF за RC со сума по модул 2

Во доказот се зема $\hat{Y}_2 = Y_2 \oplus V$ каде $V \sim \text{Bern}(\alpha)$ е независна од (X_1, Z_2, Z_3) и $\alpha = H^{-1}(1 - C_0)$, во долната граница за компримирај-и-проследи (2.99), т.е.:

$$f(V; \alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{доколку } V = 0, \\ 1 - \alpha & \text{доколку } V = 1. \end{cases} \quad (8.5)$$

$$Y'_3 = X_1 \oplus Z_3, \quad Y_2 = Z_2 \oplus Z_3 \quad Z_2 \sim \text{Bern}(p) \text{ и } Z_3 \sim \text{Bern}(1/2) \quad (8.6)$$

$$C \geq \max_{p(x_1)p(\hat{y}_2|y_2)} \min \left\{ I(X_1; Y'_3) - I(Y_2; \hat{Y}_2|X_1Y'_3) + C_0, I(X_1; \hat{Y}_2, Y'_3) \right\} \quad (8.7)$$

$$I(X_2, Y'_3) = H(Y'_3) - H(Y'_3|X_2) = 1 \quad C_0 = \max_{p(x_2)} \{I(X_2; Y'_3)\} = 1 \quad (8.8)$$

$$I(X_1, Y'_3) = H(Y'_3) - H(Y'_3|X_1) \stackrel{(a)}{=} H\left(\frac{1}{2}\right) - H(Z_3) = 0 \quad (8.9)$$

$$\hat{Y}_2 = Y_2 \oplus V \quad V \sim \text{Bern}(\alpha). \quad (8.10)$$

За да се добие изразот за ентропија во (a) потребно е да се пресмета PMF за Y'_3 :

$p(Y'_3 X_1Z_3)$	$p(Y'_3, X_1, Z_3)$	$X_1, Z_3, X_1 \oplus Z_3$																																					
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>$X_1, Z_3 X_1 \oplus Z_3$</th> <th>0</th> <th>1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>00</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>01</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>11</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	$X_1, Z_3 X_1 \oplus Z_3$	0	1	00	1	0	01	0	1	10	0	1	11	1	0	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>$X_1, Z_3 X_1 \oplus Z_3$</th> <th>0</th> <th>1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>00</td> <td>$\frac{p_1}{2}$</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>01</td> <td>0</td> <td>$\frac{p_1}{2}$</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>0</td> <td>$\frac{(1-p_1)}{2}$</td> </tr> <tr> <td>11</td> <td>$\frac{(1-p_1)}{2}$</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>$p(Y'_3)$</td> <td>1/2</td> <td>1/2</td> </tr> </tbody> </table>	$X_1, Z_3 X_1 \oplus Z_3$	0	1	00	$\frac{p_1}{2}$	0	01	0	$\frac{p_1}{2}$	10	0	$\frac{(1-p_1)}{2}$	11	$\frac{(1-p_1)}{2}$	0	$p(Y'_3)$	1/2	1/2	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tbody> <tr> <td>000</td> </tr> <tr> <td>011</td> </tr> <tr> <td>101</td> </tr> <tr> <td>110</td> </tr> </tbody> </table>	000	011	101	110
$X_1, Z_3 X_1 \oplus Z_3$	0	1																																					
00	1	0																																					
01	0	1																																					
10	0	1																																					
11	1	0																																					
$X_1, Z_3 X_1 \oplus Z_3$	0	1																																					
00	$\frac{p_1}{2}$	0																																					
01	0	$\frac{p_1}{2}$																																					
10	0	$\frac{(1-p_1)}{2}$																																					
11	$\frac{(1-p_1)}{2}$	0																																					
$p(Y'_3)$	1/2	1/2																																					
000																																							
011																																							
101																																							
110																																							

(8.11)

Да ја пресметаме PMF на случајната променлива $Y_2 = Z_2 \oplus Z_3$ ако се познати PMF-те на случајните променливи Z_2 и Z_3 :

$p(Y_2 Z_2, Z_3)$	$p(Y_2, Z_2, Z_3)$																																							
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>$Z_2, Z_3 Y_2$</th> <th>0</th> <th>1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>00</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>01</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>11</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	$Z_2, Z_3 Y_2$	0	1	00	1	0	01	0	1	10	0	1	11	1	0	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>$Z_2, Z_3 Y_2$</th> <th>0</th> <th>1</th> <th>$p(Z_2Z_3)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>00</td> <td>$\frac{p}{2}$</td> <td>0</td> <td>$\frac{p}{2}$</td> </tr> <tr> <td>01</td> <td>0</td> <td>$\frac{p}{2}$</td> <td>$\frac{p}{2}$</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>0</td> <td>$\frac{1-p}{2}$</td> <td>$\frac{1-p}{2}$</td> </tr> <tr> <td>11</td> <td>$\frac{1-p}{2}$</td> <td>0</td> <td>$\frac{1-p}{2}$</td> </tr> <tr> <td>$p(Y_2)$</td> <td>1/2</td> <td>1/2</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	$Z_2, Z_3 Y_2$	0	1	$p(Z_2Z_3)$	00	$\frac{p}{2}$	0	$\frac{p}{2}$	01	0	$\frac{p}{2}$	$\frac{p}{2}$	10	0	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1-p}{2}$	11	$\frac{1-p}{2}$	0	$\frac{1-p}{2}$	$p(Y_2)$	1/2	1/2	
$Z_2, Z_3 Y_2$	0	1																																						
00	1	0																																						
01	0	1																																						
10	0	1																																						
11	1	0																																						
$Z_2, Z_3 Y_2$	0	1	$p(Z_2Z_3)$																																					
00	$\frac{p}{2}$	0	$\frac{p}{2}$																																					
01	0	$\frac{p}{2}$	$\frac{p}{2}$																																					
10	0	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1-p}{2}$																																					
11	$\frac{1-p}{2}$	0	$\frac{1-p}{2}$																																					
$p(Y_2)$	1/2	1/2																																						

(8.12)

Да ја пресметаме PMF за $(Z_2 \oplus Z_3 \oplus V)$ ако се познати PMF-те на случајните променливи Z_2 , Z_3 и V :

$p(V \oplus Z_2 \oplus Z_3 V, Z_2, Z_3)$			$p(V, Z_2, Z_3, V \oplus Z_2 \oplus Z_3)$			
$V, Z_2, Z_3 V \oplus Z_2 \oplus Z_3$	0	1	$V, Z_2, Z_3 V \oplus Z_2 \oplus Z_3$	0	1	$p(V, Z_2, Z_3)$
000	1	0	000	$\frac{\alpha p}{2}$	0	$\frac{\alpha p}{2}$
001	0	1	001	0	$\frac{\alpha p}{2}$	$\frac{\alpha p}{2}$
010	0	1	010	0	$\frac{\alpha(1-p)}{2}$	$\frac{\alpha(1-p)}{2}$
011	1	0	011	$\frac{\alpha(1-p)}{2}$	0	$\frac{\alpha(1-p)}{2}$
100	0	1	100	0	$\frac{(1-\alpha)p}{2}$	$\frac{(1-\alpha)p}{2}$
101	1	0	101	$\frac{(1-\alpha)p}{2}$	0	$\frac{(1-\alpha)p}{2}$
110	1	0	110	$\frac{(1-\alpha)(1-p)}{2}$	0	$\frac{(1-\alpha)(1-p)}{2}$
111	0	1	111	0	$\frac{(1-\alpha)(1-p)}{2}$	$\frac{(1-\alpha)(1-p)}{2}$
			$p(V \oplus Z_2 \oplus Z_3)$	1/2	1/2	

(8.13)

Од (8.12) следи дека $Y_2 \sim \text{Bern}(1/2)$. Имајќи го ова во предвид како и (8.13) втората здружена информација од првиот член од минимизацијата во (8.7) е:

$$\begin{aligned}
 I(Y_2; \hat{Y}_2 | X_1 Y_3') &= H(\hat{Y}_2 | X_1, Y_3') - H(\hat{Y}_2 | X_1, Y_3', Y_2) = \\
 &= H(Y_2 \oplus V | X_1, Y_3') - H(Y_2 \oplus V | X_1, Y_3', Y_2) = \\
 &= H(Z_2 \oplus Z_3 \oplus V | X_1, Y_3') - H(V | X_1, Y_3') = H(1/2) - H(V) = 1 - H(\alpha)
 \end{aligned} \tag{8.14}$$

Ако се заменат (8.8) и (8.9) во (8.14) за првиот член од изразот за минимизација во (8.7) добиваме:

$$I(X_1; Y_3') - I(Y_2; \hat{Y}_2 | X_1 Y_3') + C_0 = 0 - 1 + H(\alpha) + 1 = H(\alpha) \tag{8.15}$$

Ако се земат во предвид (8.6) и (8.10) за вториот член од изразот за минимизација во (8.7) добиваме:

$$\begin{aligned}
 I(X_1; \hat{Y}_2, Y_3') &= H(\hat{Y}_2, Y_3') - H(\hat{Y}_2, Y_3' | X_1) = \\
 &= H(\hat{Y}_2) + H(\hat{Y}_2 | Y_3') - H(\hat{Y}_2 | X_1) - H(\hat{Y}_2 | Y_3' X_1) = \\
 &= H(Y_2 \oplus V) + H(Y_2 \oplus V | Y_3') - H(Y_2 \oplus V | X_1) - H(Y_2 \oplus V | Y_3' X_1) = \\
 &= H(Z_2 \oplus Z_3 \oplus V) + H(Z_2 \oplus Z_3 \oplus V | Y_3') - H(Z_2 \oplus Z_3 \oplus V | X_1) - H(Z_2 \oplus Z_3 \oplus V | X_1 \oplus Z_3, X_1)
 \end{aligned} \tag{8.16}$$

Ако се замени (8.13) во (8.16) се добива:

$$I(X_1; \hat{Y}_2, Y_3') = H(1/2) + \cancel{H(1/2)} - \cancel{H(1/2)} - H(Z_2 \oplus V) = 1 - H(Z_2 \oplus V) \tag{8.17}$$

Да ја пресметаме здружената функција на распределба веројатност за $(Z_2 \oplus V)$ која е потребна за пресметка на ентропијата во вториот член од (8.17):

$V, Z_2 V \oplus Z_2$	0	1
00	1	0
01	0	1
10	0	1
11	1	0

$V, Z_2 V \oplus Z_2$	0	1	$p(V, Z_2)$
00	αp	0	αp
01	0	$\alpha(1-p)$	$\alpha(1-p)$
10	0	$(1-\alpha)p$	$(1-\alpha)p$
11	$(1-\alpha)(1-p)$	0	$(1-\alpha)(1-p)$
$p(V \oplus Z_2)$	$1 - \alpha \cdot \bar{p} - \bar{\alpha} \cdot p$ $= 1 - \alpha * p$	$\alpha \cdot \bar{p} + \bar{\alpha} \cdot p$ $= \alpha * p$	

(8.18)

каде:

$$\alpha * p = \alpha(1-p) + (1-\alpha)p. \quad (8.19)$$

Ако се замени (8.18) во (8.17) се добива:

$$I(X_1; \hat{Y}_2, Y_3') = 1 - H(\alpha * p) \quad (8.20)$$

Ако се замени (8.15) и (8.20) во (8.7) се добива:

$$C \geq \max \min \{H(\alpha), 1 - H(\alpha * p)\} \stackrel{(b)}{=} 1 - H(\alpha * p) \quad (8.21)$$

$$C \geq 1 - H(p * H^{-1}(1 - C_0)) \quad \text{бидејќи } \alpha = H^{-1}(1 - C_0) \quad (8.22)$$

каде еднаквоста (b) важи за сите вредности на $\alpha \in (0 : 1)$ и $p \in (0 : 1)$.

8.3 CUB за релеен канал со сума по модул 2

Согласно изразот (2.89) горната пресечна граница за SFD канал е:

$$C \leq \max_{p(x_1)} \min \{I(X_1; Y_3') + C_0, I(X_1; Y_2, Y_3')\} \quad (8.23)$$

Од изразот (8.11) во глава (8.2) следи дека $p(Y_3') = \text{Bern}(1/2)$ и согласно (8.9) $I(X_1; Y_3') = 0$. Пресметка на C_0 е едноставна зошто се работи за директен канал без шум:

$$C_0 = \max_{p(x_2)} I(X_2, Y_3'') = H(Y_3'') - H(Y_3''|X_2) = 1 \quad (8.24)$$

За да го пресметаме на вториот член од минимизацијата во (8.23) потребно е да се најде веројатноста на настанување на случајната променлива Y_2 :

$Z_2, Z_3 Y_2 = Z_2 \oplus Z_3$	0	1
00	1	0
01	0	1
10	0	1
11	1	0

$Z_2, Z_3 Y_2 = Z_2 \oplus Z_3$	0	1
00	$p/2$	0
01	0	$p/2$
10	0	$(1-p)/2$
11	$(1-p)/2$	0
$p(Z_2 \oplus Z_3)$	$1/2$	$1/2$

(8.25)

од изразот (8.25) следи дека $p(Y_2) = \text{Bern}(1/2)$ и затоа:

$$\begin{aligned} I(X_1; Y_2, Y_3') &= H(Y_2, Y_3') - H(Y_2, Y_3'|X_1) = \cancel{H(Y_2)} + \cancel{H(Y_3')} - \cancel{H(Y_3'|X_1)} - H(Y_2|X_1, Y_3') = \\ &= 1 - H(Z_2 \oplus Z_3|X_1, X_1 \oplus Z_3) = 1 - H(Z_2) = 1 - H(p) \end{aligned} \quad (8.26)$$

Ако се замени (8.9), (8.24) и (8.26) во (8.23) се добива:

$$C \leq \max_{p(x_1)} \min \{I(X_1; Y_3') + C_0, I(X_1; Y_2, Y_3')\} = \max_{p(x_1)} \min \{0 + C_0, 1 - H(p)\} = \min \{C_0, 1 - H(p)\} \quad (8.27)$$

8.4 CUB за Гаусов релеен канал

Горната пресечната граница за Гаусов RC е:

$$C \leq \sup_{F(x_1 x_2): E(X_1^2) \leq P, E(X_2^2) \leq P} \min \{I(X_1 X_2; Y_3) I(X_1; Y_2, Y_3 | X_2)\} \quad (8.28)$$

Ќе извршине максимизација со воспоставување на горната граница на десната страна од изразот, а потоа ќе покажеме дека тоа се постигнува ако здружена $p(X_1, X_2)$ е здружена гаусова функција на густина на веројатност.

Прво ќе започнеме со *првиот член* од парот за минимизација. Да претпоставиме без да се изгуби општоста дека $E(X_1) = E(X_2) = 0$ и $Z_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и $Z_3 \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Земаме дека:

$$Y_3 = g_{31}X_1 + g_{32}X_2 + Z_3, \quad Y_2 = g_{21}X_1 + Z_2 \quad (8.29)$$

$$I(X_1, X_2; Y_3) = h(Y_3) - h(Y_3 | X_1 X_2) = h(Y_3) - \frac{1}{2} \log(2\pi e) \leq \frac{1}{2} \log(E(Y_3^2)) \leq \quad (8.30)$$

$$\leq \frac{1}{2} \log(1 + g_{31}^2 E[X_1^2] + g_{32}^2 E[X_2^2] + 2g_{31}g_{32}E[X_1 X_2]) \leq \quad (8.31)$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot \log(1 + \gamma_{31} + \gamma_{32} + 2\rho\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}}) = C \left(\gamma_{32} + \gamma_{32} + \underbrace{2\rho\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}}}_{(a)} \right) \quad (8.32)$$

каде:

$$\rho = E(X_1 X_2) / \sqrt{E(X_1^2) E(X_2^2)} \quad (8.33)$$

е корелационен коефициент. Со замена на (8.33) во (8.32) за изразот (a) се добива:

$$a = 2 \cdot \rho \cdot \sqrt{\gamma_{31}\gamma_{32}} = 2 \cdot \frac{E(X_1 X_2)}{\sqrt{E(X_1^2) E(X_2^2)}} \sqrt{g_{31}^2 g_{32}^2 P^2} = 2 \cdot \frac{E(X_1 X_2)}{\sqrt{P^2}} \cdot g_{31} g_{32} \sqrt{P^2} = 2 \cdot g_{31} g_{32} E(X_1 X_2) \quad (8.34)$$

со што се докажува точноста на низата на нееднакости: (8.31)-(8.32).

Понатаму ќе го анализираме *вториот член* од парот за минимизација:

$$I(X_1; Y_2, Y_3 | X_2) = h(Y_2, Y_3 | X_2) - h(Y_2 Y_3 | X_1 X_2) = h(Y_2 Y_3 | X_2) - h(Z_2 Z_3) = \quad (8.35)$$

$$= h(Y_3 | X_2) + h(Y_2 | X_2 Y_3) - h(Z_2) - h(Z_3) \leq E_{x_2} [h(Y_3 | x_2)] + E_{x_2, y_3} [h(Y_2 | y_3 x_2)] - \log(2\pi e) \leq \quad (8.36)$$

$$\leq E \left[\frac{1}{2} \log \text{Var}(Y_3 | x_2) \right] + E \left[\frac{1}{2} \log \text{Var}(Y_2 | y_3 x_2) \right] \leq \quad (8.37)$$

$$\leq \frac{1}{2} \log E[\text{Var}(Y_3 | x_2)] + \frac{1}{2} \log(E[\text{Var}(Y_2 | y_3 x_2)]) \leq \quad (8.38)$$

$$\leq \frac{1}{2} \log E[\text{Var}(g_{31}X_1 + g_{32}X_2 + Z_3 | X_2)] + \frac{1}{2} \log E[\text{Var}(Y_2 | Y_3 X_2)] = \quad (8.39)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \log(g_{31}^2 E_{x_1}[X_1^2] - g_{31}^2 E_{X_1 X_2}^2(X_1 X_2) / E[X_2^2] + 1) + \quad (8.40)$$

$$+ \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + (g_{21}^2 + g_{31}^2)(E(X_1^2) - E^2(X_1 X_2) / E(X_2^2))}{1 + g_{31}^2(E(X_1^2) - E^2(X_1 X_2) / E(X_2^2))} \right) = \quad (8.41)$$

$$= \frac{1}{2} \log(1 + (g_{21}^2 + g_{31}^2)(E(X_1^2) - E^2(X_1 X_2) / E(X_2^2))) = \quad (8.42)$$

$$= \frac{1}{2} \log (1 + (g_{21}^2 + g_{31}^2) \cdot E(X_1^2) \cdot (1 - E^2(X_1 X_2) / E(X_1^2) \cdot E(X_2^2))) \leq \quad (8.43)$$

$$\leq \frac{1}{2} \log (1 + (1 - \rho^2) (\gamma_{21} + \gamma_{31})) = C((1 - \rho^2) (\gamma_{21} + \gamma_{31})) \quad (8.44)$$

Изразот (8.37) следи од фактот дека гаусовата респределба ја максимизира диференцијалната ентропија [9, the.(8.6.5)], а изразот (8.38) следи од неравенството на Јансен [9, eq.(2.76)]. Изразот (8.40) се добива на следниов начин:

$$h(Y_3|X_2) = h(g_{31}X_1 + g_{32}X_2 + Z_3|X_2) \leq \frac{1}{2} \log (2\pi e) E_{x_2} (Var(Y_3|x_2)) \quad (8.45)$$

$$\begin{aligned} E_{x_2} (Var(Y_3|x_2)) &= E_{x_2} (Var(g_{31}X_1 + g_{32}X_2 + Z_3|X_2)) = E_{x_2} \{var [g_{31}X_1|x_2]\} + 1 = \\ &= E_{x_2} [E_{x_1} [(g_{31}X_1)^2 |x_2] - E_{x_2} E_{x_1}^2 [g_{31}X_1|x_2]] + 1 \\ &= E_{x_1} [g_{31}^2 X_1^2] - g_{31}^2 E_{x_2} E_{x_1}^2 [X_1|x_2] + 1 \end{aligned} \quad (8.46)$$

Со користење на Шварцовото неравенство [30, eq.(14.5.13)] се добива:

$$E_{x_1 x_2}^2 (X_1 X_2) = E_{x_2}^2 [X_2 \cdot E_{x_1} [X_1|x_2]] \leq E[X_2^2] \cdot E_{x_2} [E_{x_1}^2 [X_1|x_2]] \Rightarrow \quad (8.47)$$

$$\boxed{E_{x_2} [E_{x_1}^2 [X_1|x_2]] \geq E_{x_1 x_2}^2 (X_1 X_2) / E[X_2^2]} \quad (8.48)$$

Доколку се замени (8.48) во (8.46) се добива:

$$E(Var(Y_3|X_2)) \leq g_{31}^2 E_{x_1} [X_1^2] - g_{31}^2 E_{X_1 X_2}^2 (X_1 X_2) / E[X_2^2] + 1 \quad (8.49)$$

Доколку (8.49) се замени во (8.45) ќе се добие:

$$h(Y_3|X_2) \leq \frac{1}{2} \cdot \log (2\pi e) (1 + g_{31}^2 E_{x_1} [X_1^2] - g_{31}^2 [E_{X_1 X_2} (X_1 X_2)]^2 / E[X_2^2]) \quad (8.50)$$

Изразот (8.41) е превземен од [14, app.(16A)].

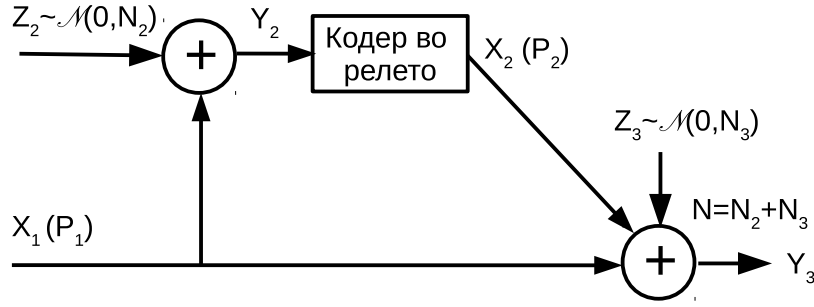
8.5 Капацитет на деградиран Гаусов RC

Да претпоставиме дека релето ги процесира податоците со користење на DF методата (види глава 2.2.3) и дека средната моќност на предавателниот сигналот x_1 во изворот е со моќност P_1 . Преносот е под влијание на Гаусов шум. Општетената верзија од испратениот сигнал y_2 се прима во релето R кое е физички поблиску до изворот S во споредба со одалеченоста на изворот од дестинацијата D . Во оваа глава ќе покажеме како може релето R правилно да го употреби примениот сигнал y_2 за да прати сигнал x_2 со моќност P_2 кој ќе и помогне на дестинацијата D правилно да го реконструира испратениот сигнал од изворот.

Прво ќе дефинираме модел во дискретно време за деградиран релеен канал во присуство на Гаусов шум прикажан на слика 8.1.

Да земеме $Z_2 = (z_{21}, \dots, z_{2n})$ да биде низа на i.i.d. ортогонални случајни променливи со средна вредност нула и варијанса N_2 , и да земеме $Z_3 = (z_{31}, \dots, z_{3n})$ да бидат i.i.d ортогонални случани променливи независни од Z_2 со средна вредност нула и варијанса N_3 . Да дефинираме $N = N_2 + N_3$. Во i -то испраќање реалните броеви x_{1i} и x_{2i} се испратени од изворот и релето и :

$$y_{2i} = x_{1i} + z_{2i}, \quad y_{3i} = x_{2i} + y_{2i} + z_{3i} \quad (8.51)$$



Слика 8.1: Деградиран Гаусов релеен канал

се примени во релето и дестинацијата соодветно. Ако се земе во предвид дефиницијата (2.11) јасно е дека се работи за деградиран канал бидејќи доколку се знае y_2 тогаш сигналот на влез од дестинацијата D не зависи од x_1 .

Да земеме дека ограничувањата на предавателната моќност по испратена порака во изворот и релето се:

$$E[x_1^n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{1i}^2(w) \leq P_1 \quad w \in \{1, 2, \dots, M\} \quad (8.52)$$

$$E[x_2^n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{2i}^2(y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2i-1}) \leq P_2 \quad (y_{21}, \dots, y_{2n}) \in \mathfrak{R}^n \quad (8.53)$$

каде n е должината на блокот, а $x_1^n = (x_{11}, \dots, x_{1n})$ и $x_2^n = (x_{21}, \dots, x_{2n})$ се испратените сигнали низи од изворот и релето соодветно.

Кодот кој се користи за анализата на овој канал е даден во глаава 2.2.3.

Теорема 8.1.

Капацитетот C^* на Гаусов деградиран RC е [3, eq.(58)]:

$$C^* = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \min \left\{ C \left(\frac{P_1 + P_2 + 2 \cdot \sqrt{\alpha P_1 P_2}}{N} \right), C \left(\frac{\alpha P_1}{N_2} \right) \right\} \quad (8.54)$$

каде $\bar{\alpha} = (1 - \alpha)$ и:

$$C(X) = \frac{1}{2} \cdot \log(1 + x) \quad x \geq 0 \quad (8.55)$$

Доказ: Достигливоста на капацитетот во теоремата 8.1. За $0 \leq \alpha \leq 1$ да земеме $X_2 \sim N(0, P_2)$, $X_{10} \sim N(0, \alpha P_1)$ и дека X_{10} , X_2 се независни. Да претпоставиме дека зависноста помеѓу X_1 и X_2 е дадена со:

$$X_1 = \sqrt{\bar{\alpha} \cdot \frac{P_1}{P_2}} X_2 + X_{10} \quad (8.56)$$

Тогаш врз база на теорема 2.3, треба да добиеме:

$$I(X_1, X_2; Y_3) = \log \left(\frac{P_1 + P_2 + 2 \cdot \sqrt{\bar{\alpha} P_1 P_2}}{N} \right), \quad I(X_1; Y_2 | X_2) = \frac{1}{2} \cdot \log \left(1 + \frac{\alpha P_1}{N} \right) \quad (8.57)$$

Претпоставката дека здружената PMF $p(x_1, x_2)$ всушност ја максимизира $\min \{I(X_1; Y_2 | X_2), I(X_1, X_2; Y_3)\}$ ќе следи од доказот на реципроцитетот на теоремата.

Случајната кодна книга дефинирана како во глава 2.2.3 придружена на оваа здружена PMF се добива со случаен избор на:

$$\begin{aligned}\ddot{X}_1(w) & \text{ i.i.d. } \sim N_n(0, \alpha P_1 I) \quad w \in [1, 2^{nR}] \\ \ddot{X}_2(s) & \text{ i.i.d. } \sim N_n(0, P_2 I) \quad s \in [1, 2^{nR_2}]\end{aligned}\quad (8.58)$$

каде „...“ означува дека се работи за случајно избрани вредности на променливите X_1 и X_2 . R_2 е брзината на пренесување на податоци за делницата од R до D и дадена со тврдењето 8.1, а $N_n(0, I)$ означува нормална распределба со n променливи со единечна матрица на коваријанси - I .

Кодната книга е дадена со:

$$x_1^n(w|s) = \ddot{x}_1^n(w) + \sqrt{\frac{\alpha P_1}{P_2}} x_2^n(s), \quad w \in [1, 2^{nR}] \quad s \in [1, 2^{nR_2}]. \quad (8.59)$$

Кодните зборови генерирани на ваков начин го задоволуваат ограничувањето на моќност 8.52 со голема веројатност и затоа вкупната средна веројатност на грешка може да се покаже дека е мала. Со тоа се покажува дека кодот дефиниран со кодната книга (8.59) го достигнува капацитетот даден со теоремата 8.1.

Тврдење 8.1.

Капацитетот на на каналот од релето до дестинацијата е [14, eq.(62)-(63)]:

$$R_2 = I(X_2; Y_3) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{(\sqrt{P_2} + \sqrt{\alpha P_1})^2}{(\alpha P_1 + N)} \right) - \epsilon \quad (8.60)$$

Доказ: Се претпоставува дека зависноста меѓу случајните променливи X_1 и X_2 е дадена со следниов израз:

$$X_1 = \sqrt{\alpha \cdot \frac{P_1}{P_2}} \cdot X_2 + X_{10} \quad (8.61)$$

Да го докажеме изразот (8.60):

$$\begin{aligned}R_2 = I(X_2; Y_3) &= \frac{1}{2} \cdot \log(\text{Var}[X_2 + Y_2 + Z_3]) - \frac{1}{2} \cdot \log(\text{Var}[X_2 + Y_2 + Z_3] | X_2) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \log(\text{Var}[X_2 + X_1 + Z_2 + Z_3]) - \frac{1}{2} \cdot \log(\text{Var}[X_1 + Z_2 + Z_3] | X_2) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \log(\text{Var}[X_2 + X_1] + N) - \frac{1}{2} \cdot \log(E_{x_2} \{ \text{Var}[X_1 | X_2] \} + N)\end{aligned}\quad (8.62)$$

Доколку се пресмета варијансата од првиот член на (8.62) се добива:

$$\begin{aligned}\text{Var}[X_2 + X_1] &= P_2 + 2 \cdot E[X_1 X_2] + P_1 = P_2 + 2 \cdot E \left[\left(\sqrt{\alpha \cdot \frac{P_1}{P_2}} \cdot X_2 + X_{10} \right) \cdot X_2 \right] + P_1 = \\ &= P_2 + 2 \cdot E \left[\sqrt{\alpha \cdot \frac{P_1}{P_2}} \cdot X_2^2 + X_{10} X_2 \right] + P_1 = P_2 + 2 \cdot \sqrt{\alpha \cdot \frac{P_1}{P_2}} \cdot P_2 + 2 \cdot \cancel{E[X_{10} X_2]} + P_1 = \\ &= P_2 + 2 \cdot \sqrt{\alpha \cdot P_1 P_2} + P_1 = P_2 + 2 \cdot \sqrt{\alpha \cdot P_1 P_2} + \bar{\alpha} P_1 + \alpha P_1\end{aligned}\quad (8.63)$$

Ако се употреби Коши-Шварцовата нееднаквост [30, eq.(14.5.2)] за варијансата во вториот член од изразот (8.62) се добива:

$$\begin{aligned} E_{x_2} \{Var [X_1|X_2]\} &= E [X_1^2] - \frac{E^2 [X_1 X_2]}{E [X_2^2]} = P_1 - \frac{E^2 \left[\left(\sqrt{\bar{\alpha}} \cdot \frac{P_1}{P_2} \cdot X_2 + X_{10} \right) X_2 \right]}{P_2} = \\ &= P_1 - \frac{\bar{\alpha} \frac{P_1}{P_2} \cdot P_2^2}{P_2} = P_1 - \frac{\bar{\alpha} P_1 \cdot P_2}{P_2} = P_1 - \bar{\alpha} P_1 = \alpha P_1 \end{aligned} \quad (8.64)$$

Доколку се заменат (8.63) и (8.64) во (8.62) се добива:

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{2} \cdot \log (Var [X_2 + X_1] + N) - \frac{1}{2} \cdot \log (\alpha P_1 + N) = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{(Var [X_2 + X_1] + N)}{\alpha P_1 + N} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \log \frac{(P_2 + 2 \cdot \sqrt{\bar{\alpha}} \cdot P_1 P_2 + \bar{\alpha} P_1 + \alpha P_1 + N)}{\alpha P_1 + N} = \frac{1}{2} \cdot \log \left(1 + \frac{(\sqrt{P_2} + \sqrt{\bar{\alpha} P_1})^2}{\alpha P_1 + N} \right) \end{aligned} \quad (8.65)$$

Со што се докажува изразот 8.60.

Реципроцитетот на теоремата 8.1. Секој код за каналот специфицира здружена PMF на W, X_1, X_2, Y_2, Y_3 .

Согласно (2.22) и (2.70) се добива:

$$nR \leq \sum_{i=1}^n I(X_{1i}; Y_{2i}, Y_{3i} | X_{2i}) + n\delta_n = \sum_{i=1}^n I(X_{1i}; Y_{2i} | X_{2i}) + n\delta_n \quad (8.66)$$

На тој начин:

$$\begin{aligned} nR &\leq \sum_{i=1}^n [h(Y_{2i} | X_{2i}) - h(Y_{2i} | X_{2i}, X_{1i})] + n\delta_n = \\ &= \sum_{i=1}^n [h(Y_{2i} | X_{2i}) - h(X_{1i} + Z_{2i} | X_{2i}, X_{1i})] + n\delta_n = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[h(Y_{2i} | X_{2i}) - \sum_{j=1}^n p(X_{1i} = x_{1j}) \cdot h(x_{1j} + Z_{2i} | X_{2i}, X_{1i} = x_{1j}) \right] + n\delta_n \\ &= \sum_{i=1}^n [h(Y_{2i} | X_{2i}) - h(Z_{2i} | X_{2i})] + n\delta_n = \\ &= \sum_{i=1}^n [h(Y_{2i} | X_{2i}) - h(Z_{2i})] + n\delta_n = \sum_{i=1}^n \left[h(Y_{2i} | X_{2i}) - \frac{1}{2} \cdot \log(2\pi e \cdot N_2) \right] + n\delta_n \end{aligned} \quad (8.67)$$

За секое i :

$$\begin{aligned} h(Y_{2i} | X_{2i}) &= E_{x_{2i}} [h(Y_{2i} | x_{2i})] \stackrel{(a)}{\leq} \\ &\leq E_{x_{2i}} \left[\frac{1}{2} \log(2\pi e) (var(Y_{2i} | x_{2i})) \right] \stackrel{(b)}{\leq} \frac{1}{2} \log(2\pi e) (E_{x_{2i}} [var(Y_{2i} | x_{2i})]) \end{aligned} \quad (8.68)$$

Каде (а) следи од [9, Theorem 8.6.5], а (b) следи од неравенството на Јансен [9, eq.(2.76)]. Ако се замени $Y_{2i} = X_{1i} + Z_{2i}$ се добива:

$$\begin{aligned} E_{x_{2i}} [var(Y_{2i} | x_{2i})] &= E_{x_{2i}} [E((X_{1i} + Z_{2i})^2 | X_{2i})] = |E[X_{1i} Z_{2i}] = 0| = \\ &= E[var(X_{1i} | X_{2i})] + E[Z_{2i}^2] = A_i + N_2 \end{aligned} \quad (8.69)$$

каде $E[\text{var}(X_{1i}|X_{2i})] = A_i$, $i = 1..n$.

Ако (8.68) и (8.69) заменат во (8.67) ќе добиеме:

$$\begin{aligned} R &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \log 2\pi e (A_i + N_2) - \frac{1}{2} \cdot \log((2\pi e) N_2) + \delta_n = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{A_i}{N_2} + 1 \right) \stackrel{(c)}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \log \left(1 + \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i}{N_2} \right) + \delta_n \end{aligned} \quad (8.70)$$

каде (c) повторно следи од неравенството на Јансен. Сепак:

$$\begin{aligned} A_i &= E_{x_{2i}}[\text{var}(X_{1i}|x_{2i})] = E_{x_{2i}}(E_{X_{1i}}(X_{1i}^2|X_{2i}) - E_{X_{1i}}^2(X_{1i}|X_{2i})) \\ &= E_{X_{1i}}(X_{1i}^2) - E_{X_2} E_{X_1}^2(X_{1i}|X_{2i}) \end{aligned} \quad (8.71)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i \stackrel{(d)}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (E(X_{1i}^2) - E(E^2(X_{1i}|X_{2i}))) \stackrel{(e)}{\leq} P_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[E^2(X_{1i}|X_{2i})] \quad (8.72)$$

Еднаквоста (d) се добива со замена на (8.71) во (8.72), а нееднаквоста (e) следи од ограничувањето на моќност на кодните зборови.

Ако земеме ((8.64)):

$$\bar{\alpha} P_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[E^2(X_{1i}|X_{2i})], \quad \alpha \in [0, 1] \quad (8.73)$$

На тој начин од (8.70) ќе се добие:

$$R \leq \frac{1}{2} \cdot \log \left(1 + \frac{P_1 - \bar{\alpha} P_1}{N_2} \right) + \delta_n = \frac{1}{2} \cdot \log \left(1 + \frac{\alpha P_1}{N_2} \right) + \delta_n. \quad (8.74)$$

Следно, ако го земеме во предвид 2.19:

$$y_{2i} = x_{1i} + z_{2i} \quad y_{3i} = x_{2i} + y_{2i} + z_{3i} \quad (8.75)$$

$$\begin{aligned} nR &\leq \sum_{i=1}^n I(X_{1i}, X_{2i}; Y_{3i}) + n\delta_n \leq \sum_{i=1}^n [h(Y_{3i}) - h(Y_{3i}|X_{1i}X_{2i})] + n\delta_n = \\ &= \sum_{i=1}^n [h(X_{2i} + Y_{2i} + Z_{3i}) - h(X_{2i} + Y_{2i} + Z_{3i}|X_{1i}X_{2i})] + n\delta_n = \\ &= \sum_{i=1}^n [h(X_{2i} + Y_{2i} + Z_{3i}) - h(X_{2i} + X_{1i} + Z_{2i} + Z_{3i}|X_{1i}X_{2i})] + n\delta_n \\ &= \sum_{i=1}^n [h(X_{2i} + Y_{2i} + Z_{3i}) - h(Z_{2i} + Z_{3i})] + n\delta_n = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[h(X_{2i} + Y_{2i} + Z_{3i}) - \frac{1}{2} \log(2\pi e) \overbrace{(N_2 + N_3)}^N \right] + n\delta_n = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[h(X_{2i} + X_{1i} + Z_{2i} + Z_{3i}) - \frac{1}{2} \log(2\pi e) N \right] + n\delta_n \end{aligned} \quad (8.76)$$

за секое i ,

$$h(X_{2i} + X_{1i} + Z_{2i} + Z_{3i}) \leq \frac{1}{2} \log(E(X_{1i} + X_{2i})^2 + N) \quad (8.77)$$

Оттука:

$$\begin{aligned}
 R &\leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \log 2\pi e (E(X_{1i} + X_{2i})^2 + N) - \frac{1}{2} \log (2\pi e) N = \\
 &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{E(X_{1i} + X_{2i})^2}{N} \right) + \delta_n \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n E(X_{1i} + X_{2i})^2}{N} \right) + \delta_n.
 \end{aligned} \tag{8.78}$$

Сега се добива :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n E(X_{1i} + X_{2i})^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_{1i}^2) + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n E(X_{1i}X_{2i}) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_{2i}^2) \leq \\
 &\leq P_1 + P_2 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n E_{2i}[X_{2i} \cdot E_{1i}[X_{1i}|X_{2i}]]
 \end{aligned} \tag{8.79}$$

Со употреба на Коши-Шварцовата нееднаквост [30, eq.(14.5.2)] на секој член од сумата во (8.79) се добива:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n E(X_{1i} + X_{2i})^2 \leq P_1 + P_2 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{E_{2i}[X_{2i}^2] \cdot E_{2i}\{E_{1i}^2[X_{1i}|X_{2i}]\}} \tag{8.80}$$

Од (8.73), ограничувањето на моќност (8.53) и Коши-Шварцовата нееднаквост се добива:

$$\begin{aligned}
 &\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{E[X_{2i}^2]}{n} \right)^{1/2} \left(\frac{E\{E^2[X_{1i}|X_{2i}]\}}{n} \right)^{1/2} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{E[X_{2i}^2]}{n} \right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{E\{E^2[X_{1i}|X_{2i}]\}}{n} \right) \\
 &\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{E[X_{2i}^2]}{n}} \sqrt{\frac{E\{E^2[X_{1i}|X_{2i}]\}}{n}} \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_{2i}^2] \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\{E^2[X_{1i}|X_{2i}]\}} = \sqrt{P_2(\bar{\alpha}P_1)}
 \end{aligned} \tag{8.81}$$

Во (8.81) максимумот се случува кога: $E\{E^2[X_{1i}|X_{2i}]\} = \bar{\alpha} \cdot P_1$ и $E[X_{2i}^2] = P_2$ за сите i . Ако (8.81) и (8.79) се заменат во (8.78) се добива:

$$R \leq \frac{1}{2} \cdot \log \left(1 + \frac{P_1 + P_2 + 2 \cdot \sqrt{\bar{\alpha}P_1P_2}}{N} \right) + \delta_n \tag{8.82}$$

со што е докажана теоремата 8.1.

8.6 Моментален капацитет на точка-точка МИМО канал

Со користење на (6.3) и зависноста помеѓу здружената информација и ентропијата, (6.10) за дадено \mathbf{N} може да се претстави како:

$$\begin{aligned}
 I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) &= h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{H} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N}|\mathbf{X}) = \\
 &= h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{N}|\mathbf{X}) = h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{N})
 \end{aligned} \tag{8.83}$$

каде $h(\dots)$ во овој случај ја означува диференцијалната ентропија [9, ch.(8)] на континуална случајна променлива. Се претпоставува дека испратениот вектор \mathbf{X} во изворот и векторот на шумот $\mathbf{N} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{K}_n)$ се независни. Изразот (8.83) го достигнува максимумот кога \mathbf{Y} е Гаусова случајна променлива, бидејќи Гаусовата распределба ја максимизира ентропијата за дадена варијанса [9]. Диференцијалната ентропија за реален гаусов вектор $\mathbf{Y} \in R_n$ со нулта средна вредност и матрица на коваријанси \mathbf{K} е еднаква на:

$$h(\mathbf{Y}) = \frac{1}{2} \cdot \log_2((2\pi \cdot e)^n \det(\mathbf{K})), \quad (8.84)$$

а за комплексен Гаусов вектор $\mathbf{Y} \in C_n$, диференцијалната ентропија е:

$$h(\mathbf{Y}) \leq \log_2 \det(\pi \cdot e \cdot \mathbf{K}) \quad (8.85)$$

со еднаквост само и само ако \mathbf{Y} е циркуларно-симетричен комплексен Гаусов вектор со коваријанса $E[\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^H] = \mathbf{K}$ [68]. Ако се претпостави оптимална гаусова распределба за \mathbf{X} , коваријансата на примениот комплексен вектор \mathbf{Y} е дадена со:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^H] &= E[(\mathbf{H} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N}) \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N})^H] \\ E[(\mathbf{H} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N}) \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N})^H] &= E[(\mathbf{H} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N}) \cdot (\mathbf{X}^H \cdot \mathbf{H} + \mathbf{N}^H)] = \\ &= E[\mathbf{H} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^H \cdot \mathbf{H}^H] + E[\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^H] = \\ \mathbf{H} \cdot E[\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^H] \cdot \mathbf{H}^H + E[\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^H] &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{K}_x \cdot \mathbf{H}^H + \mathbf{K}_n = \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_n \end{aligned} \quad (8.86)$$

Во изразот (8.86) индексите s и n ги означуваат сигналот и шумот. Ако (8.86) се замени во (8.83) максималната здружена информација за МИМО каналот е:

$$\begin{aligned} C = h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{N}) &= \log_2 [\det(\pi e (\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_n))] - \log_2 \det(\pi e \cdot \mathbf{K}_n) = \log [\det((\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_n) \cdot \mathbf{K}_n^{-1})] \\ &= \log [\det(\mathbf{H} \cdot \mathbf{K}_x \cdot \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{K}_n^{-1} + \mathbf{K}_n \cdot \mathbf{K}_n^{-1})] = \log [\det(\mathbf{H} \cdot \mathbf{K}_x \cdot \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{K}_n^{-1} + \mathbf{I}_{N_R})] \end{aligned} \quad (8.87)$$

каде \mathbf{I}_{N_R} е единечна матрица со димензија $N_R \times N_R$. Кога изворот не го познава каналот, оптимално е рамномерно да се распредели расположивата моќност P_T помеѓу предавателните антени во изворот, т.е. во тој случај коваријанса на векторот на симболи испратени во изворот \mathbf{X} е дадена со: $\mathbf{K}_x = \frac{P_T}{N_T} \cdot \mathbf{I}_{N_T}$. Дополнително, ако се претпостави дека шумот во антените не е корелиран, матрицата на коваријанси на шумот е: $\mathbf{K}_n = N_0 \mathbf{I}_{N_R}$, тогаш за изразот (8.87) се добива:

$$C = \log_2 \left[\det \left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{P_T}{N_T \cdot N_0} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^H \right) \right] \quad (8.88)$$

каде N_0 е варијанса на шумот.

Капацитетот на МИМО каналот е можно да се анализа со дијагонализација на продуктот на матрици $\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^H$ во (8.88) со декомпозиција на сопствени вредности (анг. eigen values) или со декомпозиција на сингуларни вредности.

Ако се користи декомпозиција на сингуларни вредности и ако се земе $\rho = P_T/N_0$ изразот (8.88) се сведува на:

$$C = \log_2 \left[\det \left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{\rho}{N_T} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{\Sigma}^H \cdot \mathbf{U}^H \right) \right] = \log_2 \left[\det \left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{\rho}{N_T} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma}^2 \cdot \mathbf{U}^H \right) \right] \quad (8.89)$$

каде \mathbf{U} и \mathbf{V} се унитарни матрици на левите и десните сингуларни вектори, и $\mathbf{\Sigma}$ е дијагонална матрица која ги содржи сингуларните вредности на главната дијагонала. Сите

елементи на дијагоналата се нулти освен првите r елементи. Бројот на ненулти сингуларни вредности r е еднаков на рангот на каналната матрица:

$$r = \text{rank}(\mathbf{H}) \leq \min(N_T, N_R) \quad (8.90)$$

Изразот 8.89 може дополнително да се упрости доколку се употреби теоремата за детерминанти на Силвестер:

$$\det(\mathbf{I}_{AB} + A \cdot B) = \det(\mathbf{I}_{BA} + B \cdot A). \quad (8.91)$$

Доколку (8.91) се замени во (8.89) ќе се добие:

$$C = \log_2 \left[\det \left(\mathbf{I}_{N_T} + \frac{\rho}{N_T} \cdot \mathbf{U}^H \cdot \mathbf{U} \cdot \Sigma^2 \right) \right]. \quad (8.92)$$

После дијагонализацијата на матрицата $\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^H$, изразите за капацитет на МИМО каналот содржат само унитарни и дијагонални матрици. Со тоа, полесно е да се забележи дека вкупниот капацитет на МИМО каналот се состои од сума на паралелни AWGN SISO под-канали. Бројот на паралелни под-канали зависи од рангот на каналната матрица. Доколку во (8.92) се употреби (8.90) и земе во предвид фактот дека детерминантата на унитарна матрица е еднаква на 1 се добива:

$$C = \log_2 \left[\det \left(\mathbf{I}_{N_T} + \frac{\rho}{N_T} \cdot \Sigma^2 \right) \right] = \log_2 \left[\left(1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \sigma_1^2 \right) \cdot \left(1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \sigma_2^2 \right) \dots \left(1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \sigma_r^2 \right) \right] = \sum_{i=1}^r \log_2 \left(1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \sigma_i^2 \right) \quad (8.93)$$

каде Σ е реална матрица, а σ_i^2 се квадратите на сингуларните вредности.

Ако се користи декомпозиција на сопствени вредности и ако се земе $\rho = P_T/N_0$ изразот (8.88) се сведува на:

$$C = \log_2 \left[\det \left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{\rho}{N_T} \cdot \mathbf{E} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{E}^{-1} \right) \right] \quad (8.94)$$

каде \mathbf{E} е матрица на сопствените вектори со ортогонални колони и Λ е дијагонална матрица која ги содржи сопствените вредности во главната дијагонала.

Ако се користи истиот пристап како во случајот на декомпозиција на сингуларни вредности, изразот 8.94 може да се сведе на:

$$C = \log_2 \left[\det \left(\mathbf{I}_{N_R} + \frac{\rho}{N_T} \cdot \mathbf{E} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{E}^{-1} \right) \right] = \log_2 \left[\det \left(\mathbf{I}_{N_T} + \frac{\rho}{N_T} \cdot \mathbf{E}^{-1} \cdot \mathbf{E} \cdot \Lambda \right) \right] = \log_2 \left[\left(1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \lambda_1 \right) \cdot \left(1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \lambda_2 \right) \dots \left(1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \lambda_r \right) \right] = \sum_{i=1}^r \log_2 \left(1 + \frac{\rho}{N_T} \cdot \lambda_i \right) \quad (8.95)$$

каде λ_i се сопствените вредности содржани во главната дијагонала на матрицата Λ .

9 Објавени трудови од темата на докторската дисертација

Меѓународни конференции:

[1] J. Stosic, and Z. Hadzi-Velkov, "Outage Probability of Multi-hop Relay Systems in Various Fading Channels," *Proc. 1st Conference on Information and Communication Technologies' Innovations (ICT Innovations 2009)*, Ohrid, Macedonia, 27-30 September 2009 (paper selected for publication in *ICT Innovations 2009*, Springer, 2010)

[2] J. Stosic, and Z. Hadzi-Velkov, "Performance analysis of dual-hop MIMO systems", *Proc. 2nd Conference on Information and Communication Technologies' Innovations (ICT Innovations 2010)*, Ohrid, Macedonia, 12-15 September 2010 (paper selected for publication in *ICT Innovations 2010*, Springer, 2011, pp. 123-132).

[3] J. Stosic, and Z. Hadzi-Velkov, "Performance analysis of dual-hop dual-antennas MIMO systems in Rayleigh fading," *Proc. 2nd International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems (ICUMT 2010)*, Moscow, Russia, 18-20 October 2010.

[4] J. Stosic, and Z. Hadzi-Velkov, "Outage probability approximations for dual-hop Amplify-and-Forward MIMO relay systems in Rayleigh fading", *Proc. 11th International Conference on Telecommunication in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services (TELSIKS 2013)*, Nis, Serbia, 16-19 October 2013.

[5] J. Stosic, and Z. Hadzi-Velkov, "Approximate Performance Analysis of Dual-hop Decouple-and-Forward MIMO Relaying," *Proc. 11th International Conference on Electronics, Telecommunications, Automation and Informatics (ETA I 2013)*, Ohrid, Macedonia, 26-28 September 2013.

Списанија:

[1] J. Stosic, Z. Hadzi-Velkov, "Simple tight approximations of the error performance for dual-hop MIMO relay systems in Rayleigh fading," *AEÜ - International Journal of Electronics and Communications*, vol. 67, no. 10, pp. 854-960, October 2013 (Impact Factor: 0.695).

Литература

- [1] A. Sendonaris, E. Erkip, B. Aazhang, “User Cooperation Diversity Part I and Part II,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 51, no. 11, pp. 1927-48, 2003.
- [2] M. Dohler, Y. Li, *Cooperative Communications: Hardware, Channel and PHY*, Wiley, 2010.
- [3] T. M. Cover, A. E. Gamal, “Capacity Theorem for the relay channels,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-25, no. 5, September 1979.
- [4] J. N. Laneman, G. W. Wornell, and D. N. C. Tse, “An Efficient Protocol for Realizing Cooperative Diversity in Wireless Networks,” *IEEE International Symposium on Information Theory*, pp. 294, June 2001.
- [5] I. A. Faycal, M. Medard, “Optimal uncoded regeneration for binary antipodal signaling,” *IEEE International Conference on Communications*, vol. 2, pp. 742– 746, June 20–24, 2004.
- [6] M. O. Hasna, M. S. Alouini, “A Performance Study of Dual-Hop Transmissions With Fixed Gain Relays,” *IEEE Transactions On Wireless Communications*, Vol.3, no. 6, 2004.
- [7] A. Nosratinia, T. E. Hunter, “A. Hedayat Cooperative Communication in Wireless Networks,” *IEEE Communications Magazine*, Oct. 2004.
- [8] C. E. Shannon, “A mathematical theory of communication,” *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 27, pp. 379-423, July 1948.
- [9] T. M. Cover, J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*, Second Edition, John Wiley & Sons, 2006.
- [10] A. Sendonaris, E. Erkip, B. Aazhang, “Increasing uplink capacity via user cooperation diversity,” *IEEE International Symposium on Information Theory*, 1998.
- [11] T. E. Hunter, S. Sanayei, A. Nosratinia, “Outage analysis of coded cooperation,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, pp. 375–391, Feb. 2006.
- [12] D. Tse and P. Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communication*, pp. 383– 424, Cambridge University Press, 2005.
- [13] G. Kramer, I. Maric, and R. D. Yates, *Cooperative Communications (Foundations and Trends in Networking)*, Hanover MA: Now Publishers Inc., 2006.
- [14] A. E. Gamal, Y-H. Kim, *Network Information Theory*, Cambridge University Press, 2011.
- [15] P. Revesz, Z. W. Birnbaum, E. Lukacs, *The Laws of Large Numbers - A volume in Probability and Mathematical Statistics: A Series of Monographs and Textbooks*, Elsevier, 1967
- [16] J. N. Laneman, D. N. C. Tse, “Cooperative Diversity in Wireless Networks Efficient Protocols and Outage Behavior,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 50, no. 12, December 2004

- [17] S. M. Alamouti, "A Simple Transmit Diversity Technique for Wireless Communications," *IEEE Journal on Select Areas in Communications*, vol. 16, no. 8, October 1998.
- [18] J. Stosic, Z. Hadzi-Velkov, "Performance analysis of dual-hop MIMO systems", *Proc. 2nd Conference on Information and Communication Technologies' Innovations (ICT Innovations 2010)*, Ohrid, Macedonia, 12-15 September 2010.
- [19] J. Stosic, Z. Hadzi-Velkov, "Performance analysis of dual-hop dual-antennas MIMO systems in Rayleigh fading," *Proc. 2nd International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems (ICUMT 2010)*, Moscow, Russia, 18-20 October 2010.
- [20] I-H. Lee, D. Kim, "Decouple-and-Forward Relaying for Dual-Hop Alamouti Transmissions," *IEEE Communications Letters*, No.2, 2008.
- [21] J. N. Laneman, G. W. Wornell, "Energy efficient antenna sharing and relaying for wireless networks," *Proc. IEEE Wireless Communications Networking Conf.*, Chicago, IL, Oct. 2000.
- [22] P. Anghel and M. Kaveh, "Analysis of two-hop transmission over Rayleigh fading channels," *Proc. IEEE Int. Symp. Advances in Wireless Communications*, Victoria, BC, Canada, Sept. 2002, pp. 155–156.
- [23] V. Emamian, P. Anghel, and M. Kaveh, "Outage probability of a multi- user spatial diversity system in a wireless networks," *Proc. IEEE Vehicular Technology Conf.*, Vancouver, BC, Canada, Sept. 2002, pp. 573–576.
- [24] M. O. Hasna, M. S. Alouini, "Application of the harmonic mean statistics to the end-to-end performance of transmission systems with relays," *Proc. IEEE Global Communications Conf.*, Taipei, Taiwan, Nov. 2002, pp. 1310–1314.
- [25] T. M. Cover, C. S. K. Leung, "An achievable rate region for mutiple-access channel with Feedback," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-27, no. 3, May 1981.
- [26] F. M. J. Willems, "Informationtheoretical Results for the Discrete Memoryless Multiple Access Channel. Doctor in de Wetenschap- pen Proefschrift", *Katholieke Universiteit Leuven*, Leuven, Belgium, Oct. 1992.
- [27] A. D. Wyner, "On source coding with side information at the decoder," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-21, pp. 294-300, May 1975.
- [28] D. Slepian, J. K. Wolf, "Noiseless coding of correlated information sources," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. IT-19, pp. 471–480, 1973.
- [29] E. C. van der Meulen, "Three-terminal communication channels," *Adv. Appl. Prob.*, vol. 3, pp. 120-154, 1971.
- [30] V. Krishnan, *Probability and Random Processes*, Wiley, 2006.
- [31] L. R. Ford, D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*, Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1962.
- [32] A. E. Gamal, N. Hassanpour, J. Mammen, "Relay Networks with Delays," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-53, no. 10, October 2007.
- [33] I. H. Lee, D. Kim, "Decouple-and-Forward Relaying for Dual-Hop Alamouti Transmissions," *IEEE Communications Letters*, vol. 12, no. 2, February 2008.

- [34] I. H. Lee, D. Kim, "End-to-End BER Analysis for Dual-Hop OSTBC Transmissions over Rayleigh Fading Channels," *IEEE Transactions On Communications*, vol. 56, no. 3, March 2008
- [35] M. K. Simon, M. S. Alouini, *Digital Communication over Fading Channels*, Second Edition. New York: Wiley, 2005.
- [36] J. Proakis, *Digital Communications*, 4 edition, McGraw-Hill, August 2000.
- [37] B. Sklar, *Digital Communications: Fundamentals and Applications*, Second Edition, Prentice Hall, January 2001.
- [38] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 6th edition, Academic Press, 2000.
- [39] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 9th edition, New York: Dover, 1970.
- [40] Z. Yi, I-M. Kim, Approximate BER Expressions of Distributed Alamouti's Code in Dissimilar Cooperative Networks with Blind Relays, *IEEE Transactions on Communications*, no. 12, 2009.
- [41] S. Chen, W. Wang, X. Zhang, Z. Sun, "Performance Analysis of OSTBC Transmission in Amplify-and-Forward Cooperative Relay Networks," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, no.1, 2010.
- [42] I-H. Lee, D. Kim, "End-to-End BER Analysis for Dual-Hop OSTBC Transmissions over Rayleigh Fading Channels," *IEEE Transactions on Communications*, no. 3, 2008.
- [43] T. Q. Duong, H. J. Zepernick, T. A. Tsiftsis, "Amplify-and-Forward MIMO Relaying with OSTBC over Nakagami-m Fading Channels," *IEEE International Conference on Communications*, 2010;
- [44] I-H. Lee, D. Kim, "Achieving Maximum Spatial Diversity with Decouple-and-Forward Relaying in Dual-Hop OSTBC Transmissions," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, no. 3, 2010.
- [45] L. Yang, Q. T. Zhang "Performance Analysis of MIMO Relay Wireless Networks With Orthogonal STBC," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, no. 7, pp. 3668-74, 2010.
- [46] Y. Chen, G. Wu, W. Lin, Q. Li, S. Li, "Outage Probability of Space-Time Coded Decouple-and-Forward Relaying over Nakagami-m Fading Channels," *International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing*, 2009.
- [47] A. Abdaoui, M. H. Ahmed, "On the Performance Analysis of a MIMO-Relaying Scheme With Space-Time Block Codes," *IEEE Transactions On Vehicular Technology*, no. 7, 2010.
- [48] P. Dharmawansa, M. R. McKay, R. K. Mallik, Analytical Performance of Amplify-and-Forward MIMO Relaying with Orthogonal Space-Time Block Codes, *IEEE Transactions on Communications*, no. 7, 2010.
- [49] B. K. Chalise, L. Vandendorpe, "Outage Probability Analysis of a MIMO Relay Channel with Orthogonal Space-Time Block Codes," *IEEE Communications Letters*, no. 4, 2008.
- [50] H. Jafarkhani, *Space Time Coding Theory and Practice*, Cambridge University Press, 2005.

- [51] V. Tarokh, H. Jafarkhani, A. R. Calderbank, "Space-time block coding for wireless communications: Performance results," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, no.3, pp. 451-60, 1999.
- [52] M. O. Hasna, M. S. Alouini M.S, "Outage Probability of Multihop Transmission Over Nakagami Fading Channels," *IEEE Communications Letters*, vol. 7, no. 5, May 2003.
- [53] M. O. Hasna, M. S. Alouini, "End-to-End Performance of Transmission Systems With Relays Over Rayleigh-Fading Channels," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, no. 6, 2003.
- [54] A. P. Prudnikov, A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integrals and Series Volume 4: Direct Laplace Transforms*, Gordon And Breach Science Publishers, 1992.
- [55] Y. Zhao, R. Adve, T. J. Lim "Symbol error rate of selection amplify-and-forward relay systems," *IEEE Communications Letters*, no. 11, 2006.
- [56] P. A. Anghel, M. Kaveh, "On the Performance of Distributed Space-Time Coding Systems with One and Two Non-Regenerative Relays," *IEEE Transactions On Wireless Communications*, vol. 3, 2006.
- [57] A. Jeffrey, H. H. Dai, *Handbook of Mathematical Formulas and Integrals*, Fourth Edition, Academic Press, 2008.
- [58] B. Vucetic, J. Yuan, *Space-Time Coding*, John Wiley & Sons, 2003.
- [59] V. Tarokh, H. Jafarkhani, A. R. Calderbank, "Space-time block codes from orthogonal designs," *IEEE Transactions On Information Theory*, vol. 5, pp. 1456-67, 1999.
- [60] J. Stosic, Z. Hadzi-Velkov, "Simple tight approximations of the error performance for dual-hop MIMO relay systems in Rayleigh fading," *AEÜ - International Journal of Electronics and Communications*, vol. 67, no. 10, pp. 854-960, October 2013.
- [61] J. Stosic, Z. Hadzi-Velkov, "Outage probability approximations for dual-hop Amplify-and-Forward MIMO relay systems in Rayleigh fading", Proc. 11th International Conference on Telecommunication in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services (TELSIKS 2013), Nis, Serbia, 16-19 October 2013.
- [62] J. Stosic, and Z. Hadzi-Velkov, "Approximate Performance Analysis of Dual-hop Decouple-and-Forward MIMO Relaying," *Proc. 11th International Conference on Electronics, Telecommunications, Automation and Informatics (ETAI 2013)*, Ohrid, Macedonia, 26-28 September 2013.
- [63] P. G. Moschopoulos, "The Distribution of the Sum of Independent Gamma Random Variables," *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 1985.
- [64] J. Stosic, Z. Hadzi-Velkov, "Outage Probability of Multi-hop Relay Systems in Various Fading Channels," *Proc. 1st Conference on Information and Communication Technologies' Innovations (ICT Innovations 2009)*, 27-30 September 2009.
- [65] M. O. Hasna, M. S. Alouini, "Optimal Power Allocation for Relayed Transmissions Over Rayleigh-Fading Channels," *IEEE Transactions On Wireless Communications*, vol. 3, no. 6, November 2004
- [66] I. E. Telatar, "Capacity of Multi-Antenna Gaussian Channels," *European Transactions on Telecommunications*, 1999.

- [67] G. J. Foschini, M. J. Gans, "On Limits of Wireless Communications in Fading Environments when Using Multiple Antennas", *Wireless Personal Communications*, vol. 6, pp. 311-335, March 1998.
- [68] I. Telatar, "Capacity of multi-antenna gaussian channels," *AT&T Technical Memorandum*, 1995.
- [69] A. A. P. Guimaraes, C. C. Cavalcante, An Upper-Bound on the Ergodic Capacity of Rayleigh-Fading MIMO Channels using Majorization Theory, *XXX Brazilian Symposium on Telecommunications*, Brasilia, 2012.